

AS
222
R63
SER. 6
v. 2
1925
PER

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXII

1925

SERIE SESTA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME II.



ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGRAFO DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

1925

ATTI

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINGUISTI

SEDE IN ROMA

ANNO 1880

SECONDA SERIE

RENDICONTI

DEI LAVORI E DELLE DISCUSSIONI

DELLA SECONDA



RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1925.

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo).

Biologia. — *Sopra una sostanza siderofila, emessa dal micronucleo dei Gameti impuri, derivati dalla 2ª divisione dei Gametogeni impuri, in "Cryptochilum echini", e sulla sua destinazione. Nota del Corrisp. ACHILLE RUSSO* ⁽¹⁾.

I Gameti impuri, che si costituiscono con la 2ª divisione dei Gametogeni impuri A¹ e B¹, come si è detto nella Nota precedente ⁽²⁾, hanno il micronucleo allungato. Quelli che derivano dal Gametogene A¹ hanno forma ovoidale o piriforme; quelli che invece provengono dal Gametogene B¹, lo hanno a forma di spina, più o meno ricurva.

In ciascuno di tali micronuclei si distingue una parte ingrossata, in cui è raccolta la cromatina, ed una parte assottigliata, che ne è priva. Difatti, con le colorazioni spiccatamente nucleari, che si ottengono, ad es., con la safranina Pfitzner, con l'ematossilina acida di Erlich, con la tionina o con l'emallume Majer, ecc., la porzione ingrossata si colora intensamente, mentre la parte affilata rimane incolore e poco si osserva con tali reattivi.

Al contrario, nelle colorazioni dei preparati, ottenute con l'ematossilina di Heidenhain, previo soggiorno in soluzione di allume ferrico 2,5 % e successivo differenziamento nella soluzione dello stesso sale, ben di rado si osserva la differenza di colorazione sopra accennata, assumendo i micronuclei una tinta nera in tutta la loro estensione. Ciò prova che la parte assottigliata reagisce

(1) Presentata nella seduta del 5 giugno 1925.

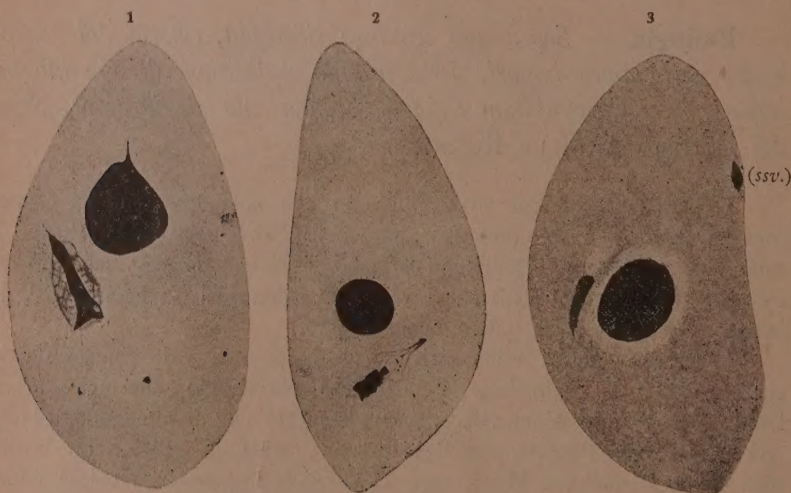
(2) A. Russo, *I Gametogeni impuri, i Gameti impuri e le Coniugazioni accessorie in "Cryptochilum Echini"*, Maupas. Questi « Rendiconti », vol. I, ser. 6ª, fasc. 6º, Roma, 1925.

ai sali di ferro, come la cromatina nucleare, pur non essendo della stessa natura chimica.

La *sostanza siderofila*, contenuta nella parte assottigliata del micronucleo, si mette meglio in evidenza quando i preparati si fanno soggiornare più lungo tempo nei reattivi e propriamente 48 ore, rispettivamente, nelle soluzioni di allume ferrico e di ematossilina.

Di sostanze nucleari, che reagiscono ai sali di ferro, ne furono osservate altre in *Cryptochilum*⁽¹⁾, come il filamento, che si forma durante la divisione dei micronuclei globuliformi, che non fu possibile mettere in evidenza con altre colorazioni. Anche il Dogiel⁽²⁾ recentemente, in alcuni *Ciliati*, ha messo in evidenza, con lo stesso metodo, tale filamento, che chiama *siderofilo*, sul quale, fin dal 1914⁽³⁾, io avevo richiamato l'attenzione degli Zoologi.

Quando i Gameti impuri, formati con la 2ª divisione dei Gametogeni impuri, si sono costituiti, ha inizio nel loro micronucleo l'emissione di una sostanza siderofila, con un processo diverso dall'uno all'altro Gamete.



Figg. 1, 2, 3 - Gameti impuri, derivati dalla 2ª divisione del Gametogene impuro A¹.

1 e 2. Stadii di vacuolizzazione della parte periferica del micronucleo. - 3. Localizzazione della sostanza siderofila (ssv.) nella regione ventrale, in avanti dell'area stomatica, nel punto in cui dovrà avvenire l'incontro dei due Gameti.

Queste figure e le successive furono ricavate da preparati, ottenuti con fissazione al Sublimato, corrosivo in acqua distillata al 2,5 % e sopracolorazione all'Ematossilina ferrica Heidenhain.

(1) A. Russo, *Sul ciclo di sviluppo del Cryptochilum echini*. « Atti Acc. Gioenia di Scienze naturali ». Catania, ser. 5ª, vol. VII, 1914.

(2) V. DOGIEL, *Die Geschlechtsprozesse bei Infusorien*. « Archiv f. Protistenkunde ». Band 50, Heft 3, 1925, pp. 334-335.

(3) A. Russo. Cfr. sopra.

Nel Gamete, che ha il micronucleo piriforme, l'emissione della sostanza ha luogo su quasi tutta la superficie nucleare, in quanto lo strato esterno si vacuolizza e la parte vacuolizzata si libera, sotto forma di strati o di spoglie sovrapposte, che a poco a poco si disperdono nel protoplasma. In tal modo rimane a costituire il micronucleo la parte centrale, la quale resta compatta e fortemente colorata (figg. 1, 2, 3, 4 e 5).



Figg. 4, 5 - Micronuclei dei gameti 1 e 2, a più forte ingrandimento.

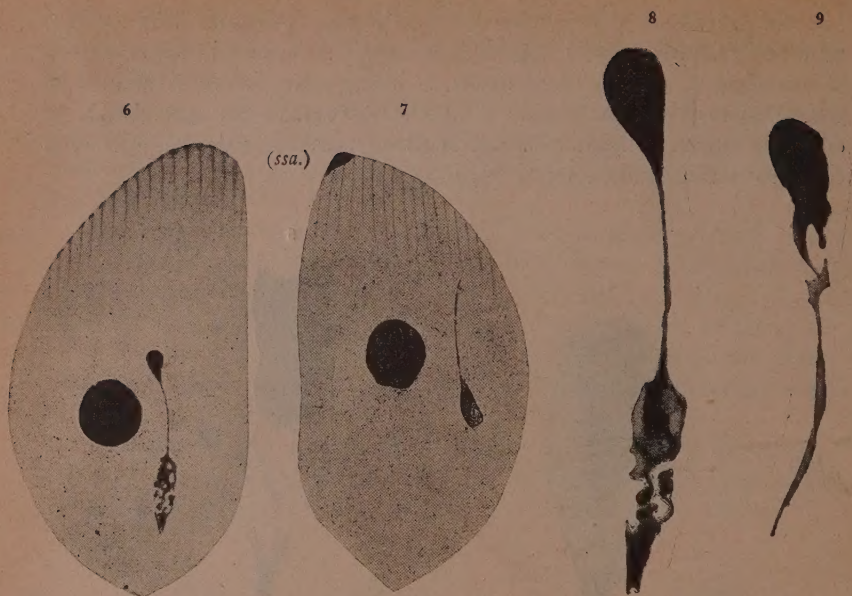
Zeiss $\frac{\text{Oc. 12 comp.}}{\text{Obb. imm. 1/12}}$. Piano tavolo, tubo alz. 18.

Nel Gamete impuro, che ha il micronucleo spiniforme, l'emissione della *sostanza siderofila* avviene invece soltanto nella porzione nucleare affilata del micronucleo stesso. Essa, difatti, si rigonfia e poi si vacuolizza, in modo che la parte periferica si libera, disperdendosi nel protoplasma, e lasciando sul posto solo un filamento centrale. Questo è in continuazione con la parte ingrossata del micronucleo, insieme alla quale assume la stessa tinta nera, dopo colorazione all'Ematossilina ferrica, acquistando, nell'insieme, in tale stadio, la forma di una virgola (figg. 6, 7, 8 e 9).

I micronuclei dei due Gameti, nel primo momento della copula, come si vede nella fig. 10, essendosi spogliati della sostanza siderofila periferica, hanno acquistato una forma allungata, diversa da quella originaria.

Lo *sostanza siderofila*, emessa dai micronuclei, in entrambi i Gameti, non è riassorbita dal protoplasma; ma si localizza invece in punti ben determinati e costanti alla periferia del corpo cellulare. Tali punti sono costantemente due e propriamente quelli, in cui i due Gameti dovranno incontrarsi e fondersi per poter compiere il processo di coniugazione.

In alcuni Gameti, difatti, la sostanza siderofila emessa va a localizzarsi all'estremo anteriore apicale (fig. 7); in altri invece nella regione ventrale,



Figg. 6, 7 - Gameti impuri, derivati dalla 2^a divisione del Gametogene impuro B¹.

In 6 il micronucleo è ingrossato e vacuolizzato nella sua porzione affilata; in 7 la parte vacuolizzata si è dispersa nel protoplasma, localizzandosi alla sommità apicale (ssa.), dove assume forma di una piastrella.

Figg. 8, 9 - Micronuclei degli stessi gameti, a più forte ingrandimento.

Ingr. c. sopra.

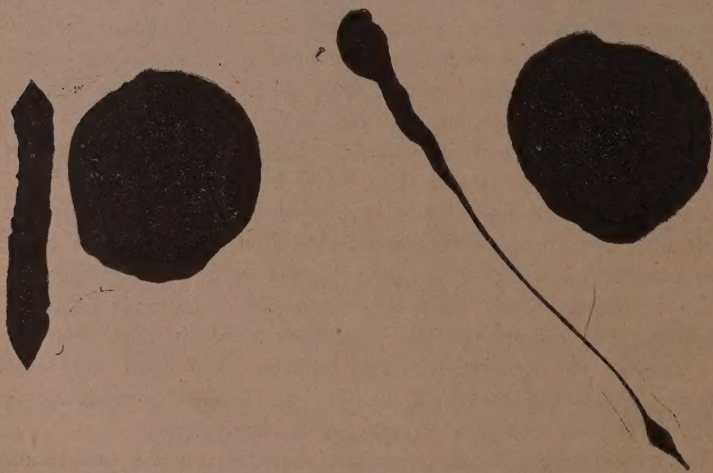


Fig. 10 - Gli apparati nucleari dei due gameti, che compiono la 2^a coniugazione accessoria, dopo l'emissione della sostanza siderofila.

Ingr. c. sopra.

in avanti della regione peristomale (fig. 3), proprio nel punto in cui dovrà avvenire l'incontro e la fusione dei due Gameti⁽¹⁾.

La *sostanza siderofila*, nei Gameti ancora isolati, si presenta sotto forma di globulo o di piastra quando si situa all'estremo apicale, di forma più o meno schiacciata, quando va a situarsi nella regione ventrale; in entrambi i casi può assumere una struttura compatta o pure granulare.

In qualche preparazione fu osservato che la predetta sostanza si dirige verso i due punti sopra indicati, quando ancora è unita al nucleo, da cui viene emessa, sotto forma di correnti di granuli o sotto forma di lunghi filamenti; ma su tale reperto, per ora, non è opportuno insistere.



Fig. 11 - Punto d'incontro dei due gameti, con la sostanza siderofila dei due individui, conformata in due dischi.

Zeiss $\frac{\text{Oc. 4} - 10 \times}{\text{Obb. imm. 1/12}}$. Piano tavolo, tubo alz. 18.

Il Gamete, che ha la sostanza siderofila localizzata nella regione ventrale, attira a sè il Gamete, che la ha localizzata nella regione apicale (fig. 12).

Mentre quello, difatti, assume, fin da principio, la sua posizione definitiva verticale, questo, nel primo momento dell'attrazione, ha posizione normale al primo (fig. 12) ed è ad esso unito soltanto con le ciglia. Successivamente, in corrispondenza della *sostanza siderofila*, posta nel lato ventrale del Gamete, si forma un mammellone (fig. 11), alla cui estremità aderisce l'estremità apicale dell'altro Gamete, che in tale punto si presenta allungata ed assottigliata, quasi fosse stata stirata per effetto della subita attrazione.

Le sostanze siderofile dei due Gameti, che così s'incontrano, hanno forma di due dischi (fig. 11), che, in seguito, si fondono, formando un corpo solo. Questo corpo ben presto si risolve in granuli o in cortissimi fili, che

(1) La localizzazione della *sostanza siderofila*, all'estremo apicale o nel lato ventrale, fu osservata in entrambi i Gameti, per cui è da ritenersi che ciascuno di essi possa indifferentemente avviarla verso l'uno o l'altro punto del protoplasma.

sono riassorbiti dal protoplasma. Quando i due individui gametici si sono strettamente uniti tra loro, mostrando una larga superficie di contatto, di tali elementi siderofili non è più alcuna traccia. (fig. 13).

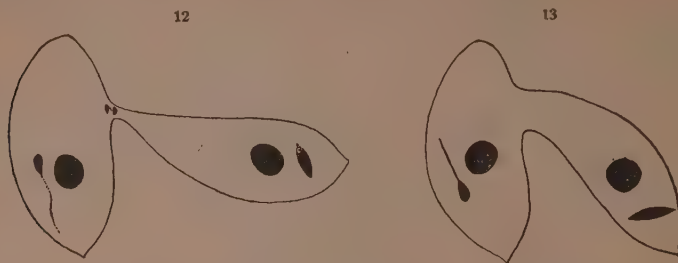


Fig. 12 - Uno dei primi stadii dell'incontro dei due gameti, con la sostanza siderofila, nel punto d'unione, costituita da due corpuscoli.

Fig. 13. - Stadio della perfetta unione, con larga superficie di contatto, in cui la sostanza siderofila è scomparsa. Di segnati i soli contorni.

L'emissione e la conseguente localizzazione di una *sostanza siderofila*, nei punti, in cui dovrà avvenire l'incontro e la fusione dei due Gameti, non si osserva nei *Gameti puri*, che compiono la *coniugazione vera* o *principale*, nè nei *Gameti impuri*, che si costituiscono dopo la 1^a divisione dei *Gametogeni impuri* e che compiono la 1^a *coniugazione accessoria*.

Nei *Gameti impuri*, formatisi con la 2^a divisione dei *Gametogeni impuri*, la loro unione, per la formazione della 2^a *coniugazione accessoria*, pare debba essere invece diretta da speciali sostanze, emesse dal micronucleo.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sull'unicità della soluzione delle equazioni integrali a limiti variabili.* Nota del Dott. ALFREDO SABBATINI presentata dal Socio VOLTERRA ⁽¹⁾.

1. Come è noto, una equazione funzionale del tipo

$$(1) \quad F \left[f \left(\xi \right)_a^b, \varphi \left(\xi \right)_{a'}^{b'}, x \right] = 0$$

è atta a definire sotto certe condizioni, la funzione $\varphi(\xi)$, come funzionale (funzione di linea) implicito della funzione $f(\xi)$ data. Il simbolo a primo membro della (1) indica un funzionale che dipende dal parametro x , e da

(1) Presentata nella seduta del 5 giugno 1925.

tutti i valori assunti dalle funzioni, $f(\xi)$ per $a \leq \xi \leq b$, e da $\varphi(\xi)$ per $a' \leq \xi \leq b'$.

Noi prendiamo in considerazione il caso in cui i limiti superiori b e b' , siano funzioni biunivoche del parametro x ; in questa ipotesi, operando una trasformazione di variabili, la equazione (1) può assumere la forma ⁽¹⁾:

$$(1') \quad F \left[f \left(\xi \right), \varphi \left(\xi \right), x \right].$$

2. Supponiamo ora che nella (1') il funzionale F , sia sviluppabile in serie di potenze integrali del tipo della serie di Taylor, e lo sviluppo si scinda in termini che dipendano dalla sola $f(\xi)$ ed in termini che dipendano dalla sola $\varphi(\xi)$, ed inoltre si abbia rispetto a $\varphi(\xi)$ il punto x come punto eccezionale, per il quale F dipenda linearmente da $\varphi(x)$ con coefficienti indipendenti da $\varphi(\xi)$. In questa ipotesi la (1') si riduce in un'equazione integrale trascendente del tipo

$$(2) \quad \psi(x) = \varphi(x) + \int_0^x F_1(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi + \\ + \int_0^x \int_0^x F_2(x, \xi_1, \xi_2) \varphi(\xi_1) \varphi(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \dots$$

che scriveremo con notazione abbreviata:

$$(2') \quad \psi(x) = \varphi(x) + \sum_{K=1}^{\infty} \int_0^{x^{(K)}} F_K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

Nel termine $\psi(x)$ sono conglobati tutti i termini non dipendenti da $\varphi(\xi)$; si può supporre sempre che i nuclei $F_2(x, \xi_1, \xi_2)$, $F_3(x, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ecc. siano simmetrici rispetto alle variabili ξ .

Se nella equazione (2) fossero nulli tutti i termini non lineari nella $\varphi(\xi)$, si ricadrebbe nell'equazione di Volterra di 1^a specie, che ammette sempre, come sappiamo, una ed una sola soluzione.

3. Nel caso generale la equazione integrale (2) riuscirà non lineare, ma di un certo grado n nella funzione incognita $\varphi(\xi)$, oppure riuscirà trascendente.

Il fatto nuovo che si presenta però sempre per queste equazioni a limiti variabili, e che le distingue da quelle a limiti costanti, sta in ciò che

(1) Il caso che noi consideriamo si presenta nei fenomeni fisici ereditari, in questo caso funge da parametro x il tempo, e due funzioni sono legate fra loro per tutti i valori del tempo compresi fra $-\infty$ e l'istante considerato t .

queste equazioni, quando ammettono una soluzione non ne ammettono che una sola; e se questa soluzione non si può dare con sviluppi in serie per valori dei nuclei e della variabile superiori a certi limiti, ciò non dipende da diramazioni come può avvenire per quelle a limiti costanti, ma soltanto da poli della soluzione stessa.

Dimostreremo ora il TEOREMA:

Ogni equazione integrale del tipo (2) e di grado n nella funzione incognita $\varphi(\xi)$, nell'ipotesi che tutti i nuclei siano finiti, se ammette soluzione, ne ammette una sola.

Dimostriamo il teorema per l'equazione quadratica

$$(3) \psi(x) = \varphi(x) + \int_0^x F_1(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^x \int_0^x F_2(x, \xi, \eta) \varphi(\xi) \varphi(\eta) d\xi d\eta,$$

ma la dimostrazione si fa nell'identico modo per un'equazione di grado qualsiasi.

Procediamo per assurdo, e supponiamo che la (3) ammetta due soluzioni distinte $\varphi_1(\xi)$ e $\varphi_2(\xi)$, ed indichiamo con $\Theta(\xi)$ la differenza $\varphi_1(\xi) - \varphi_2(\xi)$ delle due soluzioni. Sostituiamo successivamente nella (3) al posto di $\varphi(\xi)$, le funzioni $\varphi_1(\xi)$ e $\varphi_2(\xi)$, e sottraggiamo, membro a membro. Tenendo conto che:

$$\varphi_1(\xi) \varphi_1(\eta) - \varphi_2(\xi) \varphi_2(\eta) = \Theta(\xi) \varphi_1(\eta) + \Theta(\eta) \varphi_2(\xi)$$

e che il nucleo $F_2(x, \xi, \eta)$ è simmetrico rispetto alle variabili ξ ed η , troviamo:

$$(4) 0 = \Theta(x) + \int_0^x \Theta(\xi) d\xi \left\{ F_1(x, \xi) + \int_0^x F_2(x, \xi, \eta) [\varphi_1(\eta) + \varphi_2(\eta)] d\eta \right\}.$$

Abbiamo così una equazione integrale di Volterra nella $\Theta(x)$, il cui nucleo è limitato, se lo sono i nuclei F_1 ed F_2 e le funzioni $\varphi_1(\xi)$ e $\varphi_2(\xi)$ sono integrabili, e il cui termine noto è nullo, che ammetterebbe una soluzione $\Theta(x)$ non identicamente nulla, il che è assurdo. Dunque l'equazione quadratica (3) non può ammettere due soluzioni distinte.

Per una equazione integrale di grado qualsiasi della forma (2), se si fa l'ipotesi che ammetta due soluzioni distinte, si ricava ancora che un'equazione integrale di Volterra di 2ª specie il cui termine noto è nullo, avrebbe una soluzione non identicamente nulla.

4. Il teorema ora dimostrato, è vero anche per l'equazione trascendente (2), purchè si faccia qualche restrizione.

Dimostriamo così il TEOREMA:

Se l'equazione trascendente (2) ammette una soluzione $\varphi(\xi)$ per la quale la successione:

$$(5) \quad \psi_n(x) = \varphi(x) + \sum_{\mathbf{K}}^n \int_0^x F_{\mathbf{K}}(x/\xi) \varphi(\xi) d\xi$$

per $n \rightarrow \infty$ tenda uniformemente alla funzione nota $\psi(x)$, e per cui esistano le derivate funzionali primarie delle $\psi_n(x)$ rispetto a $\varphi(\xi)$ e queste tendano pure uniformemente per $n \rightarrow \infty$ verso la derivata funzionale di $\psi(x)$ rispetto a $\varphi(\xi)$, la soluzione $\varphi(\xi)$ della (2) è unica.

Nelle ipotesi del teorema ora enunciato si può dimostrare che:

TEOREMA: Le equazioni ridotte

$$(6) \quad \psi(x) = \varphi_n(x) + \sum_{\mathbf{K}}^n \int_0^x F_{\mathbf{K}}(x/\xi) \varphi_n(\xi) d\xi$$

per n convenientemente grande ammettono soluzione $\varphi_n(x)$, e queste $\varphi_n(x)$ per $n \rightarrow \infty$ tendono uniformemente verso la soluzione $\varphi(x)$ della (2).

Ora come la soluzione $\varphi_n(x)$ della (6) per quanto abbiamo visto è unica, ne segue dal teorema sopra enunciato la verità del teorema precedente.

Dimostriamo ora quest'ultimo teorema. Dico che per n convenientemente grande si può soddisfare alla (6) ponendo:

$$(7) \quad \varphi_n(x) = \varphi(x) + \varepsilon \rho_n(x)$$

in modo che sia

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$$

essendo ε un numero positivo arbitrariamente piccolo.

Infatti, supponiamo verificata la (6) da una soluzione della forma (7); sottraggiamo allora membro a membro la (5) dalla (6), otteniamo così:

$$(8) \quad \begin{aligned} \psi(x) - \psi_n(x) &= \varepsilon \rho_n(x) + \int_0^x \varepsilon \rho_n(\xi) \psi'_n(x/\xi) d\xi + \\ &+ \int_0^x \int_0^x \frac{\varepsilon^2}{2} \rho_n(\xi) \rho_n(\eta) \psi''_n(x/\xi\eta) d\xi d\eta + \dots \end{aligned}$$

Ma per l'ipotesi che abbiamo fatto, dato un numero positivo arbitrario η , si può scegliere un numero intero N in modo, che per $n \geq N$ sia

$$|\psi(x) - \psi_n(x)| < \eta$$

per tutti i valori di x per cui è definita la $\varphi(x)$ che soddisfa la (2), poniamo dunque:

$$\psi(x) - \psi_n(x) = \eta R_n(x)$$

e scriviamo la (8) così:

$$(8') \quad \eta R_n(x) = \varepsilon \rho_n(x) + \int_0^x \varepsilon \rho_n(\xi) \psi'_n(x/\xi) d\xi + \\ + \int_0^x \int_0^x \frac{\varepsilon^2}{2} \rho_n(\xi) \rho_n(\eta) \psi''_n(x/\xi\eta) d\xi d\eta + \dots$$

Questa equazione che non ammette più di una soluzione in $\varepsilon \rho_n(x)$, è soddisfatta dai valori, $\varepsilon = 0, \eta = 0$. Per mezzo di essa si può calcolare $\varepsilon \rho_n(x)$ cercando con procedimento già seguito dal Prof. Volterra ⁽¹⁾ le derivate successive di $\varepsilon \rho_n(x)$ rispetto ad η per $\eta = 0$, e scrivendo quindi una serie di Taylor ordinaria nella η .

Ciò non richiede che risoluzioni successive di equazioni integrali lineari, cioè equazioni di Volterra di 2^a specie.

Ora nelle ipotesi nostre, si vede che si può rendere ε arbitrariamente piccolo, purchè si scelga η pure convenientemente piccolo, e certamente allora la serie di Taylor nella η converge; ciò seguirebbe anche dalla considerazione di un teorema di Schmidt, relativo alla soluzione di equazioni integrali non lineari ⁽²⁾.

Il teorema di unicità di soluzione per l'equazione trascendente (2) resta così provato.

5. In base al teorema di unicità ora dimostrato si dimostra il seguente più generale:

TEOREMA: *L'equazione funzionale (1') nella incognita funzione $\varphi(\xi)$, quando il funzionale F sia sviluppabile in serie di potenze integrali rispetto a $\varphi(\xi)$, con nuclei finiti, ed abbia come solo punto eccezionale il punto x che dia luogo ad una espressione lineare in $\varphi(x)$ con coefficienti indipendenti da $\varphi(\xi)$, ammette nella $\varphi(\xi)$ una soluzione o nessuna.*

Nel caso che si abbia una equazione funzionale (1') in cui il funzionale F sia ancora sviluppabile in serie di integrali nella $\varphi(\xi)$, ma non ammetta il punto eccezionale x , ci si può tuttavia in certi casi ridurre nelle

(1) *Sur le fonctions qui dépendent d'autres fonctions.* «Comptes Rendus» (1906) Tom. 142, pp. 694-695.

(2) E. SCHMIDT, *Zur Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen*, «Math. Ann.», Band 65 (1908) pp. 370-399.

condizioni dell'ultimo teorema, derivando una volta rispetto ad x il primo membro della (1'). Si avrà così l'equazione seguente:

$$(9) \quad F_1 \left[f \left(\xi_0^x \right), \varphi \left(\xi_0^x \right), f(x), x \right] + \varphi(x) F'_\varphi \left[f \left(\xi_0^x \right), \varphi \left(\xi_0^x \right) / x, x \right] + \\ + \Phi \left[f \left(\xi_0^x \right), \varphi \left(\xi_0^x \right), x \right] = 0$$

dove

$$F_1 \left[f \left(\xi_0^x \right), \varphi \left(\xi_0^x \right), f(x), x \right] = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} F \left[f \left(\xi_0^x \right), \varphi \left(\xi_0^y \right), y \right] \right\}_{y=x}$$

e

$$\Phi \left[f \left(\xi_0^x \right), \varphi \left(\xi_0^x \right), x \right] = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} F \left[f \left(\xi_0^y \right), \varphi \left(\xi_0^y \right), x \right] \right\}_{y=x}$$

Ora nel caso che $F'_\varphi \neq 0$ per il valore considerato della funzione nota $f(\xi)$, e per tutti i valori di $\varphi(\xi)$, si può dividere il primo membro della (9) per questo funzionale, e i termini che si ottengono saranno ancora sviluppabili in serie di integrali nella $\varphi(\xi)$. In tutto il campo funzionale in cui la serie che si ottiene sarà uniformemente convergente, si avrà per $\varphi(\xi)$ una sola soluzione che soddisfa la (1'). Ma questo campo funzionale sarà in generale più ristretto del campo funzionale di tutte le $\varphi(\xi)$ integrabili entro cui possono cadere soluzioni della (1'); ed in questo caso si potranno bene avere più soluzioni della equazione stessa.

Matematica. — *Sur une propriété générale des équations différentielles (un théorème de M. Ernesto Pascal).* Nota di LUBOMIR TCHACALOFF, presentata dal Socio ERNESTO PASCAL ⁽¹⁾.

Les équations différentielles linéaires du premier ordre et celles de Riccati jouissent de la propriété caractéristique suivante: il existe une certaine fonction de trois ou de quatre variables qui se réduit à une constante, lorsqu'on remplace les variables par des intégrales particulières de l'équation. La connaissance d'une telle fonction est d'une grande importance, parce qu'elle permet de ramener le problème d'intégration de l'équation différentielle à la recherche d'un certain nombre d'intégrales particulières. Il est bien naturel de poser la question d'une façon générale en demandant, quelle est la classe la plus étendue d'équations différentielles du premier ordre

(1) Presentata nella seduta del 5 giugno 1925.

jouissant de la même propriété, c. à. d., quelle doit être la forme la plus générale d'une telle équation pour qu'il existe une fonction des $n + 1$ variables y, y_1, \dots, y_n , qui devient constante lorsqu'on remplace les variables par des intégrales particulières quelconques? Dans son mémoire⁽¹⁾ *Sulle equazioni di Riccati* M. Ernesto Pascal étudie deux cas particuliers importants de ce problème. Il y considère l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \sum_{(k)} A_k(x) f_k(y),$$

dont le second membre représente la somme de deux ou de trois termes de la forme $A(x) \cdot f(y)$, et démontre que les seules équations du type précédent, qui possèdent la propriété en question, sont les équations linéaires ordinaires, celles de Riccati et leurs transformées. En étudiant ce mémoire, j'ai remarqué tout récemment⁽²⁾ que les résultats obtenus par M. Pascal restent encore vrais, sans qu'il soit nécessaire de faire une hypothèse spéciale sur la forme de la fonction figurant au second membre de l'équation différentielle. Au contraire, la forme spéciale de cette fonction est une conséquence de l'autre hypothèse, d'après laquelle il existe une certaine fonction de trois ou de quatre intégrales particulières, qui se réduit à une constante. Cette remarque montre que la classe d'équations différentielles, étudiée par M. Pascal dans son mémoire, est la plus étendue possible.

En poursuivant mes recherches sur le même sujet, j'ai réussi à démontrer un théorème général, qui confirme et généralise une présomption de M. Pascal, énoncée pour les équations différentielles de la forme (1) dans le mémoire déjà cité. Ce théorème, qui nous donne la réponse complète à la question générale, posée plus haut, peut être formulé ainsi:

THÉORÈME. *Étant donnée une équation différentielle du premier ordre*

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

s'il existe une fonction (non constante) $u(y, y_1, \dots, y_n)$, qui se réduit à une constante lorsqu'on y remplace les variables y, y_1, \dots, y_n par $n + 1$ intégrales particulières quelconques, l'équation (2) peut être ramenée par une substitution de la forme $y = \varphi(\tau)$ à une équation linéaire ou à une équation de Riccati.

Ici je me bornerai à donner de brèves indications sur la démonstration.

(1) « Atti della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli », vol. XVII, serie 2^a, n. 3 (1924).

(2) *Sur un théorème de M. Ernesto Pascal*, « Rendiconti della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli », Adunanza del di 9 maggio 1925.

Différentions l'équation

$$u(y, y_1, \dots, y_n) = \text{const.},$$

après y avoir remplacé y, y_1, \dots, y_n par des intégrales particulières de (2); on obtient, en tenant compte des équations

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad \frac{dy_1}{dx} = f(x, y_1), \dots,$$

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial y} f(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y_1} f(x, y_1) + \dots + \frac{\partial u}{\partial y_n} f(x, y_n) = 0,$$

et cette relation doit être une identité par rapport aux $n + 2$ variables x, y, y_1, \dots, y_n , parce que les valeurs initiales de la variable x et des intégrales particulières peuvent être choisies arbitrairement. Elle nous montre d'ailleurs que la fonction $f(x, y)$ a nécessairement la forme

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^q A_k(x) f_k(y),$$

le nombre q des termes du second membre étant au plus égal à n et les facteurs A_k et f_k ne dépendant que de x et de y respectivement. Nous pouvons supposer que les q fonctions $A_k(x)$ soient linéairement indépendantes. La relation (3) est alors équivalente aux q équations

$$f_k(y) \frac{\partial u}{\partial y} + f_k(y_1) \frac{\partial u}{\partial y_1} + \dots + f_k(y_n) \frac{\partial u}{\partial y_n} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, q).$$

Supposons qu'une des fonctions $f_k(y)$, par exemple $f_1(y)$ soit égale à 1, ce qui est toujours permis, le cas général pouvant se ramener à ce cas spécial par le changement de variable $\zeta = \int \frac{dy}{f_1(y)}$ dans l'équation (2).

Je considère ensuite l'ensemble (E) des fonctions $g(y)$, satisfaisant à l'équation

$$g(y) \frac{\partial u}{\partial y} + g(y_1) \frac{\partial u}{\partial y_1} + \dots + g(y_n) \frac{\partial u}{\partial y_n} = 0$$

et je démontre qu'il n'y a que deux possibilités:

I. Toutes les fonctions de l'ensemble (E) sont des polynômes tout au plus du second degré;

II. Toutes les fonctions de (E) ont la forme

$$g(y) = A e^{\lambda y} + B + C e^{-\lambda y},$$

où A, B, C, λ sont des constantes, dont la dernière reste la même pour les différentes fonctions de (E) . Les q fonctions $f_k(y)$ appartenant à (E) , l'équation différentielle donnée doit avoir nécessairement une des formes

$$a) \quad \frac{dy}{dx} = P + Qy + Ry^2 \quad \text{ou} \quad b) \quad \frac{dy}{dx} = P e^{-\lambda y} + Q + R e^{\lambda y},$$

P, Q et R désignant des fonctions de la variable x . Il s'en suit l'exactitude du théorème énoncé, puisque l'équation $b)$ peut être ramenée à une équation de la forme $a)$ par la substitution $\gamma = e^{\lambda y}$.

Meccanica. — *Sui moti di un liquido che lasciano inalterata la distribuzione locale delle pressioni.* Nota di B. CALDONAZZO, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI ⁽¹⁾.

I moti dei liquidi perfetti che lasciano inalterata la distribuzione locale delle pressioni sono così caratterizzati: le traiettorie delle particelle costituiscono una congruenza solenoidale rettilinea e su ciascuna retta la velocità ha un valore costante, che si può assegnare ad arbitrio. Il Cisotti, che ha fatto questo studio, ha pure caratterizzato geometricamente le congruenze rettilinee solenoidali: assunta ad arbitrio, nello spazio, una linea si prenda a considerare il fascio dei suoi piani osculatori e sopra ciascuno di essi il sistema delle parallele alla rispettiva tangente. Un così fatto sistema di rette costituisce una congruenza rettilinea solenoidale e qualsiasi congruenza rettilinea solenoidale si può riguardare così generata ⁽²⁾.

In questa Nota metto in rilievo, sotto veste geometrica, alcune altre proprietà di questi moti, servendomi del metodo vettoriale, come ho avuto occasione di fare in un recente lavoro ⁽³⁾.

Le superficie di Bernoulli, quando esistono, le superficie cioè che sono insieme di flusso e vorticoso, oltre che rigate come è manifesto, sono superficie *isotachie*. Di esse posso assegnare la curvatura media e totale mediante il valore della velocità, assegnato ad arbitrio quale funzione delle rette della congruenza rettilinea solenoidale.

(1) Presentata nella seduta del 21 giugno 1925.

(2) U. CISOTTI, *Sopra le congruenze rettilinee solenoidali*, questi « Rend. », vol. XIX, (1910), pp. 325-329; *Moti di un liquido che lasciano inalterata la distribuzione locale delle pressioni*, questi « Rend. », vol. XIX, (1910), pp. 373-376. Cfr. F. SEVERI, *Sulle congruenze solenoidali*, « Atti del R. Ist. Veneto » t. LXXI, parte seconda, (1912), pp. 766-774.

(3) B. CALDONAZZO, *Sulla geometria differenziale di superficie aventi interesse idrodinamico*, questi « Rend. », vol. XXXIII, (1924), pp. 396-400. Citerò questa Nota brevemente con C.

Porto poi esempi in cui un tale valore è strettamente legato alla natura della congruenza stessa.

Se la congruenza è *normale*, cioè se le linee di flusso ammettono un sistema di superficie ortogonali, queste superficie sono piani paralleli tra loro e quindi le rette della congruenza sono pure parallele tra loro.

Se la congruenza non è normale, il moto risulta *elicoidale* (moto di Beltrami) quando la velocità ha dovunque lo stesso valore ed in questo caso soltanto.

1. Nei moti liquidi che lasciano inalterata la distribuzione locale delle pressioni il vettore velocità è

$$(1) \quad \mathbf{v} = v \mathbf{t},$$

dove \mathbf{t} è un vettore unitario funzione dei punti dello spazio, solenoidale e che non varia lungo la propria retta d'azione:

$$(2) \quad \mathbf{t}^2 = 1, \quad \operatorname{div} \mathbf{t} = 0, \quad \frac{d\mathbf{t}}{dP} \mathbf{t} = 0.$$

È inoltre v costante lungo la retta d'azione di ogni \mathbf{t} :

$$(3) \quad \mathbf{t} \times \operatorname{grad} v = 0.$$

Per la prima e l'ultima delle (2) risulta⁽¹⁾

$$(4) \quad \mathbf{t} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{t} = 0,$$

vale a dire il $\operatorname{rot} \mathbf{t}$ è nullo oppure è parallelo a \mathbf{t} .

L'omografia

$$\sigma = \frac{d\mathbf{t}}{dP}$$

per le (2) è dotata delle seguenti proprietà (A. V. G. I., 37, [2] e 47, [1]).

$$(5) \quad \mathbf{t} \times \sigma \mathbf{a} = 0, \quad I_1 \sigma = 0, \quad I_2 \sigma = 0,$$

essendo \mathbf{a} un vettore qualsiasi.

Dalla (1) si ha poi (A. V. G. I., 41, 2)

$$(6) \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = v \operatorname{rot} \mathbf{t} - \operatorname{grad} v \wedge \mathbf{t}.$$

(1) C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Analyse vectorielle générale*, vol. I, 47. In seguito citerò questo trattato brevemente con A. V. G. I.

2. Supponiamo che la distribuzione della velocità sulle rette della congruenza sia tale che risulti individuato e diverso da zero il vettore

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{v};$$

allora le linee d'azione di \mathbf{w} ammettono un sistema di superficie normali, le superficie di Bernoulli⁽¹⁾. Nel caso attuale per le (1), (4) e (6) risulta

$$\mathbf{w} = v \text{ grad } v^{(2)}.$$

Per l'esistenza di \mathbf{w} basterà quindi che esista il gradiente di v . In tale ipotesi dalla precedente segue che le superficie di Bernoulli sono individuate dall'equazione

$$v = \text{costante};$$

esse sono quindi le superficie rigate costituite dalle rette della congruenza sulle quali la velocità ha lo stesso valore, oltre che il verso del vettore \mathbf{t} su ciascuna retta.

Scelto quale vettore unitario \mathbf{N} normale a queste superficie

$$\mathbf{N} = \frac{\text{grad } v}{u}, \quad (u = \text{mod grad } v),$$

la curvatura media in un punto P della superficie passante per P è (C. (5) e A. V. G. I., 41 [2])

$$\text{div } \mathbf{N} = \frac{\Delta_2 v}{u} - \frac{1}{u^2} \text{grad } v \times \text{grad } u.$$

La curvatura totale è (C. (6) e A. V. G. I., 47, [1])

$$I_2 \frac{d\mathbf{N}}{dP} = \frac{1}{u^2} \left\{ (\Delta_2 v)^2 + \Delta_2 v \text{grad } v \times \text{grad } \log \left(\frac{\Delta_2 v}{u^2} \right) + (\text{grad } u)^2 - u \Delta_2 u \right\}.$$

In queste espressioni, che si semplificano notevolmente quando v è funzione armonica ($\Delta_2 v = 0$), la v che vi interviene deve soddisfare alla (3), cioè v deve essere funzione delle rette della congruenza.

(1) Cfr. la mia nota: *Un'osservazione a proposito del teorema di Bernoulli*, « Bollettino dell'U. M. T. », Anno IV, pp. 1-3.

(2) Ciò è conseguenza immediata della condizione imposta ai moti considerati $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0$, che importa $\frac{d\mathbf{v}}{dP} = 0$, ossia la relazione ora ottenuta.

3. La (3) ora ricordata è soddisfatta in particolare per qualsiasi congruenza assumendo

$$v = f(\mathbf{a} \times \mathbf{t}),$$

dove f è simbolo di funzione scalare arbitraria ed \mathbf{a} è un vettore costante, assegnato ad arbitrio.

Infatti allora $\text{grad } v$ è proporzionale a $\text{grad}(\mathbf{a} \times \mathbf{t}) = \sigma \mathbf{a} + \mathbf{a} \wedge \text{rot } \mathbf{t}$, (A. V. G. I., 42) che per la (4) e la prima delle (5) è normale a \mathbf{t} , come è richiesto dalla (3).

Un altro esempio è dato da v funzione arbitraria di $\mathbf{t} \times \text{rot } \mathbf{t} = \omega$. Avremo in tal caso $\text{grad } v$ proporzionale ad ω . Ma ω è costante lungo ciascuna retta della congruenza. Infatti per la (4) in funzione di ω abbiamo $\text{rot } \mathbf{t} = \omega \mathbf{t}$ da cui, prendendo la divergenza, (A. V. G. I., 41), per la seconda delle (2) si ha $\mathbf{t} \times \text{grad } \omega = 0$.

4. La congruenza solenoidale rettilinea sia *normale*; deve essere perciò (C. 1) $\mathbf{t} \times \text{rot } \mathbf{t} = 0$, che per la (4) importa $\text{rot } \mathbf{t} = 0$. Ma le superficie normali hanno per curvatura media e totale rispettivamente $I_1 \sigma$ e $I_2 \sigma$. Per le ultime due delle (5) tali curvature sono entrambe nulle. Le superficie devono essere quindi piani paralleli e rette parallele tra loro sono pertanto le rette della congruenza.

5. Si supponga che la congruenza non sia costituita da rette parallele; dovrà essere $\text{rot } \mathbf{t}$ diverso da zero. Esso inoltre per la (4) è parallelo a \mathbf{t} . Dopo ciò dalla (6)

$$\text{rot } \mathbf{v} = v \text{rot } \mathbf{t} + \text{grad } v \wedge \mathbf{t}$$

segue che condizione caratteristica affinchè $\text{rot } \mathbf{v}$ risulti parallelo a \mathbf{v} , e quindi a \mathbf{t} , è che sparisca l'ultimo termine: $\text{grad } v \wedge \mathbf{t} = 0$, con v diverso da zero. Dovendo essere verificata anche la (3), ne segue che v deve essere una costante diversa da zero.

Quindi se si prende una congruenza rettilinea solenoidale qualsiasi, purchè non costituita da rette parallele, a sostegno di un moto liquido, nel quale le rette della congruenza scorrono su sè stesse con la stessa velocità, il moto che ne risulta è un moto di Beltrami ($\mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{v} = 0$). Reciprocamente ogni moto di Beltrami, in cui rimane inalterata la distribuzione delle pressioni, deve essere tale che le traiettorie costituiscono una congruenza rettilinea solenoidale e la velocità deve avere dovunque lo stesso valore.

Fisica. — *Esperienze sull'ampiezza delle oscillazioni prodotte da una lampada a tre elettrodi.* Nota di E. PERSICO, presentata dal Socio O. M. CORBINO ⁽¹⁾.

In una nota precedente ⁽²⁾ ho mostrato come si possa calcolare l'ampiezza della corrente oscillatoria che prende origine in un generatore a lampada il cui regime sia tale da poter considerare la caratteristica come composta di un tratto rettilineo orizzontale $J = 0$, un tratto rettilineo obliquo e un altro rettilineo orizzontale $J = J_s$. Si suppone cioè che non intervenga quell'abbassamento che si nota nelle caratteristiche corrispondenti a basso potenziale di placca per grandi valori del potenziale di griglia U , e che è dovuto al valore notevole assunto in queste condizioni dalla corrente di griglia. Tale ipotesi si verifica negli ordinari oscillatori, purchè il potenziale della batteria anodica non sia troppo basso, o — se questo non è — purchè alla griglia sia dato un conveniente potenziale negativo.

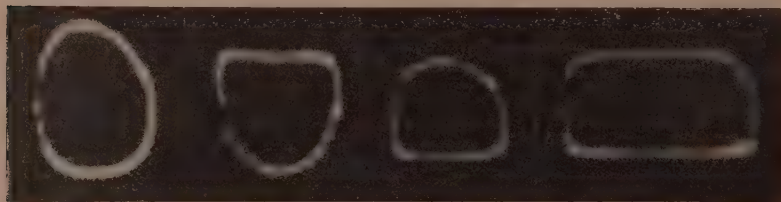


Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Il controllo e lo studio sperimentale di questo regime si fa assai comodamente per mezzo del tubo di Braun, col dispositivo descritto altrove ⁽³⁾, che fornisce un diagramma in cui sulle ascisse sono riportati i valori istantanei della corrente oscillatoria i , e sulle ordinate i valori corrispondenti della corrente di placca J .

Le fotografie riportate rappresentano tale diagramma per un oscillatore a frequenza musicale con accoppiamento magnetico: per ottenere i diversi regimi si variava la tensione anodica v_a , la tensione di griglia u_g , e una resistenza r inserita nel circuito oscillante, mentre capacità e self (e quindi il

(1) Presentata nella seduta del 21 giugno 1925.

(2) Questi « Rendiconti ».

(3) O. M. CORBINO ed E. PERSICO, questi « Rendiconti », 1° semestre 1925, pp. 358 e 412.

periodo) rimanevano costanti. Così ho ottenuto successivamente i diversi regimi considerati nella nota precedente.

Come fu già notato, finchè le oscillazioni si svolgono entro il tratto rettilineo obliquo della caratteristica, il diagramma ha la forma di un'ellisse: la fig. 1 fu ottenuta con $v_0 = 400$, $u_0 = -15$; per limitare l'ampiezza delle oscillazioni, si inserì nel circuito una resistenza addizionale di 90 ohms. Diminuendo la resistenza, l'ellisse naturalmente si dilata, restando sempre compresa fra le due rette orizzontali $J = 0$, $J = J_s$. Se $\alpha > 1/2$, il che avviene quando v_0 è grande, il primo ad essere raggiunto è il limite superiore: l'ellisse si schiaccia contro la retta $J = J_s$ e presenta l'aspetto della fig. 2 ($v_s = 400$, $u_0 = 0$, $r = 70$). Se invece $\alpha < 1/2$ l'ellisse si schiaccia inferiormente, come nella fig. 3, che è stata ottenuta diminuendo il potenziale di placca fino a 340 volta, e lasciando una resistenza addizionale di 50 ohms. Infine, diminuendo ancora la resistenza, le oscillazioni diventano così ampie che anche il limite superiore è raggiunto, e l'ellisse diviene troncata tanto al disopra quanto al disotto: si è passati dal regime della fig. 5 a quello

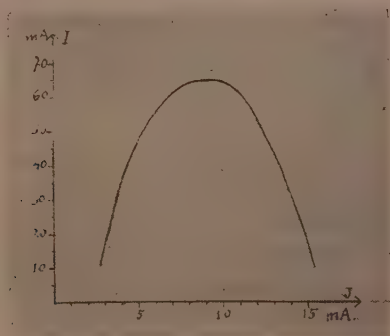


Fig. 5.

della fig. 4 lasciando tutti gli elementi inalterati e diminuendo la resistenza addizionale fino a 20 ohms. Si noti che l'ellisse completa sarebbe così grande, che la figura ha l'aspetto di un rettangolo, essendo quasi insensibile la curvatura dei lati: è questo un regime abbastanza frequente, che nella nota I ho chiamato « regime a greca »: infatti, se la J si rappresentasse prendendo per ascisse non i , ma il tempo t , si otterrebbe evidentemente, invece dell'ellisse della fig. 1, una sinusoidale, che nel caso della fig. 4 sarebbe troncata inferiormente e superiormente tanto vicino ai flessi da dare l'immagine di una greca.

La completa assenza, in tutte queste figure, di ogni depressione nella parte superiore della curva, mostra che è verificata la condizione, richiesta per le nostre considerazioni, che la corrente di griglia non sia mai tale da

deprimere sensibilmente quella di placca. Si noti incidentalmente che ad accertare questo non bastava inserire un milliamperometro nel circuito di griglia, perchè è il valore *massimo*, della corrente di griglia, e non quello medio, che deve rimanere piccolo.

Fatte queste verifiche qualitative, ho proceduto alla verifica quantitativa di una proprietà dimostrata nella nota precedente: che cioè la corrente oscillatoria assume lo stesso valore se, lasciando tutto inalterato, si cambiano u_0 e v_0 in modo che il rapporto $\alpha = J_0/J_s$ si muti in $1 - \alpha$.

Per far ciò, inserito un milliamperometro termico nel circuito oscillante, e un milliamperometro a corrente continua nel circuito di placca, variavo la tensione anodica v_0 (lasciando il potenziale medio u_0 di griglia costantemente uguale a zero). Con ciò la corrente di placca J_0 , che misuravo ogni volta facendo cessare le oscillazioni col chiudere in corto circuito la capacità⁽¹⁾, variava progressivamente da 3 a 15 mA., mentre la corrente oscillatoria dapprima cresceva, poi raggiungeva un massimo e infine diminuiva, come era da prevedersi.

Il valore efficace della corrente oscillatoria è riportato nella fig. 5 in funzione di J_0 (ossia di α); la corrente di saturazione, misurata direttamente, era di 16 mA. La curva, come si vede, è simmetrica rispetto all'asse verticale che corrisponde prossimamente a $J_0 = 8$, cioè $\alpha = 1/2$, il che conferma la previsione teorica.

Ottica cristallografica. — *Metodo per la determinazione degli indici principali di rifrazione delle sostanze birifrangenti col piatto di Fedorow*⁽²⁾. Nota di CARLO PERRIER presentata dal Socio ZAMBONINI.

La determinazione dell'indice di rifrazione delle sostanze allo stato solido mediante il microscopio fu proposta già in svariati modi, ma l'unico metodo che abbia dato risultati veramente buoni e che sia entrato nella pratica microscopica corrente, è solamente quello fondato sulla scomparsa della « linea di Becke »⁽³⁾.

Il metodo ha una sufficiente esattezza per gli scopi che deve raggiungere, e non è difficile, per un occhio un po' esercitato, di ottenere un'ap-

(1) L' innesco delle oscillazioni aumentava la corrente media di placca nelle condizioni corrispondenti al ramo ascendente della curva ($\alpha < 1/2$) e la diminuiva nell'altro, come è già noto, e come si può facilmente prevedere dalla teoria.

(2) Lavoro eseguito nel laboratorio chimico-petrografico del R. Ufficio Geologico. Presentato nella seduta del 5 giugno 1925.

(3) FR BECKE, *Ueber die Bestimmbarkeit d. Gesteinsengtheile auf Grund ihres Lichtbrechungsvermögen*, « Abh. d. k. k. Akad. d. Wiss. », Wien 1893.

prossimazione di 1 od al massimo 2 unità della terza cifra decimale. Esso presenta, però, l'inconveniente, che la preparazione di un liquido, che abbia lo stesso indice di rifrazione del solido che si esamina, è sempre alquanto noiosa, dato che si deve procedere a tastoni, non potendosi mai prevedere con esattezza l'indice di rifrazione che si viene ad ottenere con la mescolanza dei due liquidi, in quanto che troppo piccole sono le masse con cui si opera.

Pochi anni dopo la comparsa della citata memoria di Becke, Viola⁽¹⁾ asserì essere possibile determinare l'indice di rifrazione di un minerale in contatto con un altro o con un liquido, determinando quale è l'ampiezza dell'apertura del diaframma ad iride, posto sopra o sotto il polarizzatore, quando si incomincia a vedere comparire la caratteristica linea di Becke.

Il calcolo verrebbe fatto in base alla formula:

$$n_2 - n_1 = K D^2$$

dove n_2 e n_1 sono gli indici di rifrazione dei due mezzi (uno dei quali, naturalmente, noto), D il raggio dell'apertura del diaframma ad iride al momento della osservazione, e K una costante da determinarsi una volta per tutte, impiegando dei mezzi ad indice di rifrazione noto.

Viola dà alcuni esempi a conferma delle sue espressioni matematiche, ma non mi consta che il suo metodo abbia avuto, fino ad ora, applicazioni nella pratica; posso piuttosto affermare, che quanti in questo ufficio tentarono di applicarlo, non ebbero mai risultati incoraggianti.

Credo, quindi, che a questo metodo, che avrebbe potuto servire, se attuabile, ad eliminare, ed in modo assai semplice, l'inconveniente della preparazione del liquido ad indice di rifrazione identico a quello del solido, non si possa, purtroppo, annettere altro che un puro valore teorico.

Recentemente Panichi⁽²⁾ ha cercato di eliminare il lamentato inconveniente facendo avvenire sullo stesso portaoggetti le opportune variazioni di composizione del liquido e determinando, poi, l'indice di rifrazione di questo, non appena esso raggiugliava quello del minerale.

La proposta può essere, certamente, utile; è appena, però, necessario ricordare, che avvenendo il fenomeno della riflessione totale, cui è dovuta la comparsa della linea di Becke, alla superficie di contatto tra il minerale ed il velo di liquido che immediatamente lo contorna, non si è sempre ben sicuri che questo velo segua esattamente le variazioni di composizione del

(1) C. VIOLA, *Ueber eine neue Methode z. Best. d. Brechungsvermögen d. Mineralien i. d. Dünnschliffen*, «T. M. P. M.» 14 (1895) 554.

Id. id. *Metodo per determinare l'indice di rifrazione della luce di un minerale nelle lamine sottili*, «Rend. Accad. Lincei» [5^a] V, 2 (1895) 212.

(2) U. PANICHI. *Ricerche petrografiche sul Vulcano di Roccamonfina*. «Rend. Accad. Lincei» [5^a], XXVIII (2) (1919) 193.

rimanente del liquido, e che, quindi, l'indice di rifrazione di questo corrisponda esattamente a quello del velò, cioè a quello del minerale.

Migliore è certamente il metodo proposto recentemente da Merwin [« J. am. Ch. Soc. », XLIV (1922), 1970].

Comunque, però, si operi, con questo mezzo, si potrà determinare l'indice di rifrazione solamente delle sostanze monorifrangenti, chè, per le sostanze birifrangenti, la determinazione degli indici principali sarà possibile solo, se ci si trova in alcune particolari condizioni. Così in una sostanza uniassica si potranno determinare ω ed ϵ solo se si hanno delle lastrine tagliate parallelamente all'asse verticale, mentre, ad es., coi romboedri di sfaldatura della calcite, si potrà avere ancora ω , ma invece di ϵ si avrà un valore ϵ_1 , compreso tra ω ed ϵ .

In peggiori condizioni ci si troverà, naturalmente, nel caso delle sostanze biassiche, dove per conoscere α , β , e γ sarà necessario di determinare l'indice di rifrazione di due lastrine tagliate parallelamente a due dei piani di simmetria dell'indicatrice.

Ora, il realizzarsi di questa condizione, non è cosa molto frequente, perchè i piani di sfaldatura, che specialmente ci servono per avere laminucce di osservazione, raramente si presentano nelle condizioni richieste, e quindi gl'indici determinati non saranno mai quelli principali, ma bensì α_1 , β_1 , γ_1 .

Ho pensato che col piatto di Fedorow si potessero invece eliminare gli inconvenienti lamentati, appunto perchè con esso, dati i diversi movimenti che si possono fare eseguire alla lastrina, è sempre possibile di portare in posizione opportuna una sezione principale ottica.

Veramente l'impiego del piatto di Fedorow per la determinazione dell'indice di rifrazione dei minerali è stato già anche da altri tentato. Così il Nikitin⁽¹⁾ ha proposto di determinare l'indice di rifrazione di un minerale osservando il momento in cui si produce la riflessione totale interna sulle fenditure della preparazione.

Il metodo è certamente assai ingegnoso, ma la formula da impiegarsi nel calcolo risulta alquanto complicata. Vero è che un'opportuna tabella dà il modo di risolvere graficamente il problema, ma, ad ogni modo, essa vale solo nella supposizione che il materiale che riempie le fenditure sia balsamo del Canada, e, d'altra parte, il metodo non è scevro di inconvenienti.

Comunque, accortamente impiegato, esso può rendere già degli ottimi servizi.

Un altro metodo, non meno ingegnoso del precedente ma fondato su un principio completamente diverso, è quello proposto recentissimamente da Berek⁽²⁾ secondo il quale l'indice di rifrazione può essere calcolato in fun-

(1) W.-W. NIKITIN, *La méthode universelle de Fedorow*. Trad. francese di L. DUPARC e VÉRA DE DERVIES. Ginevra, 1914, vol. I, pag. 214.

(2) M. BERK, *Mikr. Mineralbestimmungen m. Hilfe d. Universalrechtlichmethoden*. Berlin. Borntraeger 1924, p. 108.

zione delle birifrangenze determinate in un piano normale ad uno dei piani di simmetria ottica. Secondo Berek, nel caso ad es. di un'onfacite, si può raggiungere un'esattezza di circa 3 unità della terza cifra decimale, ma nel caso di sostanze con birifrangenza più bassa, come ad es. i plagioclasti, non pare che il metodo possa essere più impiegabile.

Ad ogni modo, sia col metodo di Nikitin che col metodo di Berek, si possono già avere delle utili indicazioni sull'indice di rifrazione medio di una sostanza, ma, però, anche essi non ci potranno mai dare gl'indici principali.

Ho pensato, come dissi, che fosse possibile col piatto di Fedorow arrivare alla determinazione anche di questi, e dei primi, lusinghieri risultati avuti, do ora una notizia preliminare, in attesa di sviluppare più a fondo il metodo, non appena avrò meglio sistemato le lievi modificazioni necessarie nell'apparecchiatura microscopica.

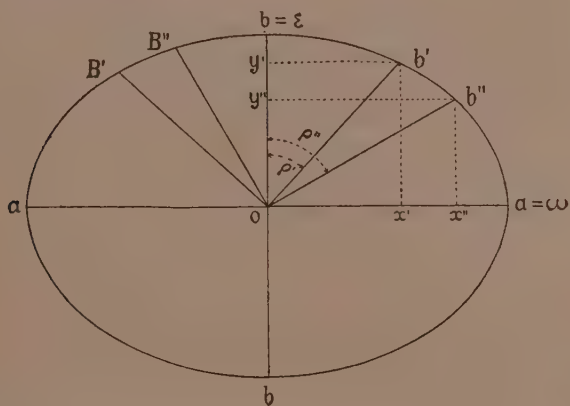


Fig. 1.

Il metodo, applicabile in teoria a tutte le sostanze birifrangenti, uniasiche e biassiche, è, nel suo principio informatore, assai semplice, tanto semplice che è assai strano come esso non sia stato già prima proposto.

Consideriamo l'indicatrice ottica ad es. di una sostanza uniaassica, come la calcite e di cui la fig. 1 rappresenta una sezione principale ottica. Lungo l'asse bb si propaga un raggio, di cui la velocità della normale all'onda è rappresentata da Oa , semiasse maggiore dell'ellisse: una determinazione dell'indice di rifrazione di questo raggio ci darebbe, come è ben noto, ω . Se ora consideriamo una lastrina che sia tagliata parallelamente all'asse ottico e determiniamo l'indice di rifrazione del raggio che vibra parallelamente all'asse ottico bb , e di cui la velocità normale è rappresentata da Ob , noi avremo, evidentemente, ϵ .

Se consideriamo, invece, due lastre tagliate normalmente a OB' e OB'' e determiniamo l'indice di rifrazione dei rispettivi raggi straordinari, i valori risultanti saranno dati naturalmente da Ob_1 e Ob_{11} :

È evidente che se si conoscono le distanze polari ρ_1 e ρ_{11} dei rispettivi raggi vettori b_1 e b_{11} da Ob , si potranno calcolare i corrispondenti valori x ed y , e, quindi, applicando l'equazione dell'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

calcolare i valori dei due semiassi Oa ed Ob , cioè ω ed ε .

Perciò se noi prendiamo un liquido che abbia un indice di rifrazione compreso tra ω ed ε , vi immergiamo, ad es., un frammentino di sfaldatura di calcite, e, postici in una sezione principale ottica, facciamo ruotare la lastrina intorno ad un'asse normale a questa sezione (cosa questa assai agevole mediante il piatto di Fedorow) arriverà sicuramente un momento in cui l'indice di rifrazione della lastrina raggiuglierà quello del liquido, cioè Ob_1 e quindi la linea di Becke dovrà scomparire. Si fissa questa posizione, si determina la corrispondente distanza polare ρ_1 e si ripete l'operazione per un altro liquido ad indice di rifrazione Ob_{11} ; si avrà così una nuova distanza polare ρ_{11} .

Avremo quindi la seguente coppia di valori;

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{x_{11}^2}{a^2} + \frac{y_{11}^2}{b^2} = 1$$

da cui si potranno ricavare i valori di a e b , che saranno dati rispettivamente dalle formule:

$$(1) \quad a^2 = x_1^2 + y_1^2 \frac{x_1^2 - x_{11}^2}{y_{11}^2 - y_1^2}$$

$$(2) \quad b^2 = y_1^2 + x_1^2 \frac{y_{11}^2 - y_1^2}{x_{11}^2 - x_1^2}$$

È evidente che questo metodo può prestarsi egualmente bene per la determinazione degli indici di rifrazione delle sostanze biassiche, bastando eseguire la determinazione nei piani di simmetria dell'elissoide, facendo naturalmente due coppie di misure per ciascuno dei due piani scelti, tanto più che ogni preparazione potrà servire per due determinazioni. Dei 4 valori ricavati, corrispondenti ad α , β , γ , due saranno coincidenti, e ciò servirà, anche, come controllo dell'operazione.

Essendo l'indice di rifrazione del liquido, cioè il segmento Ob_n , determinabile con tutta sicurezza, l'esattezza dei risultati dipenderà essenzialmente dall'esattezza con cui si può determinare φ_n , e questo dipende da due fattori: 1) esattezza con cui si può determinare la posizione di Ob ; 2) esattezza con cui si può determinare la posizione di Ob_n .

Per la prima s'impiegheranno tutti gli accorgimenti e relative correzioni che insegna la tecnica del piatto di Fedorow; per la seconda occorrerà mettersi nelle condizioni migliori per ben eseguire il metodo dell'immersione, che verrà fatta o col classico sistema dell'innalzamento e dell'abbassamento del tubo, o col metodo di Schroeder v. der Kolk, ecc. (1).

Per la determinazione della direzione Ob_n esiste ancora una causa di errore, dipendente dal fatto che nella lastrina del cristallo la direzione dei raggi non è esattamente quella data dal tamburo, in quanto che i segmenti sferici non possono avere, in generale, lo stesso indice di rifrazione del minerale nella direzione considerata. Essendo però in questo caso l'indice di rifrazione del minerale noto, cioè quello del liquido inglobante, si potrà portare assai facilmente la correzione necessaria.

Per quanto si riferisce all'influenza che l'indice di rifrazione dei segmenti sferici può esercitare sull'osservazione dei fenomeni d'immersione, riferirò nella nota principale, non avendo, per il momento, elementi sufficienti per farlo; certo è che in uno dei due casi da me sperimentati, calcite spatica e segmenti con $N_s = 1.649$ ed impiegando l'obiettivo n. 2 di Leitz, bastava una rotazione del tamburo, anche solo di $1/10$ di grado, per poter osservare nettamente l'inversione del fenomeno della linea di Becke.

PARTE SPERIMENTALE.

L'esperienza fu eseguita molto semplicemente, facendo le stesse operazioni che si sarebbero fatte lavorando normalmente col piatto di Fedorow. Venne impiegata calcite spatica pura, polverizzata quel tanto che si mostrò necessario per avere dei frammenti adatti, e questi vennero inclusi in liquidi ad indice di rifrazione determinato e compreso tra ω ed ϵ della calcite.

I liquidi impiegati furono:

anilina con $n = 1.576$ (per la luce del sodio).

essenza di garofani con $n = 1.530$ (pure per la luce del sodio).

Le osservazioni vennero fatte in luce monocromatica (luce del sodio) determinando, quale era il momento in cui scompariva il fenomeno della linea di Becke, dopo essermi posto in una sezione principale ottica.

Nella esperienza con l'anilina la posizione dell'asse ottico (corretta per segmenti con $N_s = 1.649$) faceva, come media di parecchie determinazioni, un angolo di $44^\circ 32'$ con

(1) Può darsi che per la determinazione della posizione di Ob_n possa essere adoperabile un metodo compensatore analogo a quello suggerito alcuni anni fa da PANICHI (U. PANICHI, *Sulla determinazione degli indici di rifrazione in lastrine di corpi trasparenti*. « Atti Congr. Nat. Italiani in Milano del 1906 » (15-19 settembre) pagg. 249-253; - anche estratto « Giornale di Groth », XLVI [1909] 481); per ora, però, non mi è possibile di dire nulla in proposito.

la normale alla preparazione (teorico $44^{\circ} 37'$), mentre la posizione per cui scompariva la linea di Becke faceva con questa normale un angolo di $2^{\circ} 51'$, che corretto per $n = 1.576$ diventò $2^{\circ} 59'$; sottraendolo, in questo caso, da $44^{\circ} 32'$ si ottiene $41^{\circ} 33'$, che è l'angolo che la direzione di propagazione nel minerale del raggio avente un indice di rifrazione 1.576, fa con l'asse verticale (b dell'ellisse) cioè l'angolo complementare di p_1 .

Con l'essenza di garofani si ebbe:

Posizione dell'asse ottico (corretta) uguale $44^{\circ} 27'$.

Posizione di eguale indice di rifrazione $12^{\circ} 9'$, corretta $13^{\circ} 12'$.

Questi due angoli, devono in questo caso, essere sommati e si ha così un angolo di $57^{\circ} 39'$.

Calcolando i corrispondenti valori di x ed y e sostituendoli nelle formule I) e II) ottenni i seguenti valori:

	misurato	teorico
ϵ	1.486	1.486 (per la luce del sodio)
ω	1.660	1.659 (" " " " ")

Come si vede i risultati furono più che soddisfacenti.

Ho eseguito pure una determinazione di α , β e γ in una muscovite di cui con un piccolo totalreflettometro determinai in precedenza $\alpha = 1.570$ e $\gamma = 1.600$.

Data la birifrangenza assai più bassa che nella calcite la sensibilità non poteva più essere così grande, ed è per questo che sto cercando il modo di rendere più sensibile il metodo, comunque i risultati ottenuti furono abbastanza buoni.

Ecco, del resto, i risultati avuti (i valori di p sono al solito i suoi complementari).

	1.576		1.588		Indici calcolati
	misurato	corretto	misurato	corretto	
$N_1 = 1.576$ p_1	$49^{\circ} 30'$	$47^{\circ} 0' 30''$	$31^{\circ} 28'$	$29^{\circ} 53' 20''$	$\alpha = 1.559$ $\beta = 1.596$
p_{11}	$54^{\circ} 45'$	$51^{\circ} 46' 20''$	$34^{\circ} 32'$	$33^{\circ} 2' 40''$	
					$\alpha = 1.562$ $\gamma = 1.601$

CONCLUSIONE.

Se, come spero, potrò meglio estendere e precisare il metodo dianzi schematicamente abbozzato, onde poterlo applicare pure a sostanze di birifrangenza assai più bassa come quella del quarzo ⁽¹⁾ sarà con questo metodo offerta per la prima volta la possibilità della determinazione vera e propria mediante il microscopio degli indici principali di rifrazione delle sostanze, anche in sezioni non orientate.

(1) Con una lamina di quarzo parallela all'asse ottico ho, del resto, già potuto constatare, adoperando un liquido con $n = 1.550$ circa, una inversione del fenomeno della linea di Becke al di qua o al di là di una certa inclinazione della lastrina.

Questo metodo sarebbe, poi, anche utile, perchè permetterebbe l'uso di quei vetri facilmente fusibili che si impiegano specialmente per la determinazione degli indici di rifrazione di sostanze con potere rifrangente superiore allo ioduro di metilene, senza che sia necessario preparare proprio la miscela che abbia esattamente l'indice di rifrazione uguale ad uno di quelli principali del minerale, cosa che, come è facile arguire e come è ben noto a chi di queste determinazioni ha dovuto occuparsi è, se anche possibile, sempre congiunta a notevole perdita di tempo.

Chimica-Fisica. — *Sulla statica chimica dei fenomeni elettro-nici* ⁽¹⁾. Nota di LUIGI ROLLA e GIORGIO PICCARDI presentata dal Socio GARBASSO.

1). La ionizzazione di un atomo secondo lo schema:



è stata considerata come una ordinaria reazione chimica, alla quale è applicabile la legge dell'azione di massa e la formula di Van t'Hoff.

Questa ipotesi che forma l'essenza della teoria di Meg Nad Saha ⁽²⁾, che così importanti applicazioni ha avuto in astrofisica, manca, si può dire, di una conferma sperimentale diretta che sia completamente provativa, poichè anche il King ⁽³⁾, con le sue esperienze sull'assorbimento della luce da parte dei metalli alcalino terrosi e di miscele di questi metalli con metalli alcalini, allo stato di vapore, non ne ha dato altro che una conferma puramente qualitativa.

Questo tipo di reazioni che può assumere una grande importanza in chimica ed in chimica-fisica, merita uno studio completo ed approfondito. A questo scopo abbiamo immaginato un dispositivo sperimentale adatto ad una ricerca quantitativa ed i risultati notevoli a cui siamo giunti formano l'oggetto della presente Nota e di altre che seguiranno.

2). Il principio al quale sono state informate le esperienze di cui appresso è il seguente:

In una fiamma tale da poter essere considerata come un fenomeno perfettamente stazionario, si pone un filo metallico sottile; esso arroventandosi tenderà ad emettere degli elettroni.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica-fisica della R. Università di Firenze; presentato nella seduta del 5 giugno 1925.

(2) MEG NAD SAHA, « Phil. Mag. », 40, 472, 809 (1920); 41, 267 (1921).

(3) KING, « Astrophysical Journal », 55, 380 (1922).

Se nella fiamma è contenuta una specie atomica A ed avviene la reazione: $A \rightleftharpoons A^+ + \text{elettrone}$, vi saranno contenuti anche degli ioni A^+ e degli elettroni; gli ioni passando molto vicino od urtando il metallo neutralizzeranno le loro cariche positive prendendo un elettrone al metallo stesso e si trasformeranno in atomi neutri; gli elettroni resteranno liberi nella fiamma.

Se si raccolgono questi elettroni liberi e si riconducono mediante un conduttore al filo incandescente, si otterrà una corrente elettronica continua.

L'intensità di questa corrente sarà funzione del numero di elettroni che passano nell'unità di tempo, e più precisamente, ammettendo come carica dell'elettrone il valore $e = 4,774 \cdot 10^{-10}$ unità elettrostatiche, la corrente dovuta ad un elettrone per secondo è pari a $15,84 \cdot 10^{-20}$ amp.

Il numero di elettroni per secondo è uguale al numero di ioni per secondo, perchè, nella reazione $A \rightleftharpoons A^+ + \text{elettrone}$,

$$[A^+] = [\text{el.}].$$

Poichè la concentrazione di [A] si può calcolare facilmente dal peso di sostanza volatilizzata nell'unità di tempo e dal numero di Avogadro ($6 \cdot 10^{23} = N$), si può subito calcolare con un sistema di questo genere, il coefficiente di dissociazione e la costante di equilibrio della reazione sopra scritta.

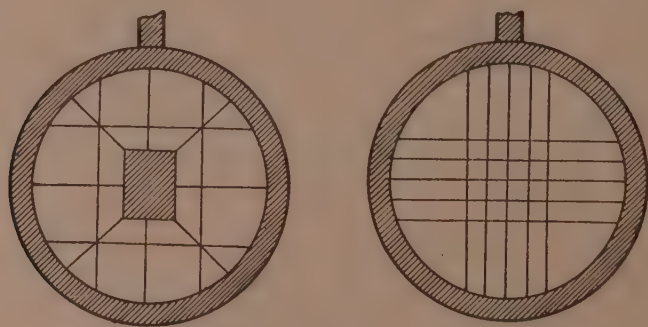


Fig. 1.

3). Sono stati sperimentati vari sistemi per raccogliere una tale corrente nella fiamma, usando elettrodi piani di lamina od in filo, a spirale o ad elica cilindrica, verticali od orizzontali, paralleli o coassiali, ma tutti con risultati molto mutevoli.

Il dispositivo che invece dà risultati assolutamente costanti, anche per forme e dimensioni diverse dell'apparecchio, è quello che ha per generatore di elettroni una rete di filo sottile ed, al disopra di esso, per raccoglitore, una lamina.

Nell'apparecchio usato, il generatore di elettroni è una semplice rete di filo di platino di 0,1 mm. di diametro, a maglie di 5 mm. di lato, circa; il raccogliatore è una lamina pure di platino di mm. 15×20 tenuta in sesto da fili di platino radiali e contornata da altri fili formanti un ampio reticolo (fig. 1). I capi dei fili della lamina e della rete sono tenuti fra grossi anelli di ottone, muniti di serrafile e montati su di un sostegno isolante.

Fra i serrafile è inserito un galvanometro a specchio di 160 ohm di resistenza interna, che, a due metri di distanza, dà una deviazione di un cm. per una corrente di $2,475 \cdot 10^{-7}$ amp.

La temperatura della fiamma è misurata termoelettricamente.

L'esperienza viene condotta in questo modo:

Messo a zero il galvanometro, si introduce la fiamma nelle reti e si nota la corrente, del resto piccolissima, in genere dell'ordine del 10^{-8} amp., prodotta dalla fiamma sola.

Introdotta alla base della fiamma una perla del sale del metallo in esame, accuratamente pesata, si nota la corrente che si produce in ogni istante. (Sono in corso esperienze per utilizzare un apparecchio oscillografico di grande sensibilità che può dare un diagramma corrente-tempo assolutamente perfetto; per altro per sali che volatilizzano regolarmente, si possono con facilità registrare a mano tutte le eventuali variazioni).

Ottenuto il diagramma, lo si integra graficamente e lo si riduce ad una base eguale al tempo che è durata l'esperienza, ottenendo così la corrente media totale. Detraendo dalla corrente media totale la corrente dovuta alla fiamma sola si ottiene la corrente dovuta al metallo e quindi il numero medio di elettroni, dovuti alla ionizzazione del metallo stesso, che traversano l'apparecchio nell'unità di tempo.

Dalla perdita in peso della perla si ricava d'altra parte il numero medio di atomi metallici che attraversano l'apparecchio in un secondo, e conoscendo allora $[A]$, $[A^+]$ ed $[el.]$ si ottiene immediatamente

$$X = \% \text{ dissociazione} = 100 \frac{[A^+]}{[A]}$$

e

$$K = \text{costante di equilibrio} = \frac{[A^+][el.]}{[A]}$$

Chimica. — *β -fenil-cumarine*. Nota ⁽¹⁾ di G. BARGELLINI, presentata dal Corrisp. N. PARRAVANO.

Con lo scopo di imparare a conoscere qualche metodo adatto per la preparazione delle β -fenil-cumarine, pubblicai nel 1911 due Note ⁽²⁾, in una delle quali descrissi alcuni composti di questo tipo preparati condensando diversi o-ossi-benzofenoni con anidride acetica ed acetato sodico: nell'altra descrissi le esperienze fatte per preparare le β -fenil-cumarine condensando i nitrili degli acidi benzoil-acetici con diversi fenoli.

Nel 1918 Sonn ⁽³⁾ cominciando ad occuparsi dello stesso argomento, notò che la reazione con la quale io avevo preparato alcune β -fenil-cumarine dai nitrili degli acidi benzoil-acetici, presentava molta somiglianza con la reazione che qualche anno prima aveva descritta E. v. Meyer ⁽⁴⁾ consistente nel far agire i dinitrili (p. es. il benzoaceto-dinitrile) sui fenoli in presenza di acido cloridrico gassoso: questi dinitrili, come è noto, già per azione degli acidi diluiti a freddo si trasformano nei nitrili degli acidi benzoil-acetici.

Sonn mostrò nella sua nota che i composti che in questo modo si ottengono non sono flavoni, come E. v. Meyer credeva, ma sono β -fenil-cumarine, come io avevo dimostrato.

Ripetendo in questa occasione le esperienze di E. v. Meyer e le esperienze mie, Sonn ebbe occasione di constatare che l'acido cloridrico gassoso agisce come condensante meglio del cloruro di zinco e meglio dell'acido solforico al 73 % che io avevo impiegati nelle mie esperienze. Mentre infatti dal cian-aceto-anisolo e floroglucina, impiegando come condensante il cloruro di zinco in soluzione acetica, io non avevo potuto ottenere altro che un prodotto impuro il cui acetil-derivato (che non arrivai a purificare e quindi non analizzai) fondeva intorno a 180°, Sonn facendo la condensazione in presenza di acido cloridrico gassoso, riuscì ad ottenere la 4-6-diossi-4'-metossi- β -fenil-cumarina dalla quale ottenne anche l'acetil-derivato

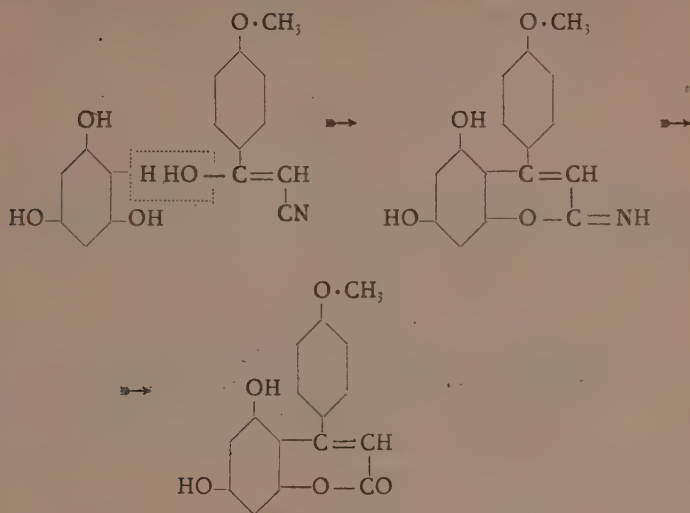
(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma; presentata nella seduta del 21 giugno 1925.

(2) BARGELLINI e LEONARDI, «Gazz. Chim. It.», 41 (1), 737 (1911); BARGELLINI e FORLÌ-FORTI, «Gazz. Chim. It.», 41 (1), 747 (1911).

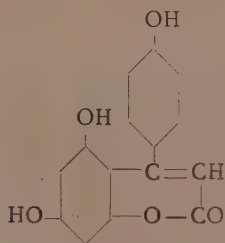
(3) SONN, «Ber.», 51, 821 (1918).

(4) E. v. MEYER, «J. pr. Ch.», (2) 67, 342 (1903).

che, quando è puro, fonde a 189°. La reazione avviene secondo lo schema seguente :



Mettendo a profitto questa utile modificazione che Sonn ha portato al mio primitivo metodo, ho voluto preparare di nuovo la 4-6-diossi-4'-metossi-β-fenil-cumarina, ottenuta prima impura da me e poi allo stato di purezza da Sonn, perchè mi interessava di ottenere da essa la 4-6-4'-triossi-β-fenilcumarina, della formula $C_{15}H_{10}O_5$,



ed anche il triacetil-derivato e l'etere trimetilico corrispondenti, per confrontarli con altri composti che sto studiando e sui quali riferirò fra breve.

Questa triossi-β-fenil-cumarina, per riscaldamento con soluzione concentrata di potassa si scinde per dare acido p-ossibenzoico e floroglucina, cioè gli stessi prodotti che nelle stesse condizioni si formano dalla apigenina (triossi-flavone) dal canferolo (triossi-flavonolo) e anche da altre sostanze naturali la costituzione delle quali non è nota per ora, quali per es.: la vite-xina, la durasantalina, la sacuranetina, ecc.

La conoscenza della 4-6-4'-triossi- β -fenil-cumarina e dei suoi derivati, che descrivo in questa Nota, credo che sarà utile come contributo per giungere a stabilire la struttura di queste sostanze naturali di costituzione per ora sconosciuta.

PARTE SPERIMENTALE.

Seguendo le indicazioni di Sonn, ho potuto ripreparare la 4-6-diossi-4'-metossi- β -fenilcumarina che cristallizza dall'alcool in aghetti fusibili a 262°. Il suo acetilderivato fonde a 189-190°.

4-6-4'-TRIOSSI- β -FENIL-CUMARINA.

La 4-6-diossi-4'-metossi- β -fenil-cumarina si può demetilare completamente riscaldandola con acido iodidrico conc. oppure anche con acido bromidrico e acido acetico glaciale. Dopo 4-5 ore di ebollizione si getta il prodotto in acqua contenente acido solforoso e si separa per filtrazione la polvere giallastra che si deposita.

Il prodotto grezzo della reazione si purifica cristallizzandolo da acido acetico diluito bollente. Si ottiene così la triossi- β -fenil-cumarina in aghetti un po' paglierini che fondono con decomposizione a 285°-288°.

La sostanza fu seccata a 100° e analizzata.

Sostanza gr.	0.2278	CO ₂ gr.	0.5550	H ₂ O gr.	0.0756
dove %	trovato	C	66.47	H	3.71
C ₁₅ H ₁₀ O ₅	calcolato	C	66.66	H	3.70

È insolubile nell'acqua, nel benzolo e nell'etere di petrolio: è facilmente solubile nell'alcool, nell'acido acetico e nell'acetone.

Nell'acido solforico concentrato si scioglie con colorazione gialla. Anche nell'idrato sodico si scioglie a freddo con colorazione gialla.

4-6-4'-TRIACETOSI- β -FENIL-CUMARINA.

Si prepara scaldando con anidride acetica ed acetato sodico la triossi- β -fenil-cumarina sopra descritta.

Il prodotto della reazione cristallizza dall'alcool bollente in aghetti bianchi fusibili a 185-187°.

La sostanza seccata a 100° dette all'analisi i seguenti risultati:

Sostanza gr.	0.1970	CO ₂ gr.	0.4570	H ₂ O gr.	0.0730
dove %	trovato	C	63.27	H	4.14
C ₂₁ H ₁₆ O ₈	calcolato	C	63.60	H	4.00

È insolubile nell'acqua e nell'etere di petrolio: si scioglie a caldo in benzolo. Nell'alcool e nell'acido acetico si scioglie più facilmente.

Nella soluzione diluita di idrato sodico non si scioglie a freddo, ma riscaldando il liquido all'ebollizione, vengono saponificati i gruppi acetilici e la triossi-cumarina passa in soluzione con colore giallo.

4-6-4'-TRIMETOSI- β -FENIL-CUMARINA.

La 4-6-diossi-4'-metossi- β -fenil-cumarina di Sonn si può metilare completamente sciogliendola in alcool metilico, aggiungendo solfato dimetilico (in quantità calcolata o poco più) e poi poco a poco un eccesso di soluzione di idrato sodico. Si diluisce con acqua e si fa distillare l'alcool metilico. Aggiungendo acido cloridrico si precipita il prodotto della reazione, che trattato con soluzione di bicarbonato di sodio non si scioglie affatto.

Il prodotto ottenuto si cristallizza più volte dall'alcool diluito. Si ottiene così la trimetossi- β -fenil-cumarina in aghetti bianchi fusibili a 249-251°.

La sostanza fu seccata a 100° e analizzata.

Sostanza gr.	0.1714	CO ₂ gr.	0.4354	H ₂ O gr.	0.0750
donde %	trovato	C	69.30	H	4.90
C ₁₈ H ₁₆ O ₅	calcolato	C	69.24	H	5.16

Nell'acqua e nel benzolo è insolubile, si scioglie facilmente in alcool e in acido acetico.

A contatto con una soluzione diluita di idrato sodico, i cristallini incolori si trasformano in una sostanza resinosa gialla che a caldo passa in soluzione colorandola in giallo.

Chimica. — *Glucosidi dei calconi.* Nota ⁽¹⁾ di G. BARGELLINI e P. LEONE presentata dal Socio N. PARRAVANO ⁽²⁾.

In una Nota precedente ⁽³⁾ fu descritto un metodo per preparare i glucosidi degli ossi-calconi, consistente nel far agire sopra diversi acetofenoni sostituiti il glucoside dell'aldeide salicilica (la elicina di Piria) oppure il glucoside dell'aldeide vainiglica. Nei glucosidi dei calconi che in tal modo si formano, il residuo del glucosio viene a restare unito ad un ossidrilico dell'anello benzenico che apparteneva all'ossi-aldeide aromatica impiegata.

Descriviamo in questa Nota altri glucosidi di calconi che sono stati preparati invece condensando diverse aldeidi aromatiche col glucoside del

(1) Presentata nella seduta del 21 giugno 1925.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(3) BARGELLINI, « Gazz. Chim. It. », 44, (2), 520 (1914).

p-ossi-acetofenone (piceina), in modo che il residuo del glucosio viene a trovarsi così unito ad un ossidrilie dell'anello benzenico che apparteneva all'ossi-acetofenone impiegato.

Allo scopo di ottenere un glucoside con due residui del glucosio, uno per anello, abbiamo anche tentato di condensare la elicina (glucoside dell'aldeide salicilica) con la piceina (glucoside del p-ossi-acetofenone) ma le esperienze che abbiamo fatte non ci hanno dato per ora buoni risultati.

I glucosidi che abbiamo ottenuti e che descriviamo in questa Nota, presentano le proprietà generali dei glucosidi precedentemente descritti.

Con acido solforico concentrato tutti si colorano in giallo o in rosso aranciato come fanno in generale i calconi.

Gli acidi diluiti a caldo li decompongono formando sostanze resinose che non abbiamo potuto purificare e studiare in maniera speciale.

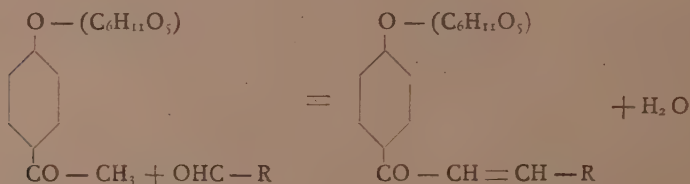
PARTE SPERIMENTALE.

Il glucoside del p-ossi-acetofenone che ci è servito come prodotto di partenza per la preparazione dei composti che qui descriviamo, è stato preparato seguendo le indicazioni di Mauthner⁽¹⁾ cioè facendo agire a freddo una soluzione acquosa diluita di idrato sodico sopra una miscela di p-ossi-acetofenone e β -aceto-bromo-glucosio disciolti in acetone.

Il tetra-acetil-glucoside cristallizzato dall'alcool metilico fonde a 172-173°.

Saponificandolo con barite si ha il glucoside del p-ossi-acetofenone fusibile a 193-194°, identico alla piceina che Tanret⁽²⁾ aveva estratta dal *Pinus picea*.

La piceina così preparata si condensa facilmente con diverse aldeidi aromatiche in soluzione alcoolica in presenza di alcali, dando origine ai corrispondenti glucosidi dei calconi, secondo lo schema



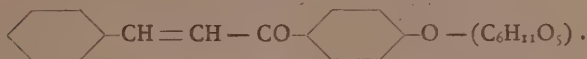
Invece di adoperare la piceina, abbiamo preferito in pratica di impiegare nelle condensazioni che abbiamo eseguite, il suo tetra-acetil-derivato senza prima saponificarlo, perchè quando si fa la reazione con le aldeidi in presenza di alcali, mentre avviene la condensazione, avviene contemporanea-

(1) « J. pr. Ch. », 88, 764 (1913).

(2) « Boll. Soc. Chim. », (3), 19, 944 (1894).

mente la saponificazione dei gruppi acetilici e si forma lo stesso prodotto che si otterrebbe se si impiegasse la piceina non acetilata.

I. — GLUCOSIDE DEL 4'-OSSI-CALCONE.



Ad una mescolanza di gr. 0.45 di aldeide benzoica, gr. 2 di tetra-acetil-piceina e cc. 25 di alcool si aggiunge goccia a goccia (raffreddando esternamente con acqua) 5 cc. di soluzione di idrato sodico al 40 %.

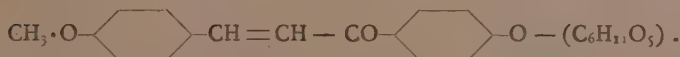
La tetra-acetil-piceina che, essendo poco solubile nell'alcool freddo, era ancora sospesa nel liquido, si discioglie poco a poco e si ha una soluzione incolore che va lentamente colorandosi in giallo rossastro. Dopo aver lasciato in riposo per 12 ore a temperatura ordinaria, si aggiunge acido cloridrico molto diluito fino a reazione acida. Dopo qualche ora si separa per filtrazione il precipitato fioccoso giallo-chiaro che si è andato depositando poco per volta.

Si purifica facendolo cristallizzare dall'alcool bollente. Il glucoside così ottenuto è in minutissimi cristallini di color giallo-chiaro. Fonde a 195°.

Sostanza gr.	0.1154	CO ₂ gr.	0.2754	H ₂ O gr.	0.0620
dove %	trovato	C	65.08	H	5.97
C ₂₁ H ₂₂ O ₇	calcolato	C	65.28	H	5.70

Si scioglie bene nell'alcool bollente, poco nell'acetone; è insolubile nell'etere.

II. — GLUCOSIDE DEL 4'-OSSI-4-METOSSI-CALCONE.



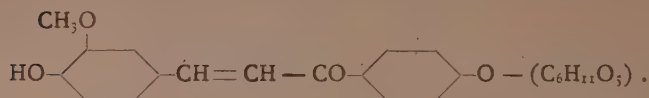
Si ottiene condensando quantità equimolecolari di tetra-acetil-piceina e di aldeide anisica nella maniera sopraindicata per il glucoside precedentemente descritto.

Cristallizza dall'alcool in aghetti di colore giallo-chiaro fusibili a 183°.

Sostanza gr.	0.1004	CO ₂ gr.	0.2352	H ₂ O gr.	0.0532
dove %	trovato	C	63.88	H	5.88
C ₂₂ H ₂₄ O ₈	calcolato	C	63.46	H	5.77

È poco solubile nell'alcool a freddo: meglio si scioglie a caldo. È insolubile nell'etere e nell'acetone.

III. — GLUCOSIDE DEL 4-4'-DIOSSI-3-METOSSI-CALCONE.



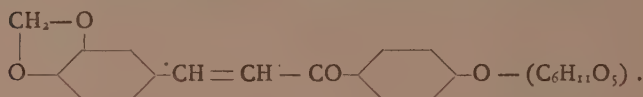
È stato ottenuto come i precedenti composti condensando la tetra-acetil-piceina con aldeide yainiglica.

Cristallizzato dall'alcool bollente si presenta in aghetti di color giallo oro fusibili a 193°.

Sostanza gr.	0.1511	CO ₂ gr.	0.3379	H ₂ O gr.	0.0760
donde %	trovato	C	60.98	H	5.59
C ₂₂ H ₂₄ O ₉	calcolato	C	61.11	H	5.55

È pochissimo solubile nell'alcool a freddo, discretamente a caldo: nell'etere e nell'acetone è insolubile.

IV. — GLUCOSIDE DEL 4'-OSSI-3-4-METILENDIOSSI-CALCONE.



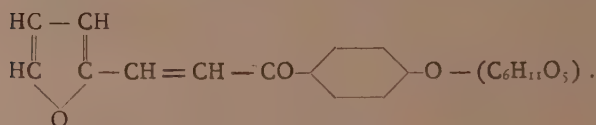
Da tetra-acetil-piceina e piperonal si ottiene questo composto in modo analogo ai precedenti.

Cristallizzandolo dall'alcool diluito bollente si ha il prodotto puro di colore giallo. Fonde a 181°. Cristallizza con una molecola di acqua che perde a 100°.

Sostanza gr.	0.1278	CO ₂ gr.	0.2756	H ₂ O gr.	0.0610
donde %	trovato	C	58.81	H	5.34
C ₂₂ H ₂₂ O ₉ · H ₂ O	calcolato	C	58.90	H	5.35

È poco solubile nell'alcool freddo e nell'acetone. Si scioglie meglio nell'alcool bollente e nell'acido acetico. È insolubile nell'etere.

V. — GLUCOSIDE DEL FURAL-P-OSSI-ACETOFENONE.



Condensando la tetra-acetil-piceina con furfurolo nelle stesse condizioni in cui avviene la condensazione delle altre aldeidi, si può ottenere questo composto che, cristallizzato dall'alcool diluito bollente, si ha in cristalli di color giallo oro. Contiene una molecola di acqua di cristallizzazione che perde a 100°.

Sostanza gr.	0.1078	CO ₂ gr.	0.2276	H ₂ O gr.	0.0534
donde %	trovato	C	57.58	H	5.50
C ₁₉ H ₂₀ O ₈ · H ₂ O	calcolato	C	57.85	H	5.58

È insolubile nell'acqua, nell'acetone e nell'etere: si scioglie molto facilmente nell'alcool anche a freddo.

VI. — GLUCOSIDE DEL CINNAMILIDEN-P-OSSI-ACETOFENONE.



Anche questo composto, che veramente non è un calcone, si può preparare in modo analogo ai composti precedentemente descritti condensando in soluzione alcoolica in presenza di idrato sodico la tetra-acetil-piceina con aldeide cinnamica. Si purifica cristallizzandolo dall'alcool bollente. Fonde a 185°.

Sostanza gr.	0.1064	CO ₂ gr.	0.2608	H ₂ O gr.	0.0598
donde %	trovato	C	66.84	H	6.24
C ₂₃ H ₂₄ O ₇	calcolato	C	66.99	H	5.82

Come i glucosidi dei calconi precedentemente descritti, è insolubile nell'etere e poco solubile nell'acetone. Si scioglie più facilmente nell'alcool e nell'acido acetico.

Cristallografia. — *Sulla struttura cristallina della perowskite* ⁽¹⁾. Nota di G. R. LEVI e G. NATTA, presentata ⁽²⁾ dal Socio F. ZAMBONINI.

La perowskite, metatitanato di calcio CaTiO₃, presenta un grande interesse, per il fatto che la forma esteriore dei suoi cristalli, nettamente cubici in base alle misure goniometriche, è in deciso contrasto con le proprietà fisiche, le quali permettono di stabilire con certezza che, almeno entro un intervallo di temperatura molto esteso, i cristalli di perowskite sono costituiti da lamelle polisintetiche (riconoscibili già talvolta ad occhio o con la lente) sicuramente rombiche. Però, ad onta delle indagini di cristallografi

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di chimica generale del Politecnico di Milano.

(2) Presentata nella seduta del 5 giugno 1925.

eminenti come Kokšarov, Des Cloizeaux, Klein, Bowman, ecc., i rapporti tra i vari sistemi di lamelle che costituiscono i cristalli di perowskite sono rimasti per lungo tempo sconosciuti, fino a quando O. B. Böggild⁽¹⁾, in base ad uno studio accuratissimo dei geminati di criolite (minerale monoclino, ma spiccatamente pseudocubico), mostrò che la perowskite e la boracite hanno una struttura analoga, che potè, perciò, venire pienamente chiarita.

Il Böggild giunse alla conclusione che i cristalli di perowskite vanno riferiti ad una croce assiale rombica:

$$a : b : c = 0,9881 : 1 : 1, 4078.$$

Secondo ogni probabilità, il minerale si è formato originariamente sotto forma cubica, sicchè il complesso delle lamelle della perowskite è da considerarsi come secondario. In base alle idee del Böggild il « cubo » della perowskite viene ad essere formato dalle faccie del pinacoide rombico (001) e del prisma (110). Appariva importante, perciò, controllare, mediante l'analisi röntgenografica, i risultati delle indagini cristallografiche ed ottiche. Recentemente, Rinne ha dimostrato che la leucite al disopra ed al disotto del punto di trasformazione possiede sensibilmente la stessa struttura: era perciò importante stabilire se l'esame röntgenografico, nel caso della perowskite, conduceva ad un reticolo cubico ovvero ad uno rombico, corrispondente alla vera simmetria del minerale alla temperatura ordinaria.

La perowskite usata era un cristallo di Achmatowsk (Urali) bruno di oltre due millimetri di lato e particolarmente sviluppato secondo due faccie normali tra loro. Dette due faccie lucenti e ben formate ci permisero di controllare con grande esattezza l'angolo 90° tra esse compreso; per le altre faccie tale determinazione non si potè fare che approssimativamente. Con opportune sfaldature il cristallo fu ridotto a poco più di un millimetro di lato e le parti staccate servirono allo studio della struttura con il metodo delle polveri; il cristallo così ridotto di dimensioni fu esaminato con il metodo di Laue e con quello di Schiebold (del cristallo rotante).

Fotogrammi di Debye e Scherrer. — La perowskite macinata finamente fu esaminata col solito dispositivo⁽²⁾ munito di anticatodo di rame usando dapprima un preparato di 1,5 mm. di diametro: si ottenne così un fotogramma nel quale oltre alle linee che figurano nella tabella annessa comparve un'altra linea (debole) che non si poteva ordinare; Lavato il prodotto con acido cloridrico diluito a 60° e ripetuto il fotogramma (fig. 1 centro a destra), usando un preparato di 1 mm. di diametro si ottennero i valori della tabella seguente.

(1) « Zeitsch. für Kryst. », 19:2, L, 408.

(2) « Annali di Chimica Applicata », vol VIII, p. 265 (1924).

N.	$\frac{\text{sen } \theta/2}{\text{corretto}}$	K	$h_1 h_2 h_3$	$\frac{\text{sen } \theta/2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}$	Intensità osservata	Intensità calcolata
1	0.254	β	1 1 0	0.1795	md	—
2	0.284	α	1 1 0	0.2007	ff	156
3	0.332	—	—	—	dd	—
4	0.358	β	2 0 0	0.1790	d	—
5	0.399	α	2 0 0	0.1995	ff	260
6	0.439	β	2 1 1	0.1792	d	—
7	0.488	α	2 1 1	0.1991	ff	171
8	0.564	α	2 2 0	0.1993	f	224
9	0.628	α	3 1 0	0.1986	mf	93
10	0.672	β	3 2 1	0.1795	dd	—
11	0.689	α	2 2 2	0.1987	dd	79
12	0.745	α	3 2 1	0.1990	f	158
13	0.762	β	$\left. \begin{array}{l} 3 3 0 \\ 4 1 1 \end{array} \right\}$	0.1795	dd	—
14	0.795	α	4 0 0	0.1987	dd	52
15	0.822	α	4 1 0	0.1991	dd	7
16	0.846	α	$\left. \begin{array}{l} 3 3 0 \\ 4 1 1 \end{array} \right\}$	0.1992	f	$\left. \begin{array}{l} 35 \\ 70 \end{array} \right\}$
17	0.893	α	4 2 0	0.1996	f	404
18	0.921	β	$\left. \begin{array}{l} 5 1 0 \\ 4 3 1 \end{array} \right\}$	0.1804	dd	
19	0.940	α	3 3 2	0.2001	mj	142
20	0.985	α	4 2 2	0.2009	mf	218

Il valore di $\text{sen } \theta/2$ è stato corretto per l'errore proveniente dal diametro del preparato mediante la formula di Pauli ⁽¹⁾.

Come risulta da questa tabella nel prodotto *lavato* si è riscontrata una sola linea (debole), la terza, che non si è lasciata ordinare secondo una struttura cubica tipo corpo centrato, fatta assumendo come aggruppamenti del reticolo Ca e TiO_3 . L'assenza di faccie in cui la somma degli indici sia dispari, sta senz'altro a dimostrare che l'aggruppamento degli atomi nel

(1) « Zeitsch. für Kristall. », vol. 56, p. 604.

reticolo, deve per lo meno essere assai vicino ad una struttura tipo corpo centrato.

Come dimensione del reticolo si calcola, assumendo, come media dei valori della 5ª colonna, 0.200 per la radiazione $K\alpha$ e 0.1795 per la $K\beta$, lo stesso valore per a di 3.845 Å.

Risulta per la densità allora:

$$\text{densità} = \frac{136.17 \cdot 1.66 \cdot 10^{-24}}{56.8} = 3.98$$

in ottimo accordo con i valori precedentemente noti (3.95 — 4.10).

Le intensità dell'ultima colonna sono calcolate con la formula di Debye:

$$I = \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \cdot Z \frac{S^2}{\cos \theta / 2 \cdot (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)}$$

dove Z è il numero dei piani cooperanti ed S^2 è il quadrato del fattore di struttura ⁽¹⁾. In un tipo di struttura a corpo centrato per gli atomi di calcio e di titanio con l'ossigeno al centro delle faccie formate dagli atomi di titanio, la posizione degli atomi è individuata dalle coordinate seguenti:

$$Ti(000) \quad ; \quad Ca \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right) \quad ; \quad O \left[0 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{1}{2} 0 \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{1}{2} \frac{1}{2} 0 \right] .$$

I valori di S^2 usati per il calcolo dell'ultima colonna, nella tabella precedente, sono dedotti mediante queste coordinate.

Tale ipotesi sarebbe compatibile con i diametri atomici di questi elementi entro i limiti delle differenze già osservati in altri casi. Infatti i diametri atomici del calcio, titanio, ed ossigeno sono rispettivamente 3.40, 2.80, 1.30 Å. Essendo 6.67 la diagonale del cubo di lato 3.85 avremmo tra Ti e Ca uno spazio libero di 0.23 Å, tra Ca e Ca di 0.45 Å mentre solo tra Ti e O un difetto, di 0.12 Å.

Le intensità osservate nel fotogramma e raccolte nella penultima colonna sono in buon accordo con quelle calcolate per la struttura sopra indicata, come risulta nella tabella precedente nel confronto delle intensità delle radiazioni $K\alpha$.

Fotogrammi di Schiebold. — Sempre con anticatodo di rame, ma adoperando il cristallo di circa 1 mm. sopra descritto, furono eseguiti due fotogrammi aventi assi di rotazione normali tra di loro: essi risultarono identici

(1) WICKOFF, *The Structure of Crystals*, p. 105 (1924).

e, nella fotografia 2 è riportata metà di una delle film così ottenute (il centro di figure a destra). Nella tabella seguente sotto le colonne 1° e 2° sono riportati i valori osservati per i due fotogrammi e le relative intensità:

TABELLA 2^a.

N.	θ		Intensità		sen $\theta/2$ medio	$h_1 h_2 h_3$	K	a
	1°	2°	1°	2°				
1	24.8	—	d	—	0.251	1 0 0	α	3.58
2	35.0	35.0	dd	dd	0.300	1 1 0	α	3.62
3	44.1	44.0	m	md	0.377	2 0 0	β	3.68
4	48.8	48.8	ff	ff	0.413	2 0 0	α	3.73
5	71.3	71.4	d	md	0.583	2 2 0	α	3.74
6	80.5	80.5	f	f	0.646	1 3 0	α	3.77
7	108.8	108.8	f	f	0.812	4 0 0	α	3.80
8	118.2	118.5	md	m	0.854	3 3 0	α	3.82
9	129.5	129.8	ff	ff	0.904	2 4 0	α	3.82
10	137.2	137.2	m	m	0.930	6 7 0	α	7.64
11	144.0	144.0	md	d	0.951	8 5 0	α	7.64

Eccettuato la prima e le ultime due linee, tutte le altre si presentano pure nei fotogrammi ottenuti col metodo delle polveri, si ha pure accordo nelle intensità relative osservate.

Le ultime due linee rispettivamente media e debole non si lasciano ordinare secondo una cella elementare contenente una sola molecola come le precedenti, ma assumendo per il lato a della cella un valore doppio, con una cella cioè contenente 8 molecole.

La necessità di assumere una cella elementare di base maggiore appare perciò necessario dal fotogramma del cristallo rotante, mentre non risultava dai fotogrammi delle polveri.

Fotogrammi di Laue. — Furono eseguiti fotogrammi secondo tre direzioni ortogonali tra loro ed in guisa che il fascio di raggi incidenti di un millimetro di diametro risultasse perpendicolare alle tre faccie migliori del cubetto di perowskite.

Le fotografie 3 e 4 della tavola allegata riproducono i fotogrammi ottenuti con un anticatodo di tungsteno ed una esposizione di 4 milli-amperre-ora. Dalla loro misura risulta che il fascio incidente sulla fotografia 3 era con buonissima approssimazione coincidente con la verticale ad una

faccia del pseudocubo mentre nella fotografia 4 risultava inclinato di 1 grado. La distanza del cristallo dalle film (cm. 4.502 nella prima fotografia e cm. 4.65 nella seconda) fu controllata mediante fotogrammi di cristalli di NaCl di egual spessore e posti nelle identiche condizioni. La fotografia fatta nella 3^a direzione, normale alle precedenti, non è riportata perchè identica alla seconda.

Le macchie di questi due fotogrammi sono riportate schematicamente nel centro delle figure 5 e 6 del testo dando alle singole macchie dimensioni proporzionali alle intensità relative. La parte esterna rappresenta su scala metà, rispetto alla figura schematica interna, la proiezione gnomonica delle faccie che hanno generato le singole macchie. In queste proiezioni si osserva per tutti i punti una simmetria binaria rispetto a due piani ortogonali e rispetto al centro del fotogramma e per buona parte di essi anche una simmetria quaternaria, tenendo conto non solo della posizione ma anche della intensità. Tenendo invece solo conto della posizione la simmetria quaternaria risulterebbe completa per i punti della fig. 1. Essendo il cristallo non uniformemente sviluppato in tutte le direzioni (mm. 1.10 per 1.50 per 1.90) si può in parte attribuire a questa causa certe differenze di intensità osservate.

Le proiezioni gnomoniche furono disegnate riferendoci da una distanza di 5 centimetri tra cristallo e film, e sono ridotte nella fig. 1 e 2 a meno di un settimo della grandezza primitiva. È importante osservare che in entrambi i casi *tutti* i punti dovuti a faccie risultanti con terzo indice 1 si disponevano *esattamente* su di una rete quadrata di 5 cm. di lato (eguale alla distanza tra cristallo e proiezione), quelli con terzo indice due su di una di cm, 5 : 2, ecc. questo fatto è geometricamente soddisfatto solo da un reticolo cubico.

Calcolando, dalle macchie di Laue la lunghezza d'onda delle radiazioni che le hanno generate mediante la nota formula:

$$n\lambda = \frac{2a \sin \theta/2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}$$

si ottengono, assumendo per a il valore 3.84, per molte riflessioni valori di λ inammissibili (λ min 0.1182 per il proprio fotogramma e 0.1372 Å per il secondo. Per una differenza di potenziale di 60.000 Volt, la minima lunghezza d'onda (λ min. = $\frac{h}{eV}$) è invece di circa 0.209 Å. Perciò appare anche qui necessario assumere per a un valore maggiore di 3.84 Å. I valori di $n\lambda$ calcolati colla formula precedente ed assumendo a 7.68 sono raccolti per il fotogramma 1 nella tabella seguente. Sono indicati i soli punti di mezzo quadrante essendo nell'altro mezzo tutti i punti in identica posizione.

$h_1 h_2 h_3$	I	$n\lambda$	$h_1 h_2 h_3$	I	$n\lambda$	$h_1 h_2 h_3$	I	$n\lambda$
8 0 3	ddd	0.636	5 1 2	md	1.028	7 6 2	ddd	0.339
3 0 1	m	1.538	5 3 2	m	0.808	4 1 1	fff	0.855
10 0 3	m	0.425	5 4 2	ddd	0.660	4 2 1	md	0.731
7 0 2	ddd	0.581	8 6 3	ddd	0.423	4 3 1	f	0.539
4 0 1	f	0.910	6 1 2	dd	0.738	12 2 3	dd	0.299
5 0 1	mf	0.597	3 1 1	m	1.389	12 4 3	ddd	0.279
6 0 1	f	0.414	3 2 1	f	1.097	8 5 2	ddd	0.332
8 0 1	d	0.236	10 2 3	m	0.407	5 1 1	d	0.569
2 2 1	m	1.723	10 4 3	md	0.370	5 2 1	md	0.513
5 5 2	d	0.595	10 6 3	ddd	0.317	5 3 1	mf	0.371
8 8 3	ddd	0.348	7 1 2	dd	0.541	6 2 1	mf	0.372
3 3 1	d	0.731	7 3 2	dd	0.511	6 4 1	dd	0.309
4 4 1	d	0.469	7 4 2	—	0.447	7 1 1	md	0.302
—	—	—	7 5 2	m	0.397	—	—	—

λ minimo così calcolato risulta 0.236 Å per la faccia 801. Per brevità viene omessa la tabella relativa al 2° fotogramma dalla quale si ottiene come λ min. 0.2745 Å per la faccia 10 2 3. Ambedue i valori sono superiori al λ min. effettivo.

Per ammettere la presenza di certi punti come quelli dovuti alle faccie 601, 801, 441, ecc., non ammissibili in un reticolo a corpo centrato, basterebbe ammettere uno spostamento di circa un venticinquesimo di a nelle direzioni coordinate dell'atomo di titanio (spostamento perfettamente ammissibile in base ai diametri atomici).

Conclusione — Dall'esame röntgenografico eseguito col metodo delle polveri di Debye-Scherrer risulta per la perowskite un reticolo cristallino cubico centrato. Questo metodo è perciò, *nelle condizioni attuali dei nostri studi*, meno sensibile delle indagini ottiche e in genere di quelle fisiche (figure di corrosione, ecc.) che si usano nella determinazione della vera simmetria dei cristalli. Col metodo di Laue si è confermata che la struttura della perowskite è sensibilmente cubica-centrata; la cella elementare sarebbe un cubo di 7,68 Å di lato, contenente 8 molecole di CaTiO_3 . È risultato però chiaro dai diagrammi di Laue, che la perowskite non è alla temperatura ordinaria cubica. Si è già visto, che dalle indagini cristallografiche

ed ottiche si era concluso che lo pseudocubo della perowskite era da scindersi nelle due forme rombiche (001) e (110). Ora, i tre diagrammi di Laue eseguiti in corrispondenza alle tre coppie di faccie del pseudocubo, sono risultati due uguali ed il terzo differente, come si conviene, appunto, alla combinazione rombica (001) e (110). La simmetria dei röntgenogrammi è apparentemente superiore a quella dei cristalli rombici, perchè l'asse normale a (001) risulta quasi una tetragira, ed anche i röntgenogrammi delle altre due faccie del pseudocubo corrispondono all'incirca alla simmetria che ci si dovrebbe aspettare per faccie di prismi tetragonali. Un attento esame mostra per altro che si tratta di pseudosimmetria: d'altro canto va ricordato che Jaeger, da pile di lamelle di muscovite sovrapposte ed incrociate, ha ottenuto röntgenogrammi con simmetria più elevata di quella corrispondente alla muscovite monoclina. Un fatto analogo può ben verificarsi nella perowskite, costituita da lamelle diversamente orientate e sovrapposte.

Batteriologia Agraria. — *Ancora sui bacilli radicali della « Diplotaxis erucoides »* D. C. Nota di R. PEROTTI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio R. PIROTTA ⁽²⁾.

In una prima Nota abbiamo riferito su di una specie batterica da noi rinvenuta costantemente nelle radici della *Diplotaxis erucoides* D. C. ⁽³⁾. Ulteriormente, con una seconda Nota, abbiamo iniziato ad illustrarne il significato simbiotico nei rapporti dello sviluppo della fanerogama, che risultarono positivi, quanto meno per la possibilità di attacco dei carboidrati insolubili ⁽⁴⁾.

Ora, mediante questa terza Nota, ci proponiamo di esporre i risultati di alcune nostre indagini dirette a stabilire il valore del simbiote radicale per quanto riguarda la nutrizione azotata della *Diplotaxis* e quindi eseguirne confronti con l'attività del radicicola delle leguminose.

Si presero le mosse dalla preparazione di una soluzione minerale priva di azoto, di ridotta concentrazione, per non sorpassare con successive aggiunte di azotati un contenuto del 2‰ di sostanze disciolte. Tale soluzione era della composizione seguente: per 1000 di acqua, fosfato bipotassico 0.5, cloruro di calcio 0.05, solfato di magnesio 0.15, cloruro sodico 0.05, cloruro ferrico 0.005.

(1) Pervenuta all'Accademia il 6 luglio 1925.

(2) Lavoro eseguito nel R. Laboratorio di Batteriologia Agraria della Stazione di Patologia Vegetale di Roma.

(3) PEROTTI R., *Su la presenza di una specie batterica nelle radici della « Diplotaxis erucoides »* D. C. - Rend. Acc. Lincei, XXVIII, ser. 5^a, 1° sem., fasc. 9, p. 331.

(4) PEROTTI R., *Ulteriori ricerche sui bacilli radicali della « Diplotaxis erucoides »* D. C. Rend. Acc. Lincei, XXIX, ser. 5^a, 2° sem., fasc. 11, p. 361.

Quali sorgenti di azoto vennero usate: nitrato potassico, solfato ammonico ed asparagina in pesi corrispondenti a gr. 0.14 di N.

Fu tentato dapprima la riproduzione della *Diploaxis* da seme, ma s'incontrarono difficoltà per ottenersene in germinatoio piantine sviluppate a tal segno da poter essere utilizzate nel dispositivo di esperimento; e per due volte ci si dovette rinunciare. Si ricorse allora al prelevamento di piantine le più piccole che fosse possibile di ottenere nelle condizioni naturali di germogliamento, sviluppate presso a poco in uguale misura; e di esse si procedette al trapianto in vasi di vetro da cm-c. 350, ricoperti di carta nera, contenenti le diverse soluzioni, mantenendovele nel collo mediante un batuffolo di cotone greggio.

A misura che il liquido, per la traspirazione o la semplice evaporazione, scemava, ne veniva ripristinato il volume con acqua distillata. Al termine di ogni mese il liquido stesso veniva completamente rinnovato.

Esperienza I. — Una prima prova fu orientativa.

Furono allestite quattro colture: tre con le diverse sorgenti azotate suddette ad una quarta, di controllo, senza azoto.

I risultati che, dopo tre mesi di vegetazione, se ne ottennero, per quanto riguarda lo sviluppo complessivo, si riassumono nei seguenti: mentre la coltura con azoto amidico era del tutto deperita, quella con solfato ammonico si dimostrava in condizioni notevolmente inferiori a quella con nitrato, che iniziò la formazione delle gemme fiorifere; e nelle stesse buone condizioni di questa si dimostrò la coltura senza azoto.



Fig. 1.

Esperienza II. — Si provvede quindi a ripetere la prova, eliminando l'asparagina, di cui erano stati accertati i risultati nettamente sfavorevoli, ed allestendo undici colture secondo questo piano:

colture n. 1, 2, 3	- sorgente di azoto - nessuna
» » 4, 5, 6, 7 - »	» - nitrato potassico
» » 8, 9, 10, 11 - »	» - solfato ammonico

I liquidi delle colture n. 2, 3, 6, 7, 10, 11 furono inoculati con la forma batterica precedentemente isolata da piante adulte e normali di *Diplotaxis crucoides*.

Dopo un periodo iniziale, durante il quale non apparirono differenze sensibili nelle colture, ed un successivo periodo, in cui l'azione del nitrato potassico e del solfato ammonico si dimostrò nei diversi vasi non troppo uniforme; lo sviluppo delle colture senza azoto rimase sensibilmente arretrato in confronto di quello di tutte le rimanenti.

Gli esemplari di queste colture presentavano caule esile e foglie meno numerose, piccole, frequentemente disseccate al margine.

La fig. 1 fissa lo sviluppo delle piante al principio del terzo mese, dimostrandosi come la migliore azione sia stata esplicita dal nitrato, facendo seguito ad essa quella del solfato ammonico; ma l'intensità della colorazione della clorofilla appariva in ragione inversa dello sviluppo e quindi maggiore nelle piante dei vasi 1, 2 e 3.

È a notarsi inoltre che la presenza dei composti azotati determinò un notevole, evidentissimo sviluppo di microrganismi nei liquidi colturali, fra essi comprese le alghe, che hanno certamente in parte ostacolato la vegetazione della *Diplotaxis*. Nel complesso perciò le piante allevate senza azoto si sono dimostrate più resistenti o, meglio, meno ostacolate dalle condizioni artificiali in cui erano state poste a vegetare; ed in esse si

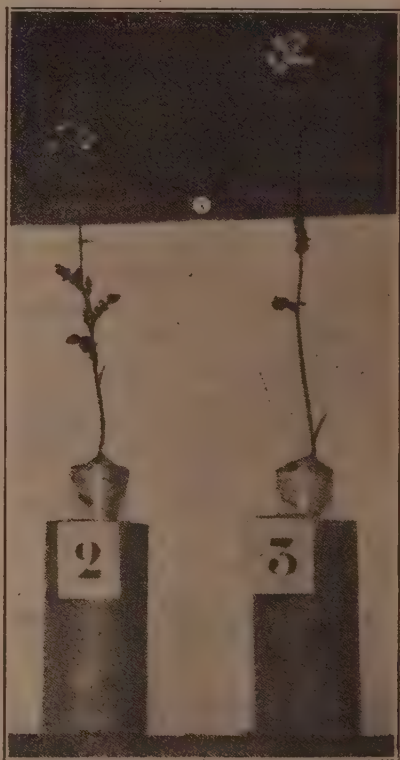


Fig. 2.

determinò con una certa precocità la formazione della infiorescenza che portò al completo sviluppo dei fiori, mentre ciò non avvenne con nessuna delle altre colture (Fig. 2).

Non si palesarono differenze sensibili nelle colture inoculate ed in quelle non inoculate con i batteri.

Esperienza III. — Allo scopo di mettere le piante di *Diplotaxis* in condizioni di sviluppo meno artificiali, fu eseguita questa esperienza impiegando nove piccoli vasi contenenti sabbia silicea depurata di Fontainebleu che periodicamente veniva innaffiata con quantità uguali di acqua distillata o delle soluzioni nutritive minerali ed azotate di cui alla precedente ricerca secondo questo piano:

colture n. 1, 2, 3 azoto nulla
 » » 4, 5, 6 nitrato potassico 1 ‰
 » » 7, 8, 9 solfato ammonico 1, 3 ‰

In ciascuno dei vasi si posero a vegetare due piccole piante già sviluppate in condizioni naturali, delle quali si determinò il peso fresco e, con parte dei campioni della stessa provenienza, l'umidità per averne il peso secco.

L'umidità risultò = 84.61 % e l'azoto totale, dosato con metodo Kjeldahl-Wilfarth sullo stesso residuo secco di questa determinazione, = 1.57 ‰.

Nella seguente tabella sono riuniti i dati analitici ottenuti inizialmente:

Numero delle piante	PIANTE		Azoto
	peso fresco gr.	peso secco gr.	
1	2.25	0.3462	0.0054
2	2.93	0.4509	0.0070
3	2.10	0.3231	0.0050
4	3.03	0.4663	—
5	3.48	0.5355	—
6	2.66	0.4093	—
7	3.38	0.5201	—
8	3.46	0.5324	—
9	2.68	0.4124	—

Le piante, dopo un breve periodo di attecchimento iniziarono un normale sviluppo, che però nelle colture 1, 2, 3 si dimostrò subito sensibilmente arretrato. Esso fu migliore nelle colture con nitrato, mentre in quelle con solfato ammonico venne alquanto ostacolato. I risultati colturali confermarono quindi quelli della precedente esperienza.

Man mano che avveniva il distacco di qualche foglia, questa era conservata separatamente per ciascuna coltura. Così, al manifestarsi della formazione delle infiorescenze, allo scopo di avere un più abbondante sviluppo erbaceo, le infiorescenze stesse venivano asportate e riunite alle foglie già cadute delle rispettive piante.

La coltivazione si prolungò per quattro mesi, trascorsi i quali il prodotto, sia erbaceo che radicale, venne accuratamente raccolto insieme al materiale già conservato ed il tutto, pesato secco all'aria, essiccato a 110° C., fu sottoposto a determinazione dell'azoto totale con il metodo sopra ricordato.

Nella seguente tabella sono consegnati i dati conseguiti, unitamente al bilancio dell'azoto delle prime tre colture.

L'azoto contenuto nella sabbia silicea depurata non era che tracce minime.

Numero delle colture	PIANTE		AZOTO		Guadagno in azoto gr.
	peso secco all'aria gr.	sostanza secca a 110° C gr.	finale gr.	iniziale gr.	
1	1.6749	0.8752	0.0085	0.0054	0.0031
2	2.3142	1.9940	0.0139	0.0070	0.0069
3	1.3940	1.1130	0.0112	0.0050	0.0062
4	4.4355	2.9600	—	—	—
5	5.7535	3.7300	—	—	—
6	5.8680	4.3730	—	—	—
7	2.3880	1.9905	—	—	—
8	3.3307	2.7815	—	—	—
9	2.2245	1.8540	—	—	—

Esperienza IV. — Per ottenere cifre più elevate e adeguatamente significative, non che tener miglior conto di alcune condizioni naturali di sviluppo e principalmente tra esse della presenza dei simbionti e di quella del *Ceutorrhynchus pleurostigma*, March., si prelevarono piante di *Diplotaxis* in uno stadio di vegetazione più avanzato che non fosse quello degli individui già sottoposti ad esperimento e si trasportarono in vasi contenenti le note soluzioni nutritive.

Le colture 1, 2, 3 non contenevano azoto: quelle 4 e 5 erano trattate con nitrato potassico e quelle 6 e 7 con solfato ammonico.

Le piante dei numeri 1 e 2 erano attaccate da *Ceutorrhynchus*.

Il peso delle piante, fresco e secco — questo come quello del contenuto iniziale in azoto, dedotti da determinazioni su campioni della identica e contemporanea provenienza e risultanti rispettivamente = 87.47 % e 1.84 % — è riportato qui appresso:

Numero delle piante	PIANTE		Azoto gr.
	peso fresco	peso secco	
	gr.	gr.	
1	13.75	1.72	0.0316
2	4.67	0.58	0.0106
3	2.62	0.32	0.0058
4	6.53	0.81	—
5	2.92	0.36	—
6	5.69	0.71	—
7	2.77	0.34	—

L'azione dimostrata dalle sorgenti azotate fu la stessa già rilevata nelle precedenti esperienze. I migliori risultati furono offerti dal nitrato, ma la colorazione verde delle foglie era migliore nelle colture senza azoto, il cui sviluppo però rimase più arretrato di tutte.

Raccolto il materiale, man mano che veniva essiccandosi sulla pianta, le infiorescenze asportate non appena cominciavano a manifestarsi e, alla fine del quarto mese di vegetazione, le piante intiere, si procedette alle opportune determinazioni, i cui risultati sono consegnati qui appresso:

Numero delle piante	PIANTE		AZOTO		Guadagno in azoto gr.
	peso secco all'aria	sostanza secca a 110° C	finale	iniziale	
	gr.	gr.	gr.	gr.	
1	3.4315	2.7815	0.0347	0.0316	0.0031
2	1.1320	0.9320	0.0120	0.0106	0.0014
3	0.4730	0.3752	0.0086	0.0058	0.0028
4	1.5070	1.2055	—	—	—
5	0.9750	0.7850	—	—	—
6	1.5305	1.1478	—	—	—
7	0.7641	0.6114	—	—	—

CONCLUSIONI. — Alcune conclusioni che possono trarsi da queste indagini hanno un valore subordinato in relazione alla tesi principale che s'intendeva di svolgere: la dimostrazione della eventuale capacità di assimilazione dell'azoto molecolare da parte della *Diplotaxis*.

Una prima riguarda lo sviluppo di tale pianta in presenza di varie sorgenti di azoto combinato. La *Diplotaxis erucoides* è danneggiata dall'assorbimento di sostanze amidate (asparagina) e, in presenza di azoto ammoniacale o nitrico, dimostra di preferire nettamente questo secondo.

Altra conclusione può essere quella che si riferisce ai risultati conseguiti con una normale somministrazione di composti azotati (solfato ammonico e nitrato potassico) in confronto dell'assenza di qualsiasi combinazione dell'azoto. Dall'esame delle condizioni generali di sviluppo delle colture la *Diplotaxis erucoides* si dimostra un vegetale adattato a substrati alimentari poveri di sostanze azotate e quindi tale da potersi qualificare oligonitrofilo.

Pensiamo anzi, a tale proposito, che sia da applicarsi anche ai vegetali superiori la distinzione che ormai si fa per i microrganismi di forme oligo-, meso- e polinitrofile.

Infine, i risultati del bilancio dell'azoto eseguito per le colture di *Diplotaxis* in assenza di combinazioni azotate, dimostrano un guadagno in azoto più (esp. III) o meno (esp. IV) sensibile, a seconda delle circostanze, non certo di grande rilievo, ma tale da imporsi alla indagine scientifica per più ampi sviluppi.

Fra le cause di detto guadagno non può essere trascurata nel caso in esame la presenza dei simbionti radicali come viene indicato specialmente dalla esp. III. Ma la questione merita di essere trattata da un punto di vista generale, poichè la capacità di fissazione dell'azoto molecolare da parte delle non-leguminose, in questi ultimi tempi ha trovato appoggio nei reperti sperimentali di numerosi ricercatori⁽¹⁾.

Soltanto, noi siamo di parere che il renomeno debba essere posto in relazione al fatto, da noi stessi per la prima volta illustrato, della batterioriza.

(1) PEROTTI R., *La teoria microorganica della concimazione*. - Soc. editrice « Sapienza », Roma, 1925. MAMELI CALVINO E., *L'assimilazione diretta dell'azoto libero nei vegetali*. - Rassegna dei più recenti lavori sull'argomento. - Riv. di Biologia, vol. VI, fasc. I, p. 74.

Genetica. — *Di un effetto collaterale e di un rapido metodo di studio della « jonolisi » del polline.* Nota di ROBERTO SAVELLI, presentata dal Socio R. PIROTTA ⁽¹⁾.

I. — La natura ibrida degli organismi prodotti col concorso di un gamete « jonolizzato »; il fatto che il nuovo procedimento, avendo azione metamorfica sulla costituzione fisico-chimica dell'idioplasma, rompe la sua « continuità » *qualitativa* e perciò produce tal sorta di mutazioni che veramente rappresentano *innovazioni* nel corredo ereditario della stirpe; le nuove prospettive che ne appaiono riguardo al concetto di « premutazione »; ed infine la possibilità che la « jonolisi » possa con vantaggio venir trasferita al momento della riduzione cromatica: ecco i quattro oggetti dei precedenti ragionamenti ⁽²⁾, di validità affatto generale, sia che la « jonolisi » operi, come finora, sulle piante, sia che voglia estendersi agli animali.

(1) Presentando questa Nota nella seduta del 28 febbraio 1925, il Socio PIROTTA aggiunge queste parole: « Ho già richiamato l'attenzione dell'Accademia sui lavori iniziati da Alberto Piròvano (« Rendiconti » vol. XXXIII, 1924, 2° sem., p. 519); credo opportuno oggi di segnalare l'interesse suscitato, specialmente tra i pratici, da quelle esperienze. Mentre a Vaprio il Piròvano stesso amplifica il laboratorio privato in cui sviluppò il germe delle sue ricerche, altri laboratori sono sorti a Belgirate, a Rovigo e con maggior copia di apparecchi a Pistoia, altri due se ne stanno allestendo a San Remo ed a Stra. Applicazioni speciali ed isolate si tentano a Perugia ed altrove. Iniziative di *carattere scientifico* sono invece segnalate all'estero: a Zurigo ed a Berlino. Progetti di *carattere agrario* sono in preparazione a Cuba. Mentre, sotto un certo aspetto, c'è motivo di compiacersi di questo movimento, determinato principalmente *dalla lusinga di pronto successo pratico*, sembra tuttavia consigliabile di far precedere ai tentativi di applicazione utilitaria, un'indagine più approfondita e meglio ponderata, poichè risulta già evidente, anche per le osservazioni comunicate a questa Accademia medesima, come *poche e semplici* considerazioni scientifiche possano non solamente apportare *profonde rettifiche* ai concetti che guidano gli esperimenti; ma anche rinnovare la tecnica ed il modo di applicazione di queste azioni (che il Piròvano chiama « jonolitiche »). *Ad ogni modo è desiderabile che in Italia, dove questi fenomeni sono stati scoperti*, vengano anche approfonditi con *esatto metodo d'indagine*. Questa questione merita propriamente di essere studiata e chiarita. Il problema riguarda anzitutto la Fisiologia, modernamente intesa: ora che l'autonomia di questo ramo di scienza ha ricevuto, *anche per le piante*, finalmente, il tanto lungamente atteso riconoscimento ufficiale, io mi auguro di poter iniziare, nel mio Istituto, quella parte delle ricerche che riguarda il lato esclusivamente biologico del problema ».

(2) In questi « Rendiconti » vol. XXXIII (serie V) pp. 273-278; pp. 421-424; e pp. 579-585. Colgo l'occasione per correggere errori tipografici: nella 1° Nota al § I, riga 20, invece di « bleu di metile » leggasi « bleu di metilene », al § VI, a p. 277, riga penultima, dove è scritto « in regime di ibridazione tra forme specificatamente di-

La « jonolisi » che agisse sugli spermi degli animali potrebbe meglio giustificare il concetto del Piròvano: di risalire a quella ch'egli chiama la « vera origine della vita », operando direttamente sur uno degli « elementi sessuali » che si riuniscono a formare la « prima cellula » del nuovo organismo, la quale ne trarrebbe quella « impronta iniziale » che, secondo il Piròvano, dovrebbe esser sufficiente a segnare una « direzione costruttiva » immutabile per l'organismo medesimo e per tutta la sua discendenza. Ma l'applicazione di questo concetto negli esperimenti del Piròvano rimane incerta, illusoria, fino a tanto ch'egli agisca sul polline senza aver determinato con precisione in qual momento, in qual fase del suo interno sviluppo, la « jonolisi » viene a sorprenderlo.

Nel corso della precedente discussione io ho consentito, provvisoriamente, nel concetto del Piròvano, ed in certi momenti son giunto quasi a identificare polline e gameti, od a considerare il granello pollinico quasi come un involucro contenente un gamete; sia perchè quei miei ragionamenti conservassero appunto un carattere di biologia generale, trascurando tutto quel che non è comune alle piante ed agli animali, sia perchè di fronte ad un fatto nuovo, come la « jonolisi », che costituisce ulteriore complicazione degli abituali problemi genetici, può convenire, per una prima approssimazione, di considerarne un caso idealmente semplificato, « dimenticando

verse» leggasi «in regime di ibridazione tra forme specificamente diverse». Nella 2^a Nota, al § I, p. 421, e al § VI, p. 424, dove è scritto «De Vries» correggasi «de Vries». Del resto il Piròvano determina la mutazione nel gamete; ma poi la trasmette con una ibridazione intra —, oppure inter-specifica, e perciò, per questa seconda parte, la mia discussione si connette con l'altro mio lavoro che riguarda appunto la «Trasmisione» delle mutazioni in regime di ibridazione: vedansi questi «Rendiconti», vol. XXXIII (serie V), pp. 124-129; vol. I (serie VI), pp. 82-89, e pp. 134-140. Anche per questo lavoro, tra gli errori tipografici, urge correggere la mancanza di una *l*, di cui non tutti i lettori potrebbero facilmente accorgersi, e che rende incomprendibile l'intero periodo: nella 2^a Nota a p. 84, nota (1) a margine, riga 4-5, dove dice «deve generare, appositamente,» leggasi «deve generarle, appositamente,»; inoltre, nella nota (2), a margine della stessa pagina, riga 9, «Van Thieghem» correggasi in «van Tieghem», e alla riga 3 della stessa nota a p. 85, «De Vries» correggasi in «de Vries». A p. 82, nella nota a margine (2) dove è citato il vol. XXXIII di questi «Rendiconti», aggiungasi: «ser. V»; a p. 85, riga 24, ove dice «col polline delle mutanti, ma intanto» scrivasi «col polline delle mutanti; ma intanto», e alla riga 27-28, dove dice «mutazione; oppure» scrivasi «mutazione, oppure»; a p. 86, riga 21, dove dice «Le recessività» leggasi «La recessività» a p. 87, riga 5 e 17, invece di «N. Tabacum \times N. Silvestris» scrivasi «N. Tabacum \times N. silvestris»; a p. 88, riga 11 «ma, rispetto al singolo fatto della mutazione» correggasi: «ma rispetto al singolo fatto della mutazione», e alla riga 15 «N. silvestri» leggasi «N. silvestris». Nella 1^a Nota, vol. XXXIII (ser. V) p. 124, riga 20, «conduttore ed espansione» correggasi in «conduttore, ed espansione»; a p. 129, riga 9, «N. Tabacum \times N. Silvestris» leggasi «N. Tabacum \times N. silvestris». Nella 3^a Nota, a p. 137, nota (1) a margine, riga 5, «equivalgono» leggasi «equivalgano»; a p. 139, riga 5 della nota a margine, «al Prof. Cavara, meno robusta» correggasi «al Prof. Cavara meno robusta»; e tralascio di segnalare molti altri consimili errori di interpunzione.

artificialmente » alcune particolarità del fatto concreto. Astrazione legittima, a patto che, subito dopo, le conclusioni vengano ricondotte, con un procedimento d'integrazione, alle circostanze reali.

Per questo appunto vogliamo qui domandarci: su che cosa ha veramente agito la « jonolisi » del Piròvano, e quali nuovi particolari emergono considerando un tale oggetto più da vicino, e da un punto di vista più strettamente botanico?

II. — La « jonolisi », negli esperimenti finora realizzati dal Piròvano, agisce sui granelli pollinici *in toto*, cioè su microspore germinanti, su corpi piuttosto complessi; e dunque altera la compagine molecolare di parti morfologicamente diverse e preparate a diverso destino. Tra esse, il genetico deve considerare soltanto quelle che sono punto di partenza di un processo evolutivo, ontogenetico, quelle la cui sostanza è destinata a riprodursi, prendendo parte alla costruzione del corpo di un nuovo organismo. Siccome questa costruzione, in linea generale, avviene col concorso di altre parti fornite dall'organo femminile, dall'ovulo, cioè dopo una regolare fecondazione, il genetico si occuperà appunto delle alterazioni indotte negli elementi della fecondazione, considerati come portatori di « caratteri », nel senso tecnico della parola, cioè di attributi potenziali che si estrinsecheranno durante l'ontogenesi.

Perciò le alterazioni eventualmente indotte dalla « jonolisi » nel nucleo vegetativo, protallare, potrebbero interessare solo il fisiologo od il morfologo, poichè questo nucleo tipicamente viene presto riassorbito, non ha un destino genetico. Ma invece dovranno bene interessare il genetico *tutte* quelle formazioni cui partecipa la sostanza del nucleo riproduttivo, anteridiale; perchè il quadro delle alterazioni genetiche prodotte dalla « jonolisi » non sarà completo, nè le alterazioni medesime potranno dirsi provate in modo chiaro e generale, se non dopo averne ricercate le tracce *dovunque* la sostanza idioplasmatica alterata venga a portarsi attraverso le sue successive riproduzioni. Bisogna dimostrare che un dato riflesso di queste alterazioni *si conserva* attraverso *tutte* le successive scissioni delle biomolecole idioplasmatiche, senza la quale condizione si potrebbe bensì parlare di alterazioni teratologiche, ma non di modificazioni genetiche. La questione va risolta caso per caso, carattere per carattere.

E siccome nelle *Angiosperme* si ha « doppia fecondazione », anche la « jonolisi » vi deve ottenere *doppio effetto genetico*: nell'albume oltre che nell'embrione; che se questo non avvenisse io dovrei confessare la mia perplessità.

Nelle *Gymnosperme* la « doppia fecondazione » non c'è; ed ecco una prima distinzione di carattere speciale.

III. — Oltre questo punto non sembra che, neanche per le sole *Angiosperme*, si possa procedere con un ragionamento unico: bisogna distinguere caso da caso, appunto a seconda del grado di sviluppo raggiunto dal gra-

nello pollinico al momento in cui la « jonolisi » s'inizia, e a seconda dell'ampiezza dell'ulteriore evoluzione che il granello si trova a dover compiere mentre perdura quest'azione « jonolitica ».

Le differenze che il Piròvano ha già visto, fin da questi primi esperimenti, tra la « jonolisi », magari intensa, del polline emesso, maturo, e una « jonolisi », meno intensa ma più prolungata, del polline che sta maturando entro l'antera, oltre che dalle diversità di architettura molecolare del plasma (che il Piròvano immagina più delicato, quasi direi *più tenero*, nel granello più giovane) può dipendere anche da un fatto più grossolanamente morfologico, microscopicamente dimostrabile, che non si sottrae come il primo a un'indagine diretta: il numero e lo stato dei nuclei nel tempo abbracciato dalla « jonolisi ». Io non so e non voglio adesso cercare come stieno le cose nelle piante sperimentate dal Piròvano; ma, parlando in generale, si sa che a questo riguardo vi sono differenze notevoli da pianta a pianta circa il momento in cui avvengono le divisioni nucleari del gametofito. E queste differenze sono di gran peso rispetto alla « jonolisi », in contrasto con quella prima approssimazione istintiva che porta a considerare globalmente i pollini di questa o di quella pianta, prima o dopo la loro emissione dall'antera: non è niente affatto indifferente che le qualsiasi forze « jonolitiche » incontrino nel loro percorso 1, 2, 3 o persino 4 o più masse nucleari; nei vari casi diverse per grandezza, forma, rapporti di posizione. Al contrario, questa considerazione dovrà avere importanza preminente, almeno fino a tanto che per l'azione della « jonolisi magnetica » si voglia accettare il modello proposto dal Piròvano, che lega così strettamente l'effetto conseguibile all'orientamento delle parti rispetto alla direzione delle forze « jonolitiche ».

IV. — Limitiamoci appunto a considerare alcune particolarità delle Angiosperme, piante più interessanti in vista dell'importanza pratica che il Piròvano prospetta per la sua « jonolisi », *nel che mi trova pienamente consenziente*.

Se alla « jonolisi » vien sottoposto un granello in cui sia avvenuta soltanto la separazione dei nuclei vegetativo e riproduttivo, allora non è proprio esattissimo il dire che essa agisce sul gamete, poichè il nucleo riproduttivo, spermatogeno, rappresenta soltanto *la sostanza da cui poi si formeranno i gameti*; e se alla « jonolisi » vien sottoposto uno di quei pollini in cui quest'ultima divisione nucleare è già compiuta ed i nuclei spermatici sono già separati, allora bisogna tener conto che essi sono *due*, generalmente, in ciascun granello: dunque una rettifica è necessaria in ogni caso. E siccome è anche diversa nelle diverse piante l'epoca, direi anzi più chiaramente *l'età* del granello pollinico, in cui avviene la divisione del primitivo nucleo della spora in nucleo vegetativo e riproduttivo, la conoscenza minuta, speciale, di queste particolarità caso per caso diventa necessaria per una consapevole applicazione del nuovo sistema.

Non è niente affatto la stessa cosa che la « jonolisi » si effettui su una data massa idioplasmatica prima o dopo la sua divisione. Io richiamo vivamente l'attenzione su di un fatto di primaria importanza, cui finora nessuno ha riflettuto: che se la « jonolisi » avviene *prima* di una divisione nucleare equazionale, è probabile, è quasi certo, che la corrispondente alterazione venga **distribuita del pari equazionalmente** tra i nuclei figli; ma se la « jonolisi » opera *dopo*, quando i due nuclei figli sono già separati ed hanno già avuto tempo di assumere quelle differenze (talvolta notevoli) di forma e grandezza che generalmente esistono in questa sorta di nuclei e, anche all'infuori di esse, un'immane diversa posizione rispetto ai centri di irradiazione delle forze « jonolitiche », allora diventa difficile pensare che i due nuclei possano subire un effetto « jonolitico » uguale tra loro ed uguale a quello che avrebbero subito nel primo caso, cioè nel caso che la « jonolisi » avesse agito sul nucleo padre da cui derivarono.

In *Lilium auratum*, p. es., si ha il caso, non abituale, di 3 nuclei entro la cellula riproduttiva, già nel granello, cioè prima dell'emissione del tubetto pollinico. È chiaro che jonolizzando entro l'antera il giovanissimo granello con un sol nucleo si avrebbe un dato effetto, un effetto diverso quando il nucleo vegetativo si fosse diviso dal riproduttivo, un altro effetto dopo la prima divisione di questo, ed un altro effetto ancora dopo la seconda divisione: la « jonolisi » incontrerebbe quattro oggetti assai diversi a seconda dell'età del granello, e questo può essere sufficiente, mi pare, per determinare quattro reazioni diverse ad una uniforme azione fisica. Alcune Angiosperme producono quattro nuclei maschili: non importa che taluno fra essi non abbia funzione genetica, sia sterile, perchè essi vanno considerati anzitutto fisicamente, come masse che non possono non avere reciproca influenza sui « campi di forza » che generano e che la « jonolisi » perturba.

Per lo stesso motivo va ponderata l'azione indiretta del nucleo vegetativo il quale talvolta si frammenta in diversi nuclei figli di *numero variabile a seconda delle condizioni di nutrizione* (persino 8!); va riflettuto che in qualche Angiosperma, prima ancora della separazione dei nuclei vegetativo e riproduttivo, si forma una vera cellula protallare che ricorda quella delle Gimnosperme; che l'ordinamento delle tetradi di microspore può essere diverso anche nello stesso sporangio, come è pure variabile il numero delle microspore derivanti dalle cellule madri; che persino nella stessa antera le cellule generative possono essere o no separate dal corpo delle spore con una distinta parete, e nelle diverse specie essere o no libere di movimento nel corpo del granello, nel qual caso autorevoli citologi credono probabile che la loro forma vari *con le età e con le esterne condizioni*, tanto da mostrarsi larghe o strette, sferiche o lenticolari, a fuso o vermicolari nella stessa specie.

Se poi si aggiunge che non c'è ragione, per nessuna pianta, di ammettere *a priori* che l'evoluzione dei granelli pollinici si compia nei micro-

sporangi con perfetto sincronismo, ed è anzi provata in molti casi la non contemporaneità di separazione dei nuclei vegetativo e riproduttivo, si vedrà che queste *variazioni* costituiscono altrettante spiegazioni da aggiungere a quella sola data dal Piròvano del polimorfismo di risultati in uno stesso esperimento, altrettante ragioni da aggiungersi a quella sola addotta dal Piròvano per spiegare il diverso successo dei diversi esperimenti; e che nel medesimo tempo esse offrono altrettante possibilità di manovra, altrettante prospettive di ulteriori conseguenze e di più completo dominio per questo nuovo artificio della « jonolisi ».

Ma restringiamoci pure soltanto alle vicissitudini del nucleo *riproduttivo* e troveremo altre e più dirette ragioni: i nuclei *spermatfici* possono separarsene già nel granello, molto prima della emissione di questo dall'antera, oppure soltanto nel tubetto appena prima della fecondazione; e tra i due estremi c'è tutta una serie intermedia di differenze. I morfologi han fatto lunghi elenchi di piante, distribuendole secondo queste differenze di cui han cercato il rapporto con le grandi divisioni della sistematica; ma poi hanno visto che il tempo di questa divisione nucleare può essere variabile persino nella stessa specie: in *Lilium philadelphicum* i nuclei spermatfici possono formarsi nel granello oppure nel tubetto. Lo studio di queste differenze, con la scoperta della « jonolisi » dovuta al Piròvano, scende immediatamente, per suo merito, dal campo della pura cognizione per diventare oggetto di applicazione, oso dire anche pratica, perchè p. es. tra le specie i cui nuclei spermatfici si formano già nel granello se ne registrano alcune di *altissima importanza agraria* ed i tentativi per ottenerne utili modificazioni saranno più diretti se guidati dalla cognizione esatta delle loro particolarità citologiche.

Non solo l'epoca di formazione, ma anche l'epoca di *trasformazione* dei nuclei spermatfici, deve interessare in sommo grado per la pratica condotta della « jonolisi ». In qualche specie veramente i nuclei spermatfici conservano la primitiva forma sferica; ma talora già nel granello *si cambiano rapidamente* in lunghi corpi fusiformi o ricurvi; e non è la stessa cosa per la « jonolisi » che la massa idioplasmatica le si presenti sotto questa o quella forma e con estensioni di superficie tanto diverse a poca distanza di tempo; oppure che le si presenti proprio nel momento medesimo della trasformazione.

I due spermî prodotti in ciascun granello sono forse sempre un po' diversi tra loro; ma talora la differenza è grande e si trova sferico l'uno, allungato o fusiforme l'altro: la conoscenza del diverso destino di ciascuno dei due, cioè di quale sia il generatore dell'embrione, diventa allora necessaria per discriminare i risultati della « jonolisi ».

E queste considerazioni divengono anche più generali quando si ammetta e si auguri che le esperienze di « jonolisi » possano estendersi anche al tubetto pollinico germinante nell'organo femminile, *come ne faccio proposta*.

V. - Ma comunque, se è vero che la « jonolisi » smembra le molecole dell'idioplasma e se è vero che la generalità di questa azione è condizionata dalla soluzione di problemi esclusivamente tecnici, essa azione deve esercitarsi su tutti e due i gameti destinati alla fecondazione dei due ovi: l'ovo principale e l'ovo accessorio, secondo l'espressione del Bonnier, con questa differenza però che l'embrione accessorio, l'albume, risulta in generale dall'unione di un sol nucleo maschile contro due femminili; diciamo pure nel nostro caso di uno « jonolizzato », contro due integri. Non c'è, nella formazione dell'albume, quella condizione di equivalenza tra le due masse idioplasmatiche, maschile e femminile, che invece si trova nella formazione dell'embrione vero, che solo si sviluppa in pianta. A confronto del quale l'embrione accessorio è un embrione ridotto, che secondo le comparazioni sostenute dal Bonnier equivarrebbe ad una specie di proembrione; è un essere ben poco differenziato, un organismo transitorio a funzione nutritizia, che sarà digerito dall'organismo fratello.

Ma appunto questo ci porge una semplificazione, una facilitazione estrema per i nostri studi: con un esperimento tanto esatto quanto rapido noi chiederemo precisamente allo sviluppo dell'albume una conferma di quella *retrogradazione della dominanza* che costituisce, senza dubbio, uno dei risultati più cospicui della « jonolisi ». Si tratterà di un esperimento che pur conservando un carattere strettamente genetico (riferendosi appunto alla dominanza ed alla sua attesa debilitazione) avrà il pregio di rispondere ai nostri quesiti nel giro di poche settimane, utilizzando appunto il fenomeno della « doppia fecondazione » nel cui effetto il de Vries dimostrò così brillantemente la doppia validità della regola di Mendel: tanto per l'embrione che per l'albume. Una differenza tra le due sorta di fecondazioni, per quel che riguarda la fusione dei nuclei, in quanto essi mostrino d'aver perduto più o meno completamente la loro individualità, è stata in qualche caso osservata. Che la triplice unione generatrice dell'albume possa fallire talvolta, e che il nucleo maschile possa dividersi indipendentemente dal nucleo secondario del sacco embrionale, oppure possa fondersi con uno solo dei nuclei polari mentre l'altro si divide per conto proprio, sono possibili spiegazioni escogitate, p. es., per i rari casi di endospermî screziati. Ma la linea generale del fenomeno resta quella stabilita dal de Vries: che il concetto di doppia fecondazione è pienamente corroborato dai risultati della doppia ibridazione. Il parallelismo tra la natura ibrida dell'albume e quella dell'embrione fa sì che la *xenia* costituisca in certo modo come un *indicatore* della natura e della forza dei caratteri introdotti nella costituzione genetica dell'embrione medesimo. Lo stesso deve essere per le modificazioni che vi apporta la « jonolisi ».

La sostanza del fenomeno è certamente generale, ma qui conviene più che mai di riferirsi a casi già perfettamente noti ed a caratteri che si estrinsechino in modo facilmente misurabile: il materiale migliore resta sempre

il Mais, oggetto di classiche ricerche. Anche qui, nell'albume, i caratteri della specie fondamentale dominano su quelli che possono considerarsi originati, con un passo retrogrado, come caratteri varietali: ciò è evidente pel colore, che predomina sulla condizione non colorata o meno colorata; è del pari evidente pel carattere amilaceo e per quello così detto zuccherino che resta dominato perchè il primo dipende dalla presenza d'idrati di carbonio a molecola più complessa di quelli cui è dovuto il secondo.

Se è vero che la « jonolisi » fa recedere i caratteri dominanti lo si deve vedere anche per questi; e si considereranno appunto il colore e la natura chimica della riserva ripetendo, con leggeri adattamenti, le celebri esperienze di Correns, de Vries ecc., ma con polline *variamente* « jonolizzato ». La regressione della dominanza, se è *graduale*, deve potersi seguire *passo passo* con l'analisi chimica. Prendendo come pollinifero un Mais amilaceo azzurro e come madre uno zuccherino bianco, le due coppie di allelomorfi in gioco potranno forse mostrare l'indipendente comportamento di fronte alla « jonolisi »; ma, dopo trovate le convenienti « intonazioni », una scarsa « jonolisi » dovrebbe lasciar quasi integra la duplice dominanza, una « jonolisi » media dovrebbe dare cariossidi in cui l'occhio e l'analisi chimica dovrebbero riconoscere l'intermediarietà.

Che se poi, in qualche caso, non si trattasse di regressione di dominanza; ma solo di sviluppo apomittico, probabile per l'albume, anche qui l'analisi mostrando i caratteri chimici del puro albume materno guiderebbe verso la retta interpretazione, che il microscopio dovrebbe confermare.

Duplica il vantaggio di questa esperienza: la rapidità ⁽¹⁾, e la misurabilità dell'effetto affidata ad un mezzo tanto vecchio e sicuro come è l'analisi chimica.

(1) La rapidità dei primi risultati non toglie l'opportunità di continuare l'esperimento anche lungamente. L'albume è tale un organismo che da se stesso non si riproduce; ma sulla pianta ibrida di F_1 si produce una generazione di albumi con le caratteristiche di F_2 . Se per le cariossidi ibride ottenute la prima volta non c'è altro da fare che stabilire questa specie di equazione: *doppia fecondazione* = *doppia ibridazione* = *doppia jonolisi*; per le cariossidi prodotte dalle piante di F_1 , e che rappresentano la F_2 , le cose si complicano. L'albume è uno strano organismo che, sotto un certo aspetto, può dirsi che abbia un padre e due madri; e la conseguenza genetica è che gli albumi della nuova generazione non sono già, come gli embrioni, di sole 3 sorta per ciascuna coppia di caratteri considerati: sono di 4 sorta, secondo le note formole:

$$\begin{array}{ccccccc} A & & a & & A & & a \\ A A & , & A A & , & a a & , & a a \end{array} \quad /$$

che rappresentano i 2 casi di ritorno alle condizioni parentali e 2 sorta di ibridi diversi. Se la jonolisi attenua il carattere dominante (A), ne risultano influenzate le 3 prime formole e così, scegliendo materiale e condizioni opportune, possiamo con un solo esperimento ottenere 3 gradazioni di effetto jonolitico: una possibilità di analisi del fenomeno così minuta e precisa non è offerta dall'embrione!

VI. - Del resto, se è vero che la « jonolisi » agisce smembrando le molecole del protoplasma, il suo studio è oggetto di fisiologia generale (e perciò di fisiologia cellulare) prima ancora che genetico. Sullo stesso polline la *durata della vitalità, la sensibilità del tubetto agli stimoli chemiotropici*; sulle spore e su altre cellule le *facoltà cromogene* e le *attività enzimatiche* possono venire studiate nelle modificazioni indottevi dalla « jonolisi », e forniscono altrettanti metodi rapidi per la sua investigazione.

Io mi auguro che mi sia possibile di riferire - l'anno prossimo - a codesta Accademia intorno a qualcuna delle accennate esperienze.

Embriologia. — *La genesi del pettine « Pecten », nello sviluppo dell'occhio degli uccelli* ⁽¹⁾. Nota del Dr. P. PASQUINI, presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE ⁽²⁾.

In due precedenti note ⁽³⁾ comunicai i risultati di recenti mie ricerche sulla origine del pettine nell'occhio del pollo (*Gallus domesticus* [= *gallus* L.]) rilevando di questo organo la sua doppia genesi: *il mesoderma costituisce la prima base formativa del pettine; la parete del calice ottico, prossima alla fenditura, coopera quindi alla sua formazione*. In ciò le mie conclusioni venivano a concordare nell'effetto, se non in alcune modalità, con i risultati delle ricerche di Bernd ⁽⁴⁾, di Mann ⁽⁵⁾ e di Lindahl-Yokl ⁽⁶⁾, dimostrando ancora una volta errata l'idea che il pettine degli uccelli sia un derivato esclusivo del mesoderma, interpretazione questa per molto tempo sostenuta per le ricerche di Froriep ⁽⁷⁾, Kessler ⁽⁸⁾ ed altri, cui si riferiscono le indicazioni bibliografiche della mia prima nota e recentemente da Slonaker ⁽⁹⁾ nel passero.

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Zoologia della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 4 luglio 1925.

(3) *La prima formazione del pettine « Pecten » nello sviluppo dell'occhio di « Gallus domesticus »*. « Rend. R. Acc. Naz. d. Lincei », vol. I, serie 6^a, fasc. 6, 1925.

— *Ancora sulla formazione del pettine « Pecten » nello sviluppo dell'occhio di « Gallus domesticus »*. « Rend. R. Acc. Naz. d. Lincei », vol. I, serie 6^a, fasc. 7, 1925.

(4) *Die Entwicklung des Pecten im Auge des Hühnchens aus den Blättern der Augenblase*. « Inaug. Diss. Bonn. », 1905.

(5) *The Pecten of Gallus domesticus*. « Quart. Jour. of Microsc. Science », 68, III-1924.

(6) *Ueber den Verschluss der fötalen Augenbecherspalte, die Entwicklung der Sehnervinsertion und die Anlage des Pecten bei Vögeln*. « Zeitschr. f. Anat. u. Entwicklungsgeschichte ». Bd. 63, Heft 3-4, maggio 1922.

(7) *Die Entwicklung des Auges der Wierbelthiere*. « Hertwig's Handb. d. Vergleich. u. experiment. Entwicklungslehre der Wilbeltiere ». Bd. 2, Th. 2, 1906.

(8) *Die Entwicklung des Auges der Wierbelthiere*. Leipzig, 1877.

(9) *The development of the eye and its accessory parts in the english sparrow « Passer domesticus »*; « Journal of Morphology », vol. 35, March, June, Sept. 1921.

Le notizie bibliografiche infatti, precedentemente esposte, dimostrarono le varie opinioni espresse in tempi successivi e dai diversi AA., circa la struttura e l'origine del pettine: destano l'attenzione i rapporti diretti di contiguità che esso ha con il nervo ottico e con la retina, ed i rapporti presumibili di origine con la coroide, con la quale il pettine ha comune una ricchissima vascolarizzazione.

Per la sua genesi, nel pettine si volle vedere una formazione annessa alla fessura coroidea che chiudendosi, nell'embriogenesi, per addossamento dei suoi labbri uno sull'altro, avrebbe lasciato penetrare nella cavità della vescicola ottica secondaria, la futura camera del vitreo, un nucleo di cellule mesodermiche alle cui spese si sarebbe andato costituendo, poi differenziandosi, il pettine. La sopra accennata contiguità del pettine con la retina, lo ha fatto anche interpretare come un derivato del foglietto embrionale esterno, per proliferazione della retina nella regione corrispondente alla papilla del nervo ottico e nell'adulto; non sono mancati gli AA., come il Leydig ⁽¹⁾, per quanto quest'idea, dovuta forse ad un esame troppo superficiale, sia stata del tutto abbandonata, che hanno richiamato l'attenzione sulla presunta analogia tra pettine e corpo ciliare, specialmente per ciò che riguarda la sua pigmentazione.

Si è inoltre discusso della origine della vascolarizzazione del pettine, che è sembrato a molti ricevesse i vasi dalla coroide: di questa alcuni elementi sarebbero stati trasportati dallo zaffo mesodermico primitivo nella vescicola ottica secondaria. Oggi però è indubitato che i vasi del pettine provengono dal suo vaso basale e cioè dai vasi della guaina del nervo ottico. Il trasporto di elementi della coroide embrionale è stato inoltre messo in dubbio ed io stesso non ho veduto, con certezza, tali elementi migrare insieme al mesoderma periglobulare ⁽²⁾.

Altre questioni sono state meta di ricerche, quali l'origine del pigmento che infarcisce le pareti dell'organo nell'adulto; le sue relazioni di distribuzione con i vasellini sanguiferi; la sua disposizione, se cioè extracellulare o endocellulare. A proposito del pigmento, mi sembra di un certo interesse un fatto che destò la mia attenzione e che incidentalmente presi in considerazione, allorchè estesi le mie ricerche ad altri uccelli. Come accade per la tunica media dell'occhio, così anche pel pettine, ad un certo momento dello sviluppo, che varia nelle diverse specie esaminate, si inizia la pigmentazione. Il pigmento, come ebbi modo di far noto precedentemente per *Gallus*, invade in primo luogo le pareti esterne del margine distale, poi quelle del margine basale, in embrioni di circa 170-200 ore. Orbene, a questa comparizione precoce del pigmento nel pettine embrionale di *Gallus*

(1) *Lehrbuch der Histologie der Menschen und der Thiere*, Frankfurt, 1857.

(2) Sulla morfogenesi dei vasi del pettine e sulla loro distribuzione, nell'occhio dell'adulto, spero potere completare alcune ricerche che ho in corso.

si contrappone sempre, per tutti i passeracei esaminati, una tardiva pigmentazione che si inizia solo dopo la schiusa del pulcino dall'uovo perfino alcuni giorni dopo. Precoce e tardiva pigmentazione del pettine sarebbero concomitanti dunque alla precocità della prole dei gallinacei e alla inettitudine di quella dei passeracei.

Per la sua morfogenesi molta analogia si determina fra pettine degli uccelli e le altre formazioni che nello sviluppo sono in intima relazione con la chiusura della fessura coroidea del calice ottico, quali l'*arteria centralis retinae* dei mammiferi, il pettine dei rettili, ecc.; d'altra parte la natura essenzialmente vascolare del pettine degli uccelli, in essi che hanno retina anangica o quasi, fa pensare alla funzione trofica che esso deve di conseguenza ricoprire per la retina in sostituzione dell'*arteria centralis*.

Nelle ricerche sulla genesi del pettine, data la difficoltà di avere a disposizione uova gallate di uccelli diversi, mi ero dovuto limitare allo studio della questione sul pollo, i cui embrioni con facilità si possono avere, ma non avevo abbandonato l'idea di confrontare i fatti osservati con quelli osservabili in altre specie non soggette a domesticità, quali anche l'anitra ed il piccione. Del resto i lavori del Bernd, di Mann e tutti quelli precedenti, meno la memoria di Parreidt⁽¹⁾, sono stati eseguiti su materiale di pollo. Solo il Lindahl pensò di estendere le osservazioni su *Anas*, *Podiceps* e *Passer* rilevando, ciò che ho potuto anch'io constatare, che solo con la comparazione del processo evolutivo del pettine, in diverse specie, si può rendersi un esatto conto di come vanno le cose.

Recentemente mi è stato possibile procurarmi una trentina di embrioni di passero, *Passer italiae*; alcuni di merlo, *Merula merula*; altri di pigliamosche, *Muscicapa grisola*; di verzellino, *Serinus serinus*; di sterpazzola, *Sylvia sylvia*; e qualche altro di quaglia, *Coturnix coturnix*.

I risultati di questa comparazione mi hanno fatto rilevare che: la formazione del pettine, che appare in queste specie più o meno precocemente nello sviluppo, procede similmente che nel pollo, cioè (vedi mie note precedenti), per l'interposizione di cellule mesodermiche, appartenenti al mesenchima periglobulare, fra i labbri della fenditura del calice, prima nella zona prossimale al peduncolo ottico, poi in quella distale, vale a dire la parte pupillare della fessura coroidea. Come nel pollo, nel piccione e nell'anitra, così anche nei passeracei e nei gallinacei selvatici esaminati, i labbri della fessura coroidea si sollevano verso l'interno del calice, divenendo adiacenti allo zaffo papillare del pettine primitivo. La congiunzione dei due labbri, quasi per apposizione, si compie con materiale mesodermico in parte fra essi interposto, in parte sgusciato fuori dalla fenditura nella cavità della vescicola ottica secondaria. Le porzioni dei due labbri, il nasale ed il temporale,

(1) *Beiträge zur Anatomie des Auges bei «Eudytes Chrysocome» und zur Entwicklung des Pecten im Vögelauge.* «Inaug. Diss.», Leipzig, 1901.

questo accentuatamente meno piegato del primo [fra loro facilmente distinguibili nei rapporti di posizione mantenuti pel meccanismo di chiusura della fenditura del calice], che si giustappongono, corrispondono a due segmenti del foglietto esterno o parietale della vescicola, le cui cellule, forse acquistando un diverso determinismo delle altre, forse mantenendo la condizione primitiva che è loro propria, non si unistratificano e per ora non si pigmentano. Il Bernd infatti accenna, nel suo lavoro, alla perdita di pigmento subita dal foglietto esterno lungo gli orli della fenditura, ma mi sembra sia più proprio parlare di una mantenuta condizione primitiva, confortati dai reperti dello stesso Lindahl, in quanto questi orli non sono stati mai pigmentati.

Risulta perciò evidente come la formazione del piccolo pettine primitivo sia intimamente legata col meccanismo di chiusura della fessura della vescicola ottica; potrebbe, però, sorgere la questione se debba considerarsi margine di saldatura il suo foglietto interno (retinale) o quello esterno come a me risulta. In realtà la Mann, nel succitato lavoro ed in altre due note precedenti ⁽¹⁾ ammise una crescita verso l'esterno del labbro interno retinico della fessura, labbro che fondendosi poi col suo opposto, avrebbe determinato quella formazione da lei indicata col nome di *crista intraocularis*, formazione corrispondente in modo preciso al risultato della fusione delle due creste delle pareti del calice, laterali alla fenditura, da me descritte. Parlare di eversione del foglietto retinale, all'esterno, verso la fessura coroidea è per lo meno poco prudente, quando, alla luce dello studio della topografia delle stesse cellule che costituiscono le pareti della fessura, risulta nel modo più chiaro possibile, il concreocere descritto dei labbri verso l'interno. Ma i limiti fra le pareti della vescicola ottica in prossimità della fenditura sono così netti e precisi, come nette sono le dissomiglianze fra il foglietto esterno unistratificato e pigmentato, e quello interno non pigmentato e di più strati cellulari? Mi sembra che volere stabilire tali limiti netti fra i due strati che in corrispondenza dei margini della fenditura passano gradatamente uno nell'altro, sia, per le ragioni stesse di formazione della vescicola secondaria dalla primaria, tanto poco preciso, quanto, per lo meno, un poco arrischiato. Tutto ciò mi ha dimostrato un accurato esame comparativo delle numerose serie di embrioni, per cui le orientazioni diverse nel taglio sono forse la chiave migliore, per seguire la embriogenesi del pettine. Le due creste salienti all'interno del calice sono evidenti, come evidente è lo zaffo mesodermico nel solco della fessura, il quale accentuatissimo, più che nella parte prossimale al peduncolo, lo è nella sua regione pupillare, che raggiunge con i capillari sanguiferi trascinati insieme e che presto scompaiono, rappresentando gli omologhi della arteria jaloidea.

(1) *On the development of the fissural and associated regions in the eye of the chick, with some observations on the mammal.* « Journ. of Anat. ». Vol. 55. 1921.

— *On the morphology of certain developmental structures associated with the upper end of the choroidal fissure.* « The British Journal of Ophthalmology ». Aprile 1922, Londra.

Quanto ho detto si ritrova comune nella morfogenesi dell'occhio delle diverse specie di uccelli studiate, e conferma, in parte, i reperti di Slonaker pel passero, secondo il quale la emigrazione degli elementi mesenchimatici, in cui sarebbero coinvolti piccoli vasi sanguiferi e trascinate cellule della coroide, sarebbe l'unica causa e l'unico modo di formazione del pettine. La riferita cooperazione retinica osservata da altri, e da me, nelle sopradette specie, non sarebbe divisa dal detto autore.

Per quel che riguarda la chiusura del calice ottico, questa va considerata nelle tre regioni della fenditura: la prossimale al peduncolo ottico; la mediana; e la distale o terminale: quest'ultima in corrispondenza dell'apertura pupillare. La prossimale è la prima a chiudersi ed è perciò quella dove si costituisce per primo il piccolo pettine, che, man mano che si va formando nelle altre regioni (per ultimo nella distale), segue il decorso e la traccia della fessura del calice. In tal modo ne deriva che: la sede precisa del pettine nell'occhio dell'adulto (ciò vale per il pollo) sia quella di una lamina (vedi mia nota II) frastagliata, di forma presso che trapezoidale distesa quasi perpendicolarmente al fondo dell'occhio, nel suo emisfero posteriore, occupante il segmento meridionale del globo ed iniziandosi dove il nervo ottico penetra in esso. In altri termini il suo orlo inferiore o prossimale, che con Virchow⁽¹⁾ possiamo denominare la sua *base*, sta in corrispondenza della traccia della fessura ottica con la quale il pettine ha, come sopra ho detto, intime relazioni di origine. La base del pettine sta quindi impiantata sulla papilla del nervo ottico che qui negli uccelli è una vera *lista coeca*, presentandosi anzichè circolare, allungata, elissoide, fessuriforme ed avvallata. Il nervo ottico degli uccelli, invece di giungere direttamente alla retina attraverso la sclera per la sua lamina cribrosa, scorre lungo la parete del bulbo emettendo nel suo cammino i fascetti di fibre che giungono alla retina. Lungo la lista ceca, nel suo lieve infossamento, scorre il vaso basale del pettine e da esso questo si estende nel vitreo diversamente nelle varie specie, in alcune delle quali raggiunge anche l'equatore del bulbo.

Il peduncolo ottico a misura che riceve le fibre dalla retina si distanzia dal piccolo pettine che occlude la fessura. Nella sua zona prossimale non rimane di essa che la traccia.

I fatti rilevati nella genesi del pettine, si inquadrano nel problema più generale della sua omologia con certe strutture che si associano durante lo sviluppo alla fessura coroidea e che in questi ultimi tempi hanno destato vivo interesse, essendo state messe in rilievo principalmente per le ricerche di I. Mann, ma di essi tratterò in modo speciale, quando mi occuperò, estesamente, della embriogenesi e morfogenesi di questo organo.

(1) VIRCHOW HANS, *Fächer, Zapfen, Leiste, Polster, Gefäße im Glaskörperraum von Wirbeltieren sowie damit in Verbindung stehende Fragen*. « Ergebnisse der Anatomie und Entwicklungsgeschichte ». X Bd., 1900.

Biologia. — *Sul comportamento ereditario del tipo di sviluppo larvale negli incroci tra bachi da seta a tre e a quattro mute.* Nota di C. JUCCI presentata dal Corrisp. A. RUSSO ⁽¹⁾.

Nello studio della seconda generazione di incroci tra razza di bachi da seta a tre e a quattro mute⁽²⁾ un fatto si è manifestato in tutta evidenza: che le condizioni esterne di allevamento hanno una grandissima influenza sul comportamento ereditario del carattere, cioè sulla proporzione reciproca di terzini e quartini in un lotto. Così per le ovature isolate allevate in un ambiente piuttosto fresco ed umido, nel quale lo sviluppo larvale si è prolungato notevolmente, la percentuale dei quartini è risultata parecchio più elevata che per i gruppi di ovature; e tra questi è stata più elevata nei lotti incubati a bassa temperatura (18°), che in quelli ad alta (25°): in relazione forse più con le conseguenti differenze di condizioni nello sviluppo larvale, che nell'embrionale.

Le ovature isolate hanno dato tutte bachi parte terzini, parte quartini, e quelli sempre o quasi più numerosi di questi; ma in proporzioni varie, diverse da ovatura a ovatura, e, tranne per pochi casi, molto distanti dal classico rapporto di 3 : 1. Anche a voler considerare complessivamente tutte le ovature isolate come se, invece che una per una, fossero state allevate tutte in un lotto, si trova un rapporto di scissione lontano dalla aspettazione mendeliana: 6116 Treotti : 3871 quartini = 1,58. Ripetendo il calcolo per i soli ♀ Treotti ♂ bivoltino (24 ovature) si ottiene un rapporto poco diverso: 3410 Treotti : 1882 quartini = 1,79.

Sicchè, se il fatto della netta dominanza (sebbene non proprio assoluta) del carattere 'tre mute' sul carattere 'quattro mute', nella prima generazione dell'incrocio; e il fatto che nella seconda generazione avviene scissione dei caratteri, sicchè ogni ovatura dà treotti o quartini, e i primi sempre o quasi in numero maggiore dei secondi; dispongono a credere che il comportamento ereditario del carattere 'numero delle mute', sia mendeliano; però i valori trovati per le percentuali reciproche di treotti e quartini non stanno affatto in accordo coi rapporti mendeliani.

Però quasi sempre la differenza è a favore dei quartini. Ora, essendo ben certo che le condizioni d'allevamento influiscono assai sul comportamento ereditario del carattere, nel senso di determinare, ove siano poco fa-

(1) Presentata nella seduta del 5 giugno 1925.

(2) Questi « Rendiconti », ser. VI, vol. I, p. 683.

vorevoli, un aumento grande del numero dei quartini, potrebbe supporre che questo fatto tenda a mascherare il rapporto mendeliano di scissione (che potrebbe inoltre essere complicato dall'imperfetta dominanza del carattere 'tre mute' sul carattere 'quattro mute').

D'altro canto l'aver ottenuto da lotti, in gruppi e ad ovature isolate, allevati in condizioni identiche, rapporti assai disparati, dimostra, malgrado tutte le possibili cause d'errore, che esiste, tra i prodotti dell'incrocio, una grande variabilità individuale nel carattere di tendenza al treottismo; e il fatto che la progenie d'individui più o meno precoci nello sviluppo dà rapporti di scissione, cioè percentuali di treotti rispetto ai quartini, diversi, e precisamente tanto più alti quanto più i genitori furono precoci, dimostra una interessante correlazione con la variabilità individuale delle capacità metaboliche.

Forse se il numero delle ovature isolate fosse stato maggiore, sarebbe stato possibile tracciare, per ogni incrocio, una curva di variazione che ci avrebbe espresso l'oscillazione della capacità di treottismo intorno ad un valore intermedio, prodotto della reazione dei due tipi metabolici delle razze incrociate.

Consapevole di tutte le difficoltà d'una risposta definitiva, ed ansioso di ottenerla certa ed inconfutabile, ho utilizzato alcune ovature di ♀ Treotti ♂ Nippon., della seconda generazione, che, conservando il bivoltinismo, sono schiuse pochi giorni dopo la deposizione.

Ho così allevato nel luglio-agosto i discendenti, di terza generazione, dei treotti e dei quartini. I primi mi hanno dato individui in massima parte treotti e in piccola parte a 4 mute. Anche questo risultato sarebbe in linea generale d'accordo con l'aspettazione mendeliana, dovendo i treotti della seconda generazione essere per due terzi eterozigoti e dare quindi di nuovo la scissione 3:1. Tanto più che un altro lotto di ovature, allevate in gruppo, deposte da farfalle treotte, ha dato una percentuale solo assai bassa di bachi a 4 mute, sì da riceverne l'impressione che si tratti di individui omozigoti la cui progenie solo per le condizioni sfavorevolissime, per un complesso di ragioni evidenti, dei secondi allevamenti, sia riuscita in piccola parte a 4 mute.

Quanto ai discendenti di quartini, un lotto di 3 ovature quartine allevate assieme ha dato una piccola percentuale d'individui a 3 mute; e qualche individuo a tre mute hanno dato anche alcune ovature quartine isolate. In altre però tutti gl'individui sono riusciti a 4 mute.

E così non abbiamo ancora la risposta definitiva. Perché, dato che la dominanza del carattere 'tre mute' sul carattere 'quattro mute' non è perfetta, non tutti i bachi che fanno 4 mute nella seconda generazione sono omozigoti recessivi; qualcuno sarà eterozigote ed è naturale che nella terza generazione dia ancora una certa percentuale di individui a 3 mute. Sicché, per dimostrare l'inesistenza di una scissione mendeliana del carattere, donde

individui omozigoti, bisognerebbe dimostrare la presenza di bachi treotti nella discendenza non solo di qualcuno, ma di parecchi, e magari molti, individui a 4 mute della seconda generazione.

Naturalmente le condizioni sfavorevoli della generazione estiva erano tutt'altro che adatte a questa dimostrazione. Basti dire che in qualche ovatura il numero degli individui giunti alla fine dello sviluppo è stato di poche decine e che in tutte una notevole percentuale di bachi restavano indietro, nel corso dell'allevamento, e si trascinavano poi lentamente facendo un numero di mute poco precisabile, ma probabilmente in molti casi superiore a quattro, fino alla morte per flaccidezza.

Bisogna attendere dunque, per una risposta decisiva, l'allevamento della terza generazione — discendenti di quartini e discendenti di terzini — nella prossima primavera.

Nella primavera scorsa ho condotto anche un'esperienza di reincrocio tra la razza pura a carattere dominante e l'ibrido: ♀ Treotti ♂ (♀ Nippon. ♂ Treotti). Da 5 ovature allevate promiscuamente ho ottenuto individui tutti treotti, meno pochissimi a 4 mute dei quali non è a far gran conto, potendo, in dipendenza di condizioni d'allevamento, capitare, anche in razze pure di treotti, qualche individuo che fa 4 mute.

Ora però, se il risultato di questo reincrocio corrisponde all'aspettazione mendeliana — per la quale reincrociando l'eterozigoto coll'omozigoto dominante si ottengono tutti individui a carattere dominante — esso può spiegarsi anche indipendentemente dalla legge di Mendel, nello stesso modo come si può spiegare l'ottenersi quasi tutti individui a tre mute dall'incrocio tra un individuo di razza treotti e uno di razza quartina: questi fatti dimostrano non la mendelianità del carattere, ma solo la dominanza dell'un carattere sull'altro.

Biologia. — *Sul metabolismo embrionale dei Teleostei.* — *Gli aminoacidi derivati dalla degradazione della capsula e loro rapporto con l'embrione*⁽¹⁾. Nota del dott. ETTORE REMOTTI, presentata dal Corresp. S. BAGLIONI.

La biologia delle uova dei Teleostei è un vasto e complesso campo di ricerche su cui s'innesta tutta una serie di problemi che attendono ancora una soluzione.

Sono particolarmente i fenomeni del metabolismo embrionale — composizione, concentrazione, pressione dei liquidi interni ecc. coi quali si ricol-

(1) Lavoro eseguito nel R. Laboratorio centrale di Idromeccanica di Roma; presentato nella seduta del 5 giugno 1925.

legano importanti quistioni biologiche — quelli che presentano maggior interesse al riguardo.

Precedenti mie ricerche, ⁽¹⁾ dirette a chiarire la ragione della progressiva diminuzione di resistenza della capsula che, capace di opporsi, nei primi momenti, a notevoli azioni meccaniche, va progressivamente indebolendosi fino ad essere lacerata dai lievi movimenti della piccola larva, avevano dimostrato, nel liquido perivitellino delle uova dei Teleostei, la presenza di fermenti, ad azione spiccatamente proteolitica, ai quali devonsi attribuire, per un processo di disintegrazione chimica, la demolizione della capsula, permettendo al momento opportuno la fuoruscita della larva.

Dalle osservazioni poi sullo sperma, sul liquido perivitellino di uova non fecondate, e sul liquido perivitellino di queste, dopo aver sostituito (partendo dal concetto di una possibile kinasi) all'azione dello spermio quella dei sali di calcio che, com'è noto, agiscono come attivanti degli enzimi, ero portato a concludere che tale fermento si manifestava dopo l'atto fecondativo, come espressione di un'intima reciproca reazione delle due proteine (maschile e femminile) venute a contatto; che per tale fermento il liquido perivitellino veniva a formare una vera e propria barriera *antixenica*, lungo la quale le proteine estranee, che tentassero di farsi strada al piccolo essere in formazione, verrebbero aggredite e demolite. Cosicché la demolizione della capsula risulterebbe un caso particolare, ma importantissimo, di tale attività, la quale, mentre rispetta le proteine viventi dell'embrione, e demolisce tutti gli elementi proteici ad esso estranei, finisce coll'aggredire anche la capsula, che, a differenza delle proteine cellulari, va diventando col progredire dello sviluppo, e sempre più accentuatamente, qualche cosa di estraneo all'intimo edificio chimico dell'embrione, qualche cosa di nemico per la piccola larva, la quale viene a trovare in quella che era preziosa culla non più l'elemento di difesa — soprattutto meccanica — ma l'ostacolo più grave che la trattiene prigioniera.

Colla fecondazione poi, e attraverso una reazione di carattere immutario, verrebbero a individuarsi e localizzarsi nel liquido perivitellino quelle profonde modificazioni — culminanti in un'azione antispermica — che negli altri gruppi dobbiamo ritenere ancora confuse nel complesso chimismo dell'ooplasma.

*
* *

Data l'importanza dell'argomento ho approfittato del ricco materiale ittico del R. Stabilimento Ittiogenico, messo gentilmente a mia disposizione dal direttore prof. Chiappi, per estendere lo studio delle proprietà del liquido

(1) *Contribution à l'étude des processus de la fécondation*. « Arch. Intern. Pysiol », 1922.
Azione proteolitica e funzione antixenica del liquido perivitellino in uova di Teleostei. « Reale Acc. Peloritana », vol. XXX, 1923.

perivitellino dei Teleostei e indagare il destino dei prodotti derivati dalla proteolisi della capsula, avvalendomi, questa volta, del metodo di Abderhalden ⁽¹⁾ della ninidrina (trichetoidrindene idrato).

Questo reattivo, noto per la ricerca biologica della gravidanza, può essere usato in modo analogo ed in via generale per la ricerca dei fermenti proteolitici e peptolitici; si adatta anche per quei prodotti di decomposizione dell'albumina che non presentano più la reazione del biureto.

Mi sono servito di dializzatori N. 579-A della ditta Schleicher e Schüll in Duren (Rheinland) nei quali ponevo il liquido che gemeva dalla rottura della capsula prima di procere alla dialisi.

Ed ho applicato anche il metodo usando, come membrana dializzatrice, la membrana stessa delle uova.

Basta per tal fine mantenere le uova da 5 a 10 ore ⁽²⁾ in recipienti a chiusura batteriologica e in acqua sterile ed aereata. Questo tempo sarebbe più che sufficiente per la diffusione degli aminoacidi nel liquido circostante il cui volume, per il buon andamento della reazione e della vita dell'embrione, era regolato in modo che ad ogni uovo corrispondessero 15 cc. di acqua. Tale quantità veniva cimentata con 0,02 cc. di una soluzione di ninidrina all'1 per cento.

Per non allontanarmi dalle condizioni normali di vita di questi stadi la dialisi veniva effettuata non oltre i 18 gradi C.

Il sistema di usare direttamente la membrana dell'uovo come dializzatore, offrendomi da un lato l'occasione di estendere lo studio delle proprietà fisiche della membrana stessa, ⁽³⁾ mi ha portato d'altra parte a nuovi risultati ed a considerazioni inaspettate sul metabolismo embrionale di questi esseri, ciò che costituisce appunto la ragione della presente nota.

Le mie esperienze vennero condotte su un rilevante numero di uova di salmoni del Reno (*Salmo salar* L.).

Queste uova, sebbene di diametro maggiore, non offrono la quantità di liquido perivitellino dei *Murenoidi* J. Müller, gruppo da me già prescelto ed in cui lo spazio interposto fra tuorlo e capsula è relativamente grandissimo: il più ampio tra i Teleostei.

Perciò, specialmente quando ci preme di esaminare l'azione proteolitica, bisogna pungere la capsula con molta prudenza per evitare che il vitello si mescoli con il liquido perivitellino, risultandone in questi casi — come ho messo in evidenza nelle precedenti mie ricerche ⁽⁴⁾ — una spiccata

(1) ABDERHALDEN, *Schutzfermente des tierischen Organismus*. Springer - Berlino; Id. *Handbuch der biochemischen Arbeitsmethoden*.; Id. *Zeitschrift für physiologische Chemie*. Vol. 77-81.

(2) Oltre le 10 ore cominciano a notarsi segni di sofferenza da parte dell'embrione.

(3) *Sulle variazioni di resistenza della capsula ecc.* R. Acc. Naz. Lincei, 1922.

Désagrégation et dégradation protéique de la capsule etc. Arch. Int. Physiq, 1924.

(4) *Azione proteolitica, ecc.* Op. cit.

attenuazione del potere fermentativo, come se dati costituenti dell'embrione, con meccanismo ancora da determinare (probabilmente per *assorbimento*), esplicassero un'azione modificatrice sulla velocità di reazione.

Metodo di dialisi	Durata della dialisi	Temperatura	RISULTATI					OSSERVAZIONI
			Esp. I	Esp. II	Esp. III	Esp. IV	Esp. V	
1 { A	10	10°	+	+	+	+	+	
1 { B	»	»	—	—	—	—	—	
2 { A	7	12°	+	+	+	+	+	
2 { B	»	»	—	—	—	—	—	
3 { A	6	15°	+	+	+	+	+	
3 { B	»	»	+ —	—	—	—	—	1ª Esperienza dubbia
4 { A	5	18°	+	+	+	+	+	
4 { B	»	»	—	+ —	—	—	—	2ª Esperienza dubbia

A=dializzatori N. 579-A della casa Schleicher e Schüll in Duren (Rheinland).

B=capsula dell'uovo.

L'analisi diretta del liquido, proveniente dalla rottura della capsula, ci rivela la presenza di gruppi aminici e, poichè la reazione è positiva anche nel dializzato (dializzatori di Abderhalden), parte di questi gruppi debbono appartenere agli ultimi gradini della demolizione proteica: agli aminoacidi.

In secondo luogo, il sistema di servirsi direttamente della capsula come membrana dializzatrice ci insegna che questi aminoacidi non diffondono all'esterno dell'uovo, dato questo che potrebbe servire a lumeggiare alcuni punti della vita embrionale dei Teleostei.

Questo comportamento degli aminoacidi nei Teleostei ci richiama quello dell'urea nei Selaci e le considerazioni del Baglioni ⁽¹⁾ a proposito delle sue ricerche sull'azione fisiologica dell'urea in queste forme: « Si osserva cioè in questi animali il fenomeno singolare e interessante per la fisiologia generale di una forte ritenzione nel sangue di una sostanza così facilmente diffusibile, ma pure tanto utile per questi animali ».

Quale sia il meccanismo per cui la membrana, lungi dal lasciare sfuggire i prodotti solubili della demolizione delle sue stesse proteine, li trattiene

(1) *Contributi sperimentali di fisiologia comparata*. « Soc. dei XL ». Serie 3ª, tomo XIX,

nell'interno dell'uovo ⁽¹⁾, non sappiamo. Il fatto, però, sembra particolarmente interessante dal punto di vista biologico, poichè starebbe a significare un prezioso adattamento della vita embrionale.

Questi materiali infatti potrebbero:

a) fisicamente, aumentando la concentrazione, e con essa la pressione osmotica del liquido perivitellino, contribuire, mediante l'assorbimento di nuova acqua, a quell'aumento di pressione interna e quindi a quello *sfibramento* meccanico della capsula che abbiamo visto ⁽²⁾ essere uno dei fattori che intervengono nella liberazione della larva;

b) come pietra di costruzione delle proteine - dispersi nella idrosfera che avvolge il tuorlo, attraverso alla quale l'embrione attinge all'ambiente esterno - assumere importanza plastica per l'essere in via di sviluppo: la membrana degradata dall'azione fermentativa, potendo allora essere non soltanto l'involucro protettore del fragile embrione, ma anche una riserva nutritiva per il suo accrescimento; tanto più che, nel nostro caso, all'obiezione (Lutz) che questi composti sono facilmente alterati dai microrganismi, possiamo aggiungere che il liquido perivitellino esercita un'azione antixenica, per cui difficilmente possono albergare germi nello spazio fra tuorlo e membrana.

Anche qui troviamo qualche analogia con i Selaci. « È nota - dice il Baglioni ⁽³⁾ - la rapida azione dei germi dell'aria - *Micrococcus ureae* - specialmente in estate, sulle soluzioni contenenti urea, che determinano la fermentazione ammoniacale. Come ho al principio incidentalmente ricordato nelle mie soluzioni era già dopo 2-3 giorni dimostrabile forte quantità di ammoniaca: donde la necessità di preparare sempre di nuovo le soluzioni ureiche, man mano che dovevano servire per gli esperimenti. Se però la soluzione ureica rimaneva a contatto col cuore sopravvivate, non avveniva *mai* fermentazione finchè il cuore pulsava: il che poteva, come abbiamo visto, durare vari giorni. Appena però si arrestava, entro poche ore si sviluppavano i germi, producendo ammoniaca nella soluzione. Vediamo, dunque, che un organo isolato impedisce lo sviluppo di una data specie di microrganismi non patogeni, finchè esso vive. Mi pare valga la pena di continuare l'osservazione, cercando di stabilire in quest'organo, che si presta allo studio, il meccanismo di tale azione battericida ».

Forse questa, astrazione fatta dalle condizioni della membrana, è anche la ragione per cui i prodotti terminali del catabolismo delle proteine, che

(1) Se mai, volendoci riferire ai due casi dubbi dell'esperienza 3 B I, e 4 B II, il passaggio sarebbe minimo, tanto più che, come è noto, la reazione è estremamente sensibile. Gli aminoacidi potrebbero forse diffondere oltre una determinata concentrazione che probabilmente non si raggiunge per la condizione b).

(2) *Meccanismi di schiusa in uova di Teleostei*. « Memoria CXVI del R^o Comit. Tass. It. ».

(3) Op. cit.

sappiamo essere urea e composti ureici, e che devono pur versarsi nello spazio perivitellino, sono difficilmente attaccati dal *Micrococcus ureae*.

Senza dimenticare che un organismo può essere influenzato, e nella nascita e nello sviluppo, da numerose cause, possiamo poi aggiungere alcune considerazioni che muovono da fatti e dottrine che hanno a più riprese interessato i biologi ed attribuire infine agli aminoacidi un'azione sulla fase dello sviluppo.

Già l'Humboldt ⁽¹⁾, mosso dal desiderio di poter riuscire a far germinare semi vecchi, rinvenuti negli scavi dell' antichità, o provenienti da luoghi molto lontani raccolti durante i suoi grandiosi viaggi, ne aveva visto la germinazione in breve tempo sotto l'azione di cloro gasoso.

Queste ricerche vennero continuate in seguito da vari autori, fra cui citerò Remond ⁽²⁾, Göppert ⁽³⁾, Blengini ⁽⁴⁾, Nobbe ⁽⁵⁾, Popoff ⁽⁶⁾.

Recentemente il Lo Monaco, nello studiare i mezzi di difesa contro il fosgene (ossicloruro di carbonio), ebbe l'occasione di trovare che alcune sostanze, quali fieno, foglie fresche, erbe, alghe marine, non lo lasciavano passare, per cui, nell'indagarne le ragioni, riprendeva, attraverso l'azione idrolizzante degli alogeni sulle proteine, il problema della germinazione, cercando di darne una interpretazione di ordine generale.

Le ricerche del Lo Monaco ⁽⁷⁾ hanno messo in rapporto la germinazione con la comparsa di aminoacidi: la formazione di prodotti d'idrolisi proteica rappresenterebbe uno stimolo chimico allo sviluppo.

È noto poi che l'animale, e questo vale anche nelle forme inferiori ⁽⁸⁾, può nutrirsi con diete ricche e con diete scarse; ma, tanto nell'un caso che nell'altro, il ricambio organico ne viene eccitato.

Ora la capsula - in quanto rappresenterebbe, per quello che abbiamo detto, il primo alimento proveniente dall'ambiente esterno, in virtù del fatto sopra accennato - deve promuovere fenomeni litici che nel periodo embrionale significano messa in libertà di prodotti e quindi accrescimento: la condizione necessaria per crescere essendo, in questo periodo di assoluto predominio anaplastico, quella che le riserve vitelline siano solubilizzate.

Per queste considerazioni, gli aminoacidi, provenienti dalla disintegrazione della capsula, potrebbero essere ad un tempo materiale plastico e stimolo all'accrescimento, tanto più se si pensa che abbondanza di aminoacidi nel

(1) *Aphorismen a. d. Chem. Phys.*, 1794.

(2) «*Courrier de l'Ain*», Fevrier 1824.

(3) «*Frorieps Notizen*», n. 861, 1834.

(4) «*Journ. Pharm. et Chim.*», Tome XXV, 1839.

(5) *Handbuch der Samen-Kunde*, 1876.

(6) «*Journal de Phys. et Path. Generale*», XXII, 1924.

(7) *Su un nuovo fertilizzante*. «*Staz. Sperim. Agr. It.*». Vol. LVII, 1924.

(8) REMOTTI, *Sul metabolismo dei Celenterati*. «*Boll. Ist. Zool.*», Roma, 1925.

liquido perivitellino significa, appunto, avanzata degradazione e quindi imminente rottura della capsula.

Stando così le cose, noi dovremmo, accanto alle condizioni *a)* e *b)*, più sopra accennate, aggiungere anche il concetto dello stimolo, per modo che l'accrescimento verrebbe a svolgersi in armonico collegamento con quei processi fermentativi che, agendo sulla capsula, vanno preparando le vie della liberazione.

Fisiologia. — *La eccitabilità della retina in rapporto con la durata dello stimolo.* Nota ⁽¹⁾ di MARIANNINA LEVI presentata dal Corrisp. HERLITZKA.

Il problema dell'eccitabilità retinica è stato soprattutto considerato e studiato in rapporto con uno stimolo costituito da illuminazione continua, tenendo conto soltanto o della quantità minima di energia capace di dare eccitamento, o dei rapporti fra l'aumento della sensazione e l'aumento della intensità luminosa.

Invece per l'eccitabilità dei tessuti in generale e in particolare modo per i muscoli ed i nervi, è stato dimostrato che vi è un fattore molto importante che interviene a far variare la quantità di energia necessaria per dare l'eccitamento, ed è il tempo durante il quale lo stimolo agisce.

Per queste variazioni della quantità di energia è stata stabilita la legge di Weiss, la quale dice che la quantità è composta di una parte fissa e di un'altra parte variabile col variare della durata dello stimolo:

$$Q = a + bt$$

Bloudel e Rey avrebbero trovato che tale legge vale anche per l'eccitamento retinico, mentre Piérau troverebbe una diminuzione dell'energia per tempi brevi con un aumento successivo col prolungarsi di questi.

Per studiare se anche per la retina la durata dello stimolo avesse influenza sulla quantità di energia necessaria per ottenere l'eccitamento, ho intrapreso una serie di ricerche e ho cercato di stabilire tale funzione del tempo.

Ho adoperato un dispositivo che mi permetteva di illuminare la retina durante dei tempi variabili, e che potevano essere ridotti a frazioni di millesimi di secondo. La soglia veniva cercata variando l'intensità della luce che cadeva sulla retina, il che si otteneva facendo passare il raggio luminoso attraverso due nicol, dei quali uno rimaneva fermo e l'altro veniva

(1) Presentata nella seduta del 21 giugno 1925.

fatto ruotare; il coseno quadrato dell'angolo formato dai due nicol fra di loro ci dava l'intensità relativa della luce che cadeva sulla retina.

Ho adoperato per l'illuminazione sia luce bianca che luci monocromatiche di tre regioni dello spettro, e precisamente luce rossa con una λ da 6350 a 6390 U. Å., luce verde con λ da 5045 a 5090 U. Å., e luce violetta con λ da 4507 a 4490 U. Å.

Gli esperimenti procedevano nella seguente maniera: si determinava la soglia con la luce permanente, poi si variava la durata dell'illuminazione con quella data luce e si determinava per ogni tempo la soglia. Non sto a riportare i valori dei singoli esperimenti, che saranno pubblicati ulteriormente, ma esporrò brevemente quali sono i risultati ottenuti per le varie luci.

Una prima constatazione che ho fatta è che la quantità della luce è una funzione del tempo durante il quale essa agisce sulla retina, ma che non è proporzionale ad esso.

Inoltre si osserva che le variazioni della quantità in funzione del tempo sono diverse per le diverse luci che si sono adoperate come stimolo, per la luce bianca e per luci monocromatiche di diverse regioni dello spettro.

Dall'esame della grafica costruita per la luce bianca (v. figura) si osserva che la quantità di luce necessaria perchè si abbia l'eccitamento retinico cresce dapprima col crescere del tempo, in seguito diminuisce. È ovvio che qui non può valere la legge di Weiss, che rappresenta una linea retta: essa forse potrebbe valere per il primo tratto, il che significa che per brevissimi periodi di illuminazione la retina segue riguardo alla sua eccitabilità quella legge che è generale per i tessuti. Ma poi, per durate più lunghe di illuminazione, la quantità necessaria per l'eccitamento diminuisce. Ho trovato che l'andamento generale delle variazioni della quantità in funzione della durata dello stimolo è espresso dalla formula:

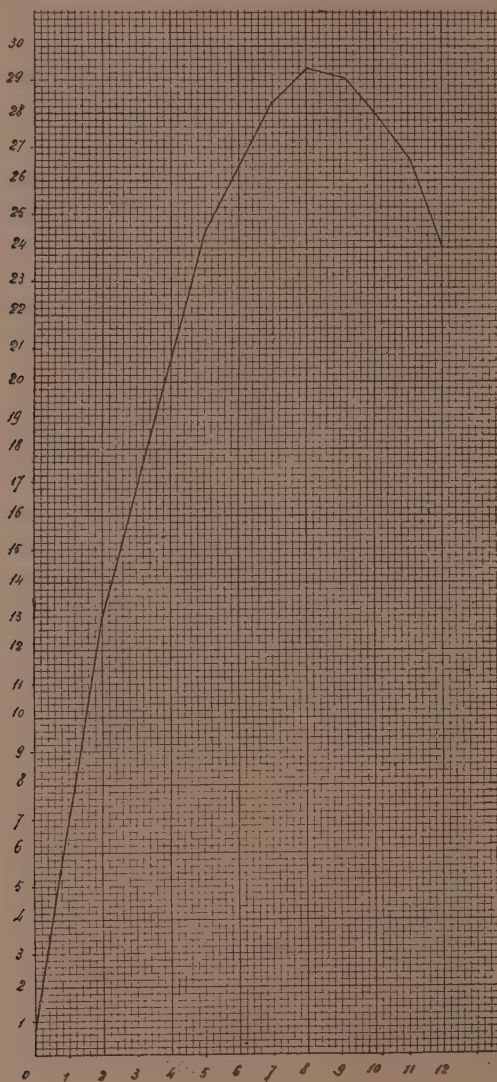
$$Q = a + bt + ct^2$$

in cui a , b e c sono costanti: a è una quantità, b una intensità, e c è un coefficiente di segno negativo.

Perciò questo termine di segno negativo, che varia col quadrato del tempo secondo un basso coefficiente, avrà solo per una lunga durata di illuminazione una sensibile azione nel far diminuire la quantità di luce necessaria per avere l'eccitamento retinico.

Qui sembra dunque intervenire, con durate relativamente lunghe di illuminazione, un aumento della eccitabilità della retina; ma questo fatto si può meglio spiegare con una proprietà fisiologica comunemente nota, con la persistenza delle immagini postume. Avverrebbe cioè che l'effetto dell'eccitamento che si produce in un primo tempuscolo sulla retina non scompare immediatamente, ma in parte si somma con l'effetto dell'eccitamento

che si produce nel tempuscolo successivo, e così via. Questa persistenza dell'effetto dell'eccitamento farà dunque diminuire l'intensità della luce necessaria a dare nei tempuscoli successivi l'eccitamento retinico, ma solo



fino a quando scompare l'azione della prima immagine postuma formatasi. Quest'ultimo arresto della diminuzione non risulta in questa grafica perchè si sarebbe dovuta avere con durate di illuminazione maggiori di quelle qui osservate.

Per la luce rossa i risultati sono analoghi a quelli ottenuti per il bianco, con la sola differenza che qui la diminuzione della quantità compare solo per un tempo assai più lungo: ciò concorda col fatto che nella formula precedentemente enunciata, che qui è pure applicabile, c ha un valore molto minore in confronto di a e di b , probabilmente in rapporto con la scarsa persistenza delle immagini date dalla luce rossa.

Con la luce verde i fatti osservati sono alquanto diversi. Qui si osserva dapprima un aumento della quantità di luce necessaria per l'eccitamento, poi, per durate maggiori della illuminazione la quantità diminuisce, infine si ha un ultimo aumento della quantità. Le variazioni della quantità di luce in rapporto con la durata dello stimolo sono qui espresse dalla formula:

$$Q = a + bt + ct^2 + dt^3$$

dove a, b, c hanno lo stesso significato che abbiamo detto sopra e d è un coefficiente di segno positivo.

Con la luce verde adunque per una più lunga durata dello stimolo la quantità di luce necessaria all'eccitamento retinico aumenta rapidamente, e ciò probabilmente sta in rapporto col fenomeno dell'adattamento alla luce, segno questo di un esaurimento dell'eccitabilità dei bastoncini, il quale avviene assai rapidamente.

Questo fatto con la luce verde si verifica per le durate di illuminazione maggiori, ma sempre relativamente brevi, e ciò in rapporto con il grande potere di eccitamento che hanno i raggi di questa regione dello spettro sulla retina.

Invece con la luce violetta abbiamo fin da principio una rapida diminuzione della quantità di luce necessaria all'eccitamento retinico, fino ad un certo punto, oltre il quale essa tende a farsi costante. La formula:

$$Q = a + \frac{b}{t}$$

esprime l'andamento del fenomeno, una spiegazione del quale potrebbe essere la seguente. È noto come i raggi violetti sono i meno propri a dare l'eccitamento della retina. Essi perciò non sono visti fino ad una tale durata della illuminazione per la quale la sommazione delle immagini postume, determini l'eccitamento; vale a dire tali raggi rappresenterebbero in un primo tempo uno stimolo sottoliminale, e solo quando si sia avuta la sommazione degli stimoli si raggiungerebbe il valore di soglia per l'eccitamento; ma questi stimoli che si vanno sommando nei vari tempuscoli rappresentano immagini postume, le quali naturalmente provocano una diminuzione della quantità necessaria a dare l'eccitamento. Questa diminuzione si arresta poi quando la durata dello stimolo sia tale che l'effetto delle immagini nuove che si formano equivalga a quello delle immagini postume che scompaiono.

Dati questi fatti da me osservati ho voluto vedere se colla somma dei valori ottenuti per le luci monocromatiche si riusciva a tracciare una curva che rappresentasse una ricostruzione della curva trovata con l'esperimento della luce bianca.

Ho ottenuto così una grafica la quale si allontana dalla grafica ottenuta coi dati sperimentali, perchè nella luce bianca le luci di diversa lunghezza d'onda contribuiscono a dare l'eccitamento in diversa misura, non già sommandosi in ugual proporzione. Uno scarto molto evidente si ha nel primo tratto nella curva, e questo è dovuto alla soverchia influenza della curva per il violetto, la quale in realtà deve contribuire assai poco alla visione della luce bianca soprattutto per brevi durate di illuminazione.

Invece nel tratto di mezzo la curva ricostruita ha un andamento assai simile a quella realmente trovata per il bianco.

Infine per lunghe durate dell'illuminazione si ha quell'aumento delle quantità necessaria all'eccitamento che si era osservata per il verde, e che ho detto corrispondere all'adattamento alla luce. Ho costruito da questi dati calcolati della quantità, la curva della intensità che è rappresentata da una linea rapidamente discendente fino ad un minimo, dopo il quale la curva va risalendo. Poichè essa presenta un minimo, si arriverebbe alla conclusione che la intensità ad un certo punto aumenta con l'aumentare del tempo, cioè che con l'aumentare dell'esposizione occorrerebbe una luce maggiore per determinare l'eccitamento. Ma nella realtà questo fatto non avviene mai, perchè raggiunto il tempo al quale corrisponde il minimo di intensità di luce si ha la sensazione, e benchè il prolungamento dell'esposizione rimanga inefficace ciò non toglie che si sia già visto. Da ciò risulta che per esposizioni superiori al tempo corrispondente all'intensità minima, si troverà che questa intensità rimane apparentemente costante.

Se noi poi indichiamo la eccitabilità della retina col valore reciproco della intensità di soglia, possiamo ottenere una curva della eccitabilità retinica in funzione della durata dell'illuminazione, curva la quale nel suo ultimo tratto ci darà le variazioni dell'eccitabilità retinica durante l'adattamento ad una luce sempre uguale al valore di soglia. La eccitabilità presenta dapprima una salita dovuta alla sommazione degli stimoli e che perciò è un aumento solo apparente dell'eccitabilità, poi una discesa lungo una curva iperbolica che esprime la curva dell'adattamento dei bastoncini alla luce.

PERSONALE ACCADEMICO

Pervenne la dolorosa notizia della morte del Socio straniero FELICE KLEIN, avvenuta il 22 giugno 1925.

G. C.

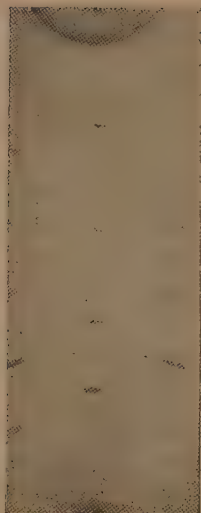


fig. 2

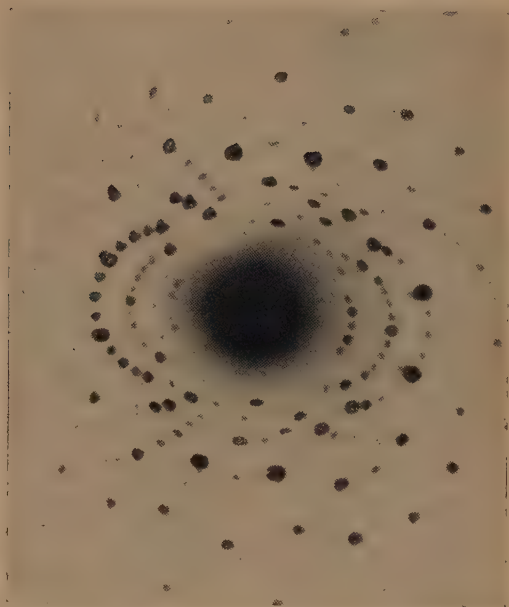


fig. 4

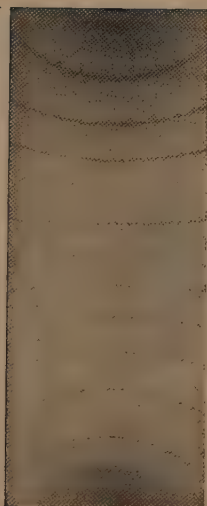


fig. 1

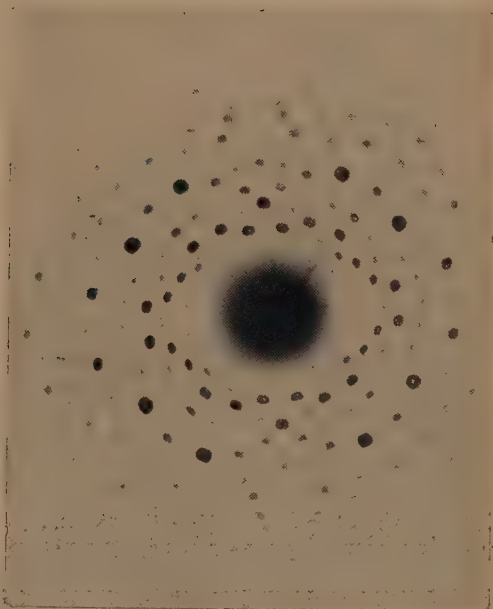
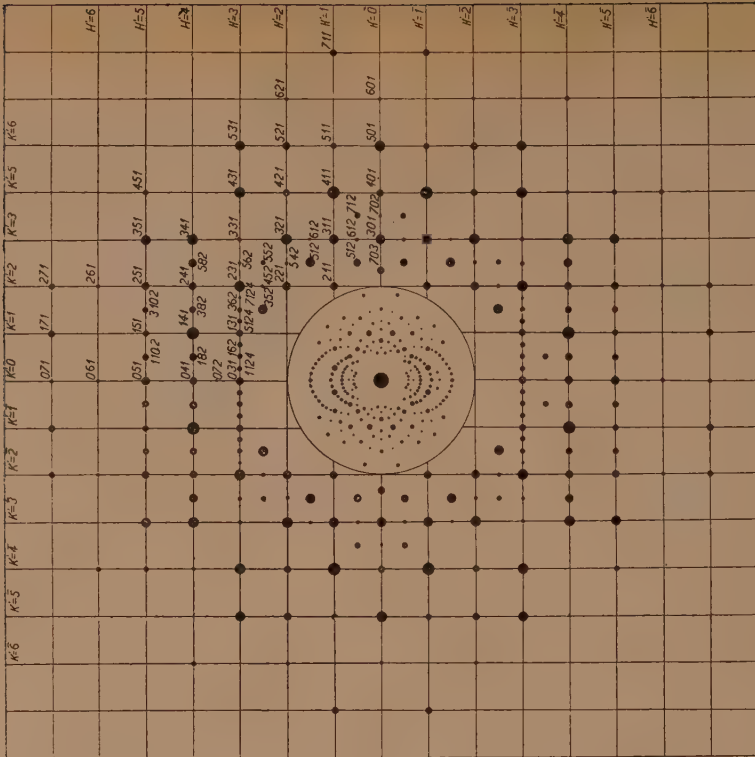
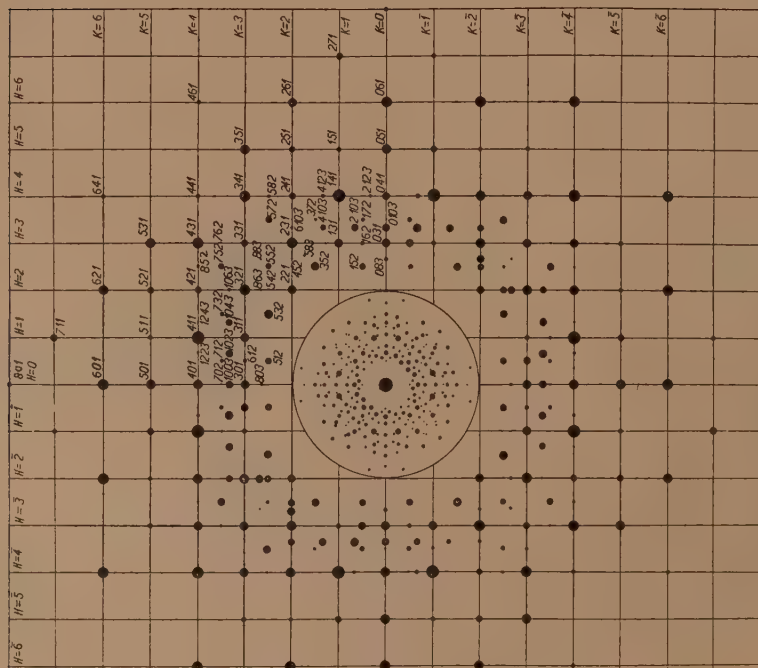


fig. 3



RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1925.

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo).

Matematica. — *Proprietà delle funzioni di variabile complessa su di una superficie qualunque.* Nota del Corrisp. U. CISOTTI⁽¹⁾.

I. — RICHIAMO DELLA DEFINIZIONE DI VARIABILE COMPLESSA SU DI UNA SUPERFICIE QUALUNQUE⁽²⁾. — Sia

$$(I) \quad ds^2 = a_{11} dx_1^2 + 2 a_{12} dx_1 dx_2 + a_{22} dx_2^2,$$

il quadrato dell'elemento lineare di una superficie, essendo i coefficienti funzioni reali, finite e continue di x_1, x_2 e tali che

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad a = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0.$$

Se

$$(2) \quad \zeta(x_1, x_2) = \text{costante}$$

è integrale generale dell'equazione

$$(3) \quad \sqrt{a_{11}} dx_1 + \frac{a_{12} + i \sqrt{a}}{\sqrt{a_{11}}} dx_2 = 0, \quad i = \sqrt{-1},$$

si è definita ζ la variabile complessa della superficie in discorso.

(1) Pervenuta all'Accademia il 27 giugno 1925.

(2) CISOTTI, *Equazioni fondamentali dei moti laminari potenziali sopra una superficie qualunque.* Questi « Rendiconti » Vol. I (1925), p. 612, n. 11.

2. - LEMMA. — Sieno f e f_1 due funzioni finite, continue e uniformi dei punti (x_1, x_2) della superficie: *condizione caratteristica (necessaria e sufficiente) affinché sia f funzione di f_1 è che per qualunque linea chiusa l , appartenente alla superficie, si abbia:*

$$(4) \quad \int_l f df_1 = 0.$$

La condizione è necessaria: infatti, se è $f = f(f_1)$, si ha:

$$(5) \quad f(f_1) df_1 = f(f_1) \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \right) = X_1 dx_1 + X_2 dx_2,$$

avendo posto:

$$X_1 = f(f_1) \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \quad X_2 = f(f_1) \frac{\partial f_1}{\partial x_2}.$$

Ora è:

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_2} = \frac{df}{df_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + f(f_1) \cdot \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial x_1} = \frac{df}{df_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + f(f_1) \cdot \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_1},$$

per cui:

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_2} = \frac{\partial X_2}{\partial x_1};$$

ne segue che (5) è un differenziale esatto. Si ha dunque la (4).

La condizione è sufficiente. Infatti per qualunque linea chiusa l , tracciata sulla superficie, si abbia la (4). Ciò significa che l'espressione differenziale

$$f df_1 = f \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \right)$$

è un differenziale esatto, per cui si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(f \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(f \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) = 0,$$

ovvero,

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0;$$

ma il primo membro non è altro che il determinante jacobiano di f e f_1 ; il suo annullarsi indica la dipendenza di f da f_1 , c. v. d.

3. - VALIDITÀ DEI TEOREMI DI CAUCHY E MORERA PER FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA SU DI UNA SUPERFICIE QUALUNQUE. — Se nel lemma del n. precedente si fa coincidere f_1 colla variabile complessa z [n. 1], si ha una condizione caratteristica perchè f sia funzione di z . Essa per le superficie piane coincide coi noti teoremi di Cauchy e Morera⁽¹⁾, che pertanto possiamo ora asserire, valgono anche per funzioni di variabile complessa su di una superficie qualunque.

4. - LOGARITMO NEPERIANO DI $d\bar{z}$. — Chiamando \bar{z} il coniugato di z , ponendo:

$$(6) \quad dx = \frac{1}{2} (d\bar{z} + d\bar{z}) \quad , \quad dy = \frac{1}{2i} (d\bar{z} - d\bar{z}),$$

si ha:

$$(7) \quad d\bar{z} = dx + idy;$$

per cui

$$(8) \quad \log d\bar{z} = \log \sqrt{dx^2 + dy^2} + i \arctan \frac{dy}{dx}.$$

Ora per le (6) risulta:

$$(9) \quad dx^2 + dy^2 = d\bar{z} \cdot d\bar{z} \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{i} \frac{d\bar{z} - d\bar{z}}{d\bar{z} + d\bar{z}}.$$

Dal n. 1 della Nota citata si ha:

$$(10) \quad \begin{cases} d\bar{z} = re^{ic} \left(\sqrt{a_{11}} dx_1 + \frac{a_{12} + i\sqrt{a}}{\sqrt{a_{11}}} dx_2 \right), \\ d\bar{z} = re^{-ic} \left(\sqrt{a_{11}} dx_1 + \frac{a_{12} - i\sqrt{a}}{\sqrt{a_{11}}} dx_2 \right), \end{cases}$$

avendo indicato con re^{ic} il fattore integrante della prima espressione differenziale entro parentesi. Naturalmente r e c sono funzioni reali, di cui la prima ≥ 0 , di x_1, x_2 . Si ha dunque, avuto riguardo alla (1):

$$(11) \quad d\bar{z} \cdot d\bar{z} = r^2 ds^2,$$

per cui, tenendo presenti le (10), dalle (9) si ricava:

$$(9') \quad dx^2 + dy^2 = r^2 ds^2 \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{tg} c + \frac{\sqrt{a} dx_2}{a_{11} dx_1 + a_{12} dx_2}}{1 - \operatorname{tg} c \cdot \frac{\sqrt{a} dx_2}{a_{11} dx_1 + a_{12} dx_2}}.$$

(1) Un teorema fondamentale nella teoria delle funzioni di variabile complessa, « Rend. del R. Ist. Lomb. di Scienze e Lettere », serie II, Vol. XIX (1886), p. 304.

Si noti come dalla (1), indicando con ds_1 e ds_2 gli elementi lineari delle linee x_1 e x_2 , si abbia:

$$(12) \quad ds_1 = \sqrt{a_{11}} dx_1, \quad ds_2 = \sqrt{a_{22}} dx_2,$$

inoltre chiamando θ l'angolo che ds forma con ds_1 si ha:

$$\frac{ds_2}{\sin \theta} = \frac{ds_1}{\sin(\alpha - \theta)},$$

α essendo l'angolo di ds_1 e ds_2 . Ma è:

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a_{11} a_{22}}}, \quad \cos \alpha = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11} a_{22}}},$$

per cui:

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a_{11} a_{22}}} \cos \theta - \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11} a_{22}}} \sin \theta \right) ds_2 = \sin \theta ds_1,$$

e, per le (12):

$$(\sqrt{a} \cos \theta - a_{12} \sin \theta) dx_2 = a_{11} \sin \theta dx_1,$$

dalla quale si deduce:

$$(13) \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{a} dx_2}{a_{11} dx_1 + a_{12} dx_2}.$$

Pertanto la seconda di (9') si può scrivere:

$$(14) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{tg} c + \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg} c \cdot \operatorname{tg} \theta} = \operatorname{tg}(c + \theta).$$

Per questa e per la prima delle (9'), la (8) può scriversi:

$$(15) \quad \log dz = \log |rds| + i(c + \theta).$$

Segue da questa che se si immagina di descrivere sulla superficie una linea chiusa intorno al punto ζ , luogo dei punti $\zeta + d\zeta$, la parte immaginaria di $\log d\zeta$ subisce, dopo un giro completo, una variazione di $2\pi i$.

5. - VALIDITÀ DI UNA CLASSICA FORMULA DI CAUCHY. — La precedente osservazione e il teorema del n. 3 ci permettono senz'altro di ritenere

valida, anche per le funzioni di variabile complessa sopra di una superficie qualunque, la classica formola di Cauchy:

$$(16) \quad f(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(z) dz}{z - z'},$$

dove l è un contorno chiuso semplice, tracciato sulla superficie, che racchiude un'area σ in cui $f(z)$ è regolare, z' è un punto interno di σ .

Infatti, essendo z' interno a σ si può sempre descrivere una linea chiusa l' luogo di punti $z' + \delta z'$, racchiudente il punto z' ; nel campo compreso tra l e l' la funzione $\frac{f(z)}{z - z'}$ è regolare, cosicchè si ha [n. 3]:

$$\int_l \frac{f(z) dz}{z - z'} - \int_{l'} \frac{f(z) dz}{z - z'} = 0,$$

le integrazioni essendo condotte, tanto sopra l quanto su l' , nello stesso senso.

Ora è:

$$\int_l \frac{f(z) dz}{z - z'} = \int_{l'} f(z' + \delta z') d \log \delta z'.$$

Passando al limite per $\delta z' \rightarrow 0$, si ottiene $2\pi i f(z')$; da ciò la formola (16).

Matematica. — *Sulla convergenza delle serie di Fourier.*

Nota del Corresp. LEONIDA TONELLI⁽¹⁾.

È noto che, per le funzioni che effettivamente si presentano nelle applicazioni, i criteri di Dini e di Dirichlet-Jordan permettono di stabilire la convergenza della corrispondente serie di Fourier in tutto l'intervallo fondamentale $(0, 2\pi)$, esclusi al più alcuni punti *singolari*. Per questi punti singolari, si possono utilizzare altri criteri: quelli di De la Vallée Poussin, di Lebesgue, di Young. Per altro, questi ultimi criteri, per quanto molto generali, non risolvono tutti i casi che possono presentarsi; essi poi, anche quando sono applicabili, non si prestano agevolmente alla verifica delle condizioni su cui si fondano.

Nella presente Nota, studio la convergenza delle serie di Fourier nei punti *singolari isolati*, giungendo a condizioni sufficienti che mi sembrano non prive di interesse.

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 giugno 1925.

1. Sia $f(x)$ una funzione data nell'intervallo $(0, 2\pi)$ ed ivi quasi continua ed integrabile⁽¹⁾; cambiando, ove occorra, il suo valore in 2π , definiamola in tutto $(-\infty, +\infty)$ ritenendola periodica di periodo 2π . Considerati poi un punto x_0 di $(0, 2\pi)$ ed un numero Φ , definiamo la nuova funzione $\varphi(\chi)$ con l'uguaglianza

$$\varphi(\chi) = f(x_0 + 2\chi) + f(x_0 - 2\chi) - 2\Phi.$$

Ciò posto, dimostriamo la seguente proposizione:

Se è $\varphi(\chi) \rightarrow 0$, per $\chi \rightarrow +0$; se esiste un numero $\delta > 0$ tale che, in ogni punto $\chi > 0$ e $\leq \delta$, la $\varphi(\chi)$ sia assolutamente continua⁽²⁾; se è $\lim_{\chi \rightarrow +0} \chi \varphi'(\chi) \equiv 0$ (oppure $\text{Mass} \lim_{\chi \rightarrow +0} \chi \varphi'(\chi) \leq 0$), intendendo qui di considerare soltanto quei valori di χ in cui la $\varphi'(\chi)$ esiste finita; allora la serie di Fourier della $f(x)$ converge, nel punto x_0 , verso Φ .

Rammentiamo, in primo luogo, che, per dimostrare la convergenza, nel punto x_0 , della serie di Fourier della $f(x)$, verso il valore Φ , basta provare che è possibile di determinare, in corrispondenza ad ogni numero $\varepsilon > 0$, un $\sigma > 0$ e $\leq \pi:2$ ed un $N > 0$, in modo che, per ogni intero $n > N$, sia

$$(1) \quad \left| \int_0^\sigma \varphi(\chi) \frac{\sin n\chi}{\chi} d\chi \right| < \varepsilon.$$

Consideriamo, adunque, l'integrale qui scritto e, supposto che n verifichi la disuguaglianza $\pi:2n < \sigma$, scriviamo

$$(2) \quad \int_0^\sigma \varphi(\chi) \frac{\sin n\chi}{\chi} d\chi = \int_0^{\pi:2n} + \int_{\pi:2n}^\sigma.$$

Preso, ad arbitrio, un $\varepsilon > 0$, scegliamo un $\sigma > 0$ e minore di δ e di $\pi:2$, in modo che, per ogni χ positivo e $\leq \sigma$, sia $|\varphi(\chi)| < \varepsilon:2\pi$, e che, in quasi-tutto $(0, \sigma)$, sia $\chi \varphi'(\chi) > -\varepsilon:2\pi$. Avremo, con ciò,

$$(3) \quad \left| \int_0^{\pi:2n} \varphi(\chi) \frac{\sin n\chi}{\chi} d\chi \right| < \frac{\varepsilon n}{2\pi} \int_0^{\pi:2n} \frac{\sin n\chi}{n\chi} d\chi < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Consideriamo ora il secondo integrale del 2° membro della (2). Con una integrazione per parti, abbiamo

$$\int_{\pi:2n}^\sigma \varphi(\chi) \frac{\sin n\chi}{\chi} d\chi = -\varphi(\sigma) \frac{\cos n\sigma}{n\sigma} + \frac{1}{n} \int_{\pi:2n}^\sigma \frac{\chi \varphi' - \varphi}{\chi^2} \cos n\chi d\chi,$$

(1) Vedi i miei *Fondamenti di calcolo delle variazioni*, Vol. I.

(2) Diremo che la $\varphi(\chi)$ è assolutamente continua in un punto χ , se esiste un intorno di questo punto in cui essa ha tale proprietà.

e quindi

$$(4) \quad \left| \int_{\pi:2n}^{\sigma} \right| \leq \frac{|\varphi(\sigma)|}{n\sigma} + \frac{1}{n} \int_{\pi:2n}^{\sigma} \frac{|\chi\varphi' - \varphi|}{\chi^2} d\chi.$$

Osserviamo qui che, potendosi scrivere $\chi\varphi' - \varphi = \left(\chi\varphi' + \frac{\varepsilon}{2\pi}\right) - \frac{\varepsilon}{2\pi} - \varphi$, ed essendo, in quasi-tutto $\left(\frac{\pi}{2n}, \sigma\right)$, $\chi\varphi' + \frac{\varepsilon}{2\pi} > 0$, è, in quasi-tutto questo intervallo,

$$|\chi\varphi' - \varphi| < \chi\varphi' + \frac{\varepsilon}{2\pi} + \frac{\varepsilon}{2\pi} + |\varphi| = \chi\varphi' + \frac{\varepsilon}{\pi} + |\varphi|.$$

Abbiamo, pertanto,

$$\int_{\pi:2n}^{\sigma} \frac{|\chi\varphi' - \varphi|}{\chi^2} d\chi < \int_{\pi:2n}^{\sigma} \frac{\varphi'}{\chi} d\chi + \frac{1}{\pi} \int_{\pi:2n}^{\sigma} \frac{\varepsilon + \pi|\varphi|}{\chi^2} d\chi,$$

e, integrando per parti il primo integrale del 2° membro,

$$\int_{\pi:2n}^{\sigma} \frac{|\chi\varphi' - \varphi|}{\chi^2} d\chi \leq \left[\frac{\varphi(\chi)}{\chi} \right]_{\pi:2n}^{\sigma} + \frac{1}{\pi} \int_{\pi:2n}^{\sigma} \frac{\varepsilon + 2\pi|\varphi|}{\chi^2} d\chi,$$

e tenendo conto del fatto che, in $\left(\frac{\pi}{2n}, \sigma\right)$, è $|\varphi(\chi)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$,

$$\leq \frac{\varepsilon}{\pi} \left(\frac{1}{2\sigma} + \frac{n}{\pi} \right) + \frac{2\varepsilon}{\pi} \int_{\pi:2n}^{\sigma} \frac{d\chi}{\chi^2} < \frac{5n\varepsilon}{\pi^2}.$$

Sostituendo in (4) e tenendo ancora conto della $|\varphi(\sigma)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$, otteniamo così

$$\left| \int_{\pi:2n}^{\sigma} \varphi(\chi) \frac{\operatorname{sen} n\chi}{\chi} d\chi \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi n\sigma} + \frac{5\varepsilon}{\pi^2},$$

onde, essendo $\pi:2n < \sigma$,

$$< \frac{\varepsilon}{\pi^2} + \frac{5\varepsilon}{\pi^2} < \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Di qui e da (2) e (3), segue

$$(5) \quad \left| \int_0^{\sigma} \varphi(\chi) \frac{\operatorname{sen} n\chi}{\chi} d\chi \right| < \varepsilon,$$

per il σ determinato come sopra si è detto e per ogni $n > \pi : 2\sigma$. La proposizione enunciata è dunque dimostrata.

Osservazione. — Il teorema ora dimostrato resta pienamente valido anche nel caso in cui la condizione $\text{Min} \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \varphi'(\tau) \geq 0$ (o la $\text{Mass} \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \varphi'(\tau) \leq 0$), invece di essere verificata quando si considerano *tutti* i valori positivi di τ in cui esiste finita la $\varphi'(\tau)$, lo è quando si considerino soltanto *quasi tutti* questi valori.

2. Nell'enunciato del n. precedente, si può sostituire alla disuguaglianza $\text{Min} \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \varphi'(\tau) \geq 0$, l'altra, più generale, $\text{Min} \lim_{\tau \rightarrow +0} g(\tau) \varphi'(\tau) \geq 0$ (opp. $\text{Mass} \lim_{\tau \rightarrow +0} g(\tau) \varphi'(\tau) \leq 0$), con $g(\tau)$ funzione data in $(0, \delta)$ e tale che, in questo intervallo, sia sempre $g(\tau) > c\tau$, $c > 0$. Ed infatti, in questo caso, sarà, dove è $\varphi'(\tau) < 0$, $\tau \varphi'(\tau) > \frac{1}{c} g(\tau) \varphi'(\tau)$, e quindi

$$\text{Min} \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \varphi'(\tau) \geq 0.$$

3. Nell'enunciato del teorema dato nel numero 1, alla condizione $\text{Min} \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \varphi'(\tau) \geq 0$ si può, in particolare, sostituire l'ipotesi che valga la disuguaglianza $\varphi'(\tau) \geq \frac{1}{\tau \log \tau}$, in quasi-tutto l'intervallo $(0, \delta)$. Più particolarmente ancora, si ha il corollario:

Se la $\varphi(\tau)$ tende a zero per $\tau \rightarrow +0$, e se, in tutto l'intervallo $(0, \delta)$, primo estremo escluso, essa ammette derivata finita e continua e soddisfacente alla $\varphi'(\tau) \geq \frac{1}{\tau \log \tau}$, la serie di Fourier della $f(x)$ converge, nel punto x_0 , verso Φ .

4. Alla condizione $\text{Min} \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \varphi'(\tau) \geq 0$, del teorema del n. 1, si può anche sostituire, in particolare, la disuguaglianza $\varphi'(\tau) \geq -\frac{\varphi(\tau)}{\tau}$ (\leq), supponendola verificata in quasi-tutto $(0, \delta)$. Tale disuguaglianza può scriversi $D\{\tau \varphi(\tau)\} \geq 0$ (≤ 0), e poichè nel n. 1 si è fatta l'ipotesi che la $\varphi(\tau)$ sia assolutamente continua per $\tau > 0$ e $\leq \delta$, essa disuguaglianza equivale a dire che il prodotto $\tau \varphi(\tau)$ è funzione non decrescente (non crescente) per tutti i valori indicati di τ . La disuguaglianza $\varphi'(\tau) \geq -\frac{\varphi(\tau)}{\tau}$ ammette poi una facile interpretazione geometrica.

5. Invece della disuguaglianza $\text{Min} \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \varphi'(\tau) \geq 0$, possiamo (in particolare) supporre, nel teorema del n. 1, che valga la $\varphi'(\tau) \geq \frac{\varphi(\tau)}{\tau}$ (\leq) ossia la $D \frac{\varphi(\tau)}{\tau} \geq 0$ (\leq), in quasi-tutto l'intervallo $(0, \delta)$. Tale condizione

(essendosi supposta la $\varphi(\zeta)$ assolutamente continua per $\zeta > 0$ e $\leq \delta$) equivale all'altra che il rapporto $\varphi(\zeta) : \zeta$, per $\zeta > 0$ e $\leq \delta$, sia funzione sempre non decrescente (non crescente).

In questo caso particolare, la proposizione del n. 1 si può dimostrare molto brevemente nel seguente modo. Stabilita la (3) come nel n. 1, si ha, per il 2° teorema della media,

$$\int_{\pi:2n}^{\sigma} \varphi(\zeta) \frac{\operatorname{sen} n\zeta}{\zeta} d\zeta = \frac{2n}{\pi} \varphi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \int_{\pi:2n}^{\sigma_1} \operatorname{sen} n\zeta d\zeta + \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \int_{\sigma_1}^{\sigma} \operatorname{sen} n\zeta d\zeta,$$

con $\pi:2n < \sigma_1 < \sigma$. Ciascuno dei due integrali del secondo membro è, in modulo, minore di $2:n$, ed è perciò

$$\left| \int_{\pi:2n}^{\sigma} \varphi(\zeta) \frac{\operatorname{sen} n\zeta}{\zeta} d\zeta \right| < \frac{4}{\pi} \left| \varphi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right| + \frac{2}{n\sigma} \left| \varphi(\sigma) \right|.$$

E siccome è $\varphi(\zeta) \rightarrow 0$ per $\zeta \rightarrow +0$, prendendo un n_1 sufficientemente grande, avremo, per tutti gli $n > n_1$,

$$\left| \int_{\pi:2n}^{\sigma} \varphi(\zeta) \frac{\operatorname{sen} n\zeta}{\zeta} d\zeta \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Di qui segue, per il σ scelto e per ogni $n > n_1$,

$$\left| \int_0^{\sigma} \varphi(\zeta) \frac{\operatorname{sen} n\zeta}{\zeta} d\zeta \right| < \varepsilon.$$

La condizione che il rapporto $\varphi(\zeta) : \zeta$ sia funzione non decrescente oppure non crescente, per $\zeta > 0$ e $\leq \delta$, è certo soddisfatta se la curva $y = \varphi(\zeta)$, per $0 < \zeta \leq \delta$, è rappresentabile in forma polare prendendo come polo il punto $(0, 0)$.

6. Se è ($b \geq 0$)

$$(6) \quad \operatorname{Min} \lim_{h \rightarrow 0} hf'(x_0 + h) \geq 0 \quad (\text{oppure,} \quad \operatorname{Mass} \lim_{h \rightarrow 0} hf'(x_0 + h) \leq 0)$$

la disuguaglianza $\operatorname{Min} \lim_{\zeta \rightarrow +0} \zeta \varphi'(\zeta) \geq 0$ (opp. $\operatorname{Mass} \lim_{\zeta \rightarrow +0} \zeta \varphi'(\zeta) \leq 0$) risulta verificata.

Ed infatti, sotto la condizione indicata, è

$$\varphi'(\zeta) = 2 \{ f'(x_0 + 2\zeta) - f'(x_0 - 2\zeta) \},$$

$$\operatorname{Min} \lim_{\zeta \rightarrow +0} \zeta \varphi'(\zeta) \geq \operatorname{Min} \lim_{\zeta \rightarrow +0} 2\zeta f'(x_0 + 2\zeta) + \operatorname{Min} \lim_{\zeta \rightarrow +0} -2\zeta f'(x_0 - 2\zeta) \geq 0.$$

7. Dimostriamo ora che:

se x_0 è, per la $f(x)$, un punto di continuità o di discontinuità di 1^a specie;

se esiste un numero $\delta > 0$, tale che, in ogni punto dell'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, escluso al più x_0 , la $f(x)$ sia assolutamente continua;
se vale una delle due disuguaglianze

$$(7) \quad \text{Min} \lim_{h \rightarrow +0} h f'(x_0 + h) \geq 0, \quad \text{Mass} \lim_{h \rightarrow +0} h f'(x_0 + h) \leq 0,$$

ed anche una delle altre due

$$(8) \quad \text{Min} \lim_{h \rightarrow -0} h f'(x_0 + h) \geq 0, \quad \text{Mass} \lim_{h \rightarrow -0} h f'(x_0 + h) \leq 0;$$

allora la serie di Fourier della $f(x)$ converge, nel punto x_0 , verso $f(x_0)$ o verso $\frac{1}{2} \{ f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0) \}$, a seconda che x_0 è punto di continuità o no della $f(x)$.

Ed infatti, se risultano verificate insieme le prime delle (7) e (8), allora vale la (6), e il criterio del n. 1, in cui si ponga

$$\Phi = \frac{1}{2} \{ f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0) \},$$

dimostra quanto abbiamo affermato. Altrettanto può dirsi se sono verificate insieme le seconde delle (7) e (8).

Se fossero verificate la prima delle (7) e la seconda delle (8), ponendo

$$\varphi_1(\tilde{\chi}) = f(x_0 + 2\tilde{\chi}) - f(x_0 + 0),$$

$$\varphi_2(\tilde{\chi}) = f(x_0 - 2\tilde{\chi}) - f(x_0 - 0),$$

(dove $\varphi(\tilde{\chi}) = \varphi_1(\tilde{\chi}) + \varphi_2(\tilde{\chi})$, per $\Phi = \frac{1}{2} \{ f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0) \}$) si avrebbe

$$\text{Min} \lim_{\tilde{\chi} \rightarrow +0} \tilde{\chi} \varphi'_1(\tilde{\chi}) \geq 0 \quad \text{e} \quad \text{Mass} \lim_{\tilde{\chi} \rightarrow +0} \tilde{\chi} \varphi'_2(\tilde{\chi}) \leq 0,$$

e la (5) varrebbe per queste $\varphi_1(\tilde{\chi})$ e $\varphi_2(\tilde{\chi})$; sarebbe cioè, per un $\sigma > 0$ e sufficientemente piccolo, e per ogni n maggiore di un certo n_1 ,

$$\left| \int_0^\sigma \varphi_1(\tilde{\chi}) \frac{\text{sen } n\tilde{\chi}}{\tilde{\chi}} d\tilde{\chi} \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \int_0^\sigma \varphi_2(\tilde{\chi}) \frac{\text{sen } n\tilde{\chi}}{\tilde{\chi}} d\tilde{\chi} \right| < \varepsilon,$$

da cui seguirebbe la

$$\left| \int_0^{\sigma} \varphi(\chi) \frac{\sin n\chi}{\chi} d\chi \right| < 2\varepsilon.$$

Analogamente, se fossero verificate la seconda delle (7) e la prima delle (8).

8. Relativamente alle disuguaglianze (7) e (8), si possono ripetere considerazioni analoghe a quelle svolte nei n. 2...5; in particolare, si ha:

Se x_0 è un punto di continuità per la $f(x)$, e se, in un intorno di tale punto, escluso al più x_0 medesimo, la $f(x)$ è assolutamente continua e, di più, la curva $y = f(x)$ è rappresentabile in forma polare, prendendo per polo il punto $(x_0, f(x_0))$, allora la serie di Fourier della $f(x)$ converge, in x_0 , verso $f(x_0)$.

Nel caso in cui x_0 sia un punto di discontinuità di 1^a specie per la $f(x)$, e se, in un intorno di tal punto, escluso al più x_0 medesimo, la $f(x)$ è assolutamente continua e, di più, la parte della curva $y = f(x)$ che è alla destra e quella che è alla sinistra della retta $x = x_0$ sono rappresentabili in forma polare, prendendo per poli rispettivamente i punti $(x_0, f(x_0 + 0))$ e $(x_0, f(x_0 - 0))$, allora la serie di Fourier della $f(x)$ converge, in x_0 , verso $\frac{1}{2} \{ f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0) \}$.

NOTE PRESENTATE DA SOCI.

Matematica. — *Ancora sulla determinazione delle geodetiche di talune superficie.* Nota del prof. MINEO CHINI presentata dal Socio L. BIANCHI ⁽¹⁾.

Al termine di un'altra mia Nota, sullo stesso argomento della presente ⁽²⁾, è data l'equazione, mediante una sola quadratura, delle geodetiche delle superficie di elemento lineare:

$$(1) \quad ds^2 = \sin \frac{2}{3} v \cdot \left\{ du^2 + (u + V)^2 dv^2 \right\},$$

con V funzione della sola variabile v ⁽³⁾. Ed è poi detto che lo stesso può farsi per le geodetiche delle superficie di elemento lineare:

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1925.

(2) Pubblicata in questi « Rendiconti », vol. I (1925), p. 646.

(3) E conseguentemente anche se nell'elemento lineare (1) figuri, in luogo di $\sin 2v/3$, l'espressione più generale:

$$k_1 \sin \frac{2}{3} v + k_2 \cos \frac{2}{3} v,$$

con k_1 e k_2 costanti arbitrarie.

$$(2) \quad ds^2 = e^{2kv} \{ du^2 + (u + V)^2 dv^2 \},$$

con k costante arbitraria.

Mi propongo ora di scrivere anche l'equazione di queste ultime geodetiche e di semplificare poi quella già ottenuta per le precedenti.

*
* *

Si ricordi che, se

$$y = \varphi(v, C)$$

è l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$(3) \quad y^2 + \left(\frac{dy}{dv} \right)^2 = V_1,$$

l'equazione generale delle geodetiche delle superficie di elemento lineare

$$ds^2 = V_1 \{ du^2 + (u + V)^2 dv^2 \},$$

con V_1 e V funzioni della sola v , è:

$$u \frac{\partial \varphi}{\partial C} + \frac{\partial}{\partial C} \int V d\varphi = C',$$

con C' costante arbitraria (1).

Ed osservando poi che si ha:

$$\int V d\varphi = V\varphi - \int \varphi dV,$$

possiamo anche dire che la suddetta equazione generale delle geodetiche (2) è:

$$(4) \quad (u + V) \frac{\partial \varphi}{\partial C} - \int \frac{\partial \varphi}{\partial C} dV = C'.$$

Ora, per le superficie (2) l'equazione (3) è:

$$(5) \quad y^2 + \left(\frac{dy}{dv} \right)^2 = e^{2kv}.$$

(1) Veggasi: DARBOUX, *Théorie des surfaces*, Parte III, n. 621.

(2) Quando fosse $V = \text{costante}$, si avrebbe come equazione delle geodetiche delle superficie *spirali* di elemento lineare

$$ds^2 = V_1 (du^2 + u^2 dv^2)$$

la seguente:

$$u \frac{\partial \varphi}{\partial C} = C'.$$

E se in questa facciamo la sostituzione:

$$y = \frac{\tilde{\chi} e^{kv}}{\sqrt{1 + \tilde{\chi}^2}},$$

si ottiene come equazione trasformata l'altra:

$$\left(\frac{\tilde{\chi}'}{1 + \tilde{\chi}^2} + k\tilde{\chi} \right)^2 = 1;$$

il cui integrale generale si deduce evidentemente da quello dell'equazione:

$$\frac{\tilde{\chi}'}{1 + \tilde{\chi}^2} + k\tilde{\chi} = 1,$$

cioè:

$$\frac{d\tilde{\chi}}{dv} = (1 + \tilde{\chi}^2)(1 - k\tilde{\chi}),$$

col sostituire in esso $\pm \tilde{\chi}$ al posto di $\tilde{\chi}$. Conseguentemente si avrà l'integrale generale della (5), facendo in quello dell'equazione ora scritta la sostituzione:

$$\tilde{\chi} = \frac{\pm y}{\sqrt{e^{2kv} - y^2}}.$$

E poichè in detta equazione si possono subito separare le variabili, il suo integrale generale è:

$$\int \frac{d\tilde{\chi}}{(1 + \tilde{\chi}^2)(1 - k\tilde{\chi})} = v + C,$$

cioè:

$$\arctang \tilde{\chi} - k \log \frac{1 - k\tilde{\chi}}{\sqrt{1 + \tilde{\chi}^2}} = (1 + k^2)v + C.$$

Conseguentemente, l'integrale generale della (5) sarà:

$$\arctang \frac{\pm y}{\sqrt{e^{2kv} - y^2}} - k \log (\sqrt{e^{2kv} - y^2} \mp ky) = v + C.$$

Od anche:

$$(6) \quad \arcsen Y - k \log (\sqrt{1 - Y^2} - kY) = \rho;$$

avendo posto:

$$Y = \pm ye^{-kv}, \quad \rho = av + C, \quad a = 1 + k^2.$$

Ora, nell'equazione (6) è possibile l'inversione delle variabili Y e ρ ; cioè da essa è possibile dedurre l'altra:

$$Y = f(\rho),$$

con f simbolo di funzione pienamente determinata per ogni valore della costante $k^{(v)}$. Conseguentemente, l'integrale generale dell'equazione (5), risoluto rispetto alla funzione incognita y , sarà:

$$y = \pm e^{kv} f(av + C).$$

Dopo ciò, l'equazione generale delle geodetiche delle superficie (2) sarà la (4) quando si faccia:

$$\varphi = e^{kv} f(av + C).$$

Ed essendo:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C} = e^{kv} \cdot \frac{\partial Y}{\partial C},$$

potremo anche dire che la richiesta equazione è:

$$(u + V) e^{kv} \frac{\partial Y}{\partial C} - \int e^{kv} \frac{\partial Y}{\partial C} dV = C',$$

dove Y è la funzione di v (e di C) individuata dall'equazione (6).

Quando fosse $V = \text{cost.}$, si avrebbero le superficie spirali:

$$ds^2 = e^{2kv} (du^2 + u^2 dv^2),$$

(1) La funzione

$$\arcsen x - k \log (\sqrt{1 - x^2} - kx),$$

dove si considerano soli valori positivi del radicale quadratico, è reale e ad un sol valore per i valori (reali) di x compresi fra

$$-1 \quad \text{e} \quad + \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}}, \quad \text{oppure:} \quad - \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}} \quad \text{e} \quad +1,$$

secondo che la costante k è positiva o negativa.

In entrambi i casi la funzione è crescente in tutto l'intervallo di variabilità della x , perchè in esso la sua derivata:

$$\frac{1 + k^2}{\sqrt{1 - x^2} - kx}$$

è sempre positiva.

Quando sia $k > 0$ il valore t della funzione va crescendo da

$$-\left(\frac{\pi}{2} + k \log k\right) \quad \text{a} \quad +\infty$$

E per $k < 0$ esso cresce da

$$-\infty \quad \text{a} \quad \frac{\pi}{2} + |k| \log |k|.$$

Perciò la funzione inversa $f(t)$ è pienamente determinata nell'uno o nell'altro di questi intervalli di variabilità di t .

le cui geodetiche hanno quindi per equazione:

$$ue^{kv} \frac{\partial Y}{\partial C} = C'.$$

Quando si prendesse:

$$V = \alpha e^{-kv},$$

con α quantità costante non nulla, si avrebbero le superficie di elemento lineare:

$$(7) \quad ds^2 = e^{2kv} du^2 + (\alpha + ue^{kv})^2 dv^2,$$

le cui geodetiche hanno per equazione:

$$(\alpha + ue^{kv}) \frac{\partial Y}{\partial C} + \alpha k \int \frac{\partial Y}{\partial C} dv = C'.$$

Ed essendo:

$$\frac{\partial Y}{\partial C} = f'(\rho),$$

avremo:

$$\int \frac{\partial Y}{\partial C} dv = \frac{1}{\alpha} \int f'(\rho) d\rho = \frac{1}{\alpha} f(\rho) = \frac{Y}{1+k^2}.$$

Perciò, l'equazione delle geodetiche di ogni superficie (7) sarà:

$$(\alpha + ue^{kv}) \frac{\partial Y}{\partial C} + \frac{\alpha k}{1+k^2} Y = C'.$$

Si potrebbe infine osservare che si ha:

$$\frac{\partial Y}{\partial C} = f'(\rho) = 1: \frac{d\rho}{dY}.$$

Ed essendo, per la (6):

$$\frac{d\rho}{dY} = \frac{1+k^2}{\sqrt{1-Y^2-kY}},$$

avremo pure:

$$\frac{\partial Y}{\partial C} = \frac{\sqrt{1-Y^2-kY}}{1+k^2}.$$

Perciò, l'equazione delle geodetiche di ogni superficie (7) può anche scriversi:

$$(\alpha + ue^{kv}) (\sqrt{1-Y^2-kY}) + \alpha k Y = C',$$

essendo Y la funzione di ρ (e quindi di v e C) individuata dall'equazione (6).

*
**

Circa poi le geodetiche di ogni superficie di elemento lineare (1), considerate nella precedente Nota, osserveremo che l'integrale generale della corrispondente equazione differenziale (3) fu dimostrato essere:

$$y = \pm \frac{\left(1 + M \operatorname{sen} \frac{2}{3} v\right) \sqrt{\operatorname{sen} \frac{2}{3} v}}{\sqrt{1 + 2 M \operatorname{sen} \frac{2}{3} v + M^2}},$$

avendo posto:

$$M = \sqrt{C \operatorname{sen} \frac{4}{3} v - \cos \frac{4}{3} v}.$$

Perciò, tali geodetiche avranno per equazione la (4), dove in luogo di φ si ponga la precedente espressione di y (senza doppio segno).

E poichè si trova, dopo alcuni calcoli, che allora si ha:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C} = - \left(\frac{\sqrt{\operatorname{sen} \frac{2}{3} v \cos \frac{2}{3} v}}{\sqrt{1 + 2 M \operatorname{sen} \frac{2}{3} v + M^2}} \right)^3 = - N^3,$$

concludiamo che l'equazione delle suddette geodetiche è:

$$(u + V) N^3 - \int N^3 dV = C',$$

avendo posto:

$$N = \frac{\sqrt{\operatorname{sen} \frac{2}{3} v \cos \frac{2}{3} v}}{\sqrt{1 + 2 M \operatorname{sen} \frac{2}{3} v + M^2}}.$$

Per $V = \text{cost.}$, l'equazione delle geodetiche delle corrispondenti superficie spirali, di elemento lineare

$$ds^2 = \operatorname{sen} \frac{2}{3} v \cdot (du^2 + u^2 dv^2),$$

sarà:

$$u N^3 = C'.$$

Cioè:

$$u \left(\sqrt{\operatorname{sen} \frac{2}{3} v \cos \frac{2}{3} v} \right)^3 = C' \left(1 + 2 M \operatorname{sen} \frac{2}{3} v + M^2 \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Matematica. — *Risoluzione di una classe di equazioni integrali di 1^a specie a limiti costanti.* Nota di LUIGI FANTAPPIÈ ⁽¹⁾, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. — Per la risoluzione delle equazioni integrali di 1^a specie a limiti costanti è ben noto il metodo generale del prof. Picard ⁽²⁾, che si basa sullo sviluppo della funzione incognita in serie di funzioni ortogonali. In questa Nota mi propongo invece di esporre un altro metodo che, sebbene più particolare, sostituisce, per il caso delle funzioni analitiche, considerazioni *qualitative* (polidromia delle funzioni note, ecc.) alle considerazioni, che potrebbero dirsi *quantitative*, del prof. Picard (convergenza di una certa serie, ecc.) e che dà la soluzione quando esiste, sotto una forma particolarmente semplice.

2. — Consideriamo dunque l'equazione integrale lineare di prima specie a limiti costanti

$$(1) \quad f(\bar{z}) = \int_a^b K(\bar{z}, t) \varphi(t) dt$$

oppure

$$(1') \quad f(z) = \int_L K(z, t) \varphi(t) dt$$

(se L è una linea regolare congiungente a con b) in cui tanto il nucleo $K(\bar{z}, t)$ che la funzione nota $f(\bar{z})$ siano funzioni analitiche del loro argomento e la posizione dei punti singolari \bar{t} e \bar{z} di K sia indipendente da z e t rispettivamente (punti singolari fissi) *tranne per il solo polo del primo ordine* $t = s(\bar{z})$ (dipendente da \bar{z}), unico punto singolare mobile di K .

Potremo allora porre K sotto la forma

$$(2) \quad K(\bar{z}, t) = K_1(\bar{z}, t) + \frac{r(\bar{z})}{t - s(\bar{z})}$$

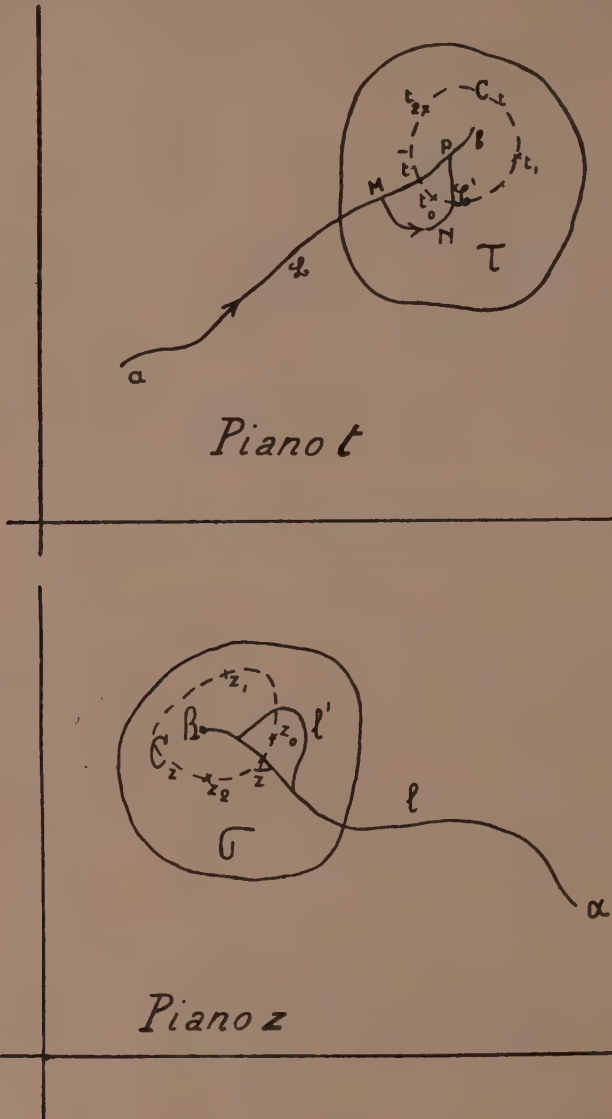
in cui $K_1(\bar{z}, t)$ ha solo i punti singolari fissi \bar{t} e \bar{z} (i punti \bar{t} saranno tutti diversi dagli estremi a e b dell'integrale). Invece di considerare l'equazione integrale (1) o (1') studieremo ora l'altra equazione

$$(3) \quad f(z) = \int_a^b K(\bar{z}, t) \varphi(t) dt + \psi(z)$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1925.

(2) E. PICARD, « Comptes rendus de l'Académie des Sciences », 14 juin 1909.

con due funzioni incognite $\varphi(t)$ e $\psi(z)$, e faremo vedere che quando s'imponga alla $\varphi(t)$ la condizione di essere regolare nell'interno della linea L con-



giungente a con b e alla $\psi(z)$ la condizione di essere regolare e monodroma nell'intorno di un dato punto $z = \beta$ per cui $s(\beta) = b$ (o $s(\beta) = a$) (uno degli estremi dell'integrale) $s'(\beta) \neq 0$ (il punto β al più escluso), tutt'e due le fun-

zioni incognite sono sempre perfettamente e univocamente determinate dall'unica equazione (3).

La primitiva equazione integrale di 1^a specie (1) ammetterà poi una e una sola soluzione allora e allora soltanto che risulti sempre $\psi(\bar{\alpha}) = 0$, qualunque sia il punto β considerato per cui $s(\beta) = b(0a)$, $s'(\beta) \neq 0$.

3. - Supponiamo, per semplicità, che $K(\bar{\alpha}, t)$ sia una funzione monodroma dei suoi argomenti e $f(\bar{\alpha})$ sia olomorfa in ogni regione di un intorno σ di β , non comprendente β nel suo interno. Essendo $s'(\beta) \neq 0$ ad ogni valore di $\bar{\alpha}$ di un intorno conveniente σ di β corrisponderà uno e un solo valore $t = s(\bar{\alpha})$ in un intorno τ di b , e viceversa; in particolare se t varia entro τ sulla linea L d'integrazione, il valore corrispondente $\bar{\alpha} = s^*(t)$ varierà entro σ su un tratto di linea l che avrà in β un estremo, e, dovendo essere la $\varphi(t)$ olomorfa nell'intorno di L e $\psi(\bar{\alpha})$ regolare nell'intorno σ , se queste due funzioni esistono, l'espressione (3) che ci dà $f(\bar{\alpha})$ avrà sempre un significato in σ , tranne al più per i punti di $l^{(1)}$. Dimostriamo ora che questa funzione $f(\bar{\alpha})$ definita dalla (3) è prolungabile analiticamente oltre la linea l , mentre l'estremo β deve necessariamente essere un punto di diramazione se $\varphi(t)$ non è identicamente nulla.

Facciamo infatti descrivere a $\bar{\alpha}$ entro σ , nel senso positivo, una piccola curva chiusa $C_{\bar{\alpha}} = (\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}, \bar{\alpha}_0)$ (v. figura) racchiudente β , che incontri in un solo punto $\bar{\alpha}$ la linea l ; sia $C_t = (t_0, t_1, t_2, t, t_0)$ la curva chiusa corrispondente in τ , racchiudente l'estremo b di L e intersecante la L stessa nel solo punto $t = s(\bar{\alpha})$. Nella funzione $f(\bar{\alpha})$ data dalla (3) possiamo far variare $\bar{\alpha}$ entro qualsiasi regione interna a σ e non contenente punti di l ; in particolare possiamo far variare con continuità $\bar{\alpha}$ su $C_{\bar{\alpha}}$ da $\bar{\alpha}_0$ a $\bar{\alpha}_1$ e $\bar{\alpha}_2$ senza che la (3) perda mai di significato (poichè $\bar{\alpha}$ non giace nel tratto $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2$). Fatto ciò sostituiamo alla linea d'integrazione L un'altra linea $L' = aMNPb$, (MNP interno a τ) che non abbia punti comuni col tratto t_2, t, t_0 di C_t ; sarà $\int_{L'} = \int_L + \int_{L_1}$ ove L_1 è la curva chiusa $MNPM$ contenente t_0 ma non t_2 nel suo interno, e se nella $f(\bar{\alpha})$ concepiamo $\bar{\alpha}$ variabile soltanto nella regione σ che si ha da σ eseguendo un taglio lungo l e sottraendo la regione racchiusa dalla curva l_1 , corrispondente in σ a L_1 , avremo

$$\begin{aligned} f(\bar{\alpha}) &= \int_L K(\bar{\alpha}, t) \varphi(t) dt + \psi(\bar{\alpha}) = \int_L K(\bar{\alpha}, t) \varphi(t) dt + \\ &+ \int_{L_1} K(\bar{\alpha}, t) \varphi(t) dt + \psi(\bar{\alpha}) \\ (4) \quad f(\bar{\alpha}) &= \int_{L'} K(\bar{\alpha}, t) \varphi(t) dt + \psi(\bar{\alpha}) \end{aligned}$$

(1) Cfr. S. PINCHERLE, *Sur certaines opérations fonctionnelles représentées par des intégrales définies*, « Acta Mathematica », t. 10, 1887.

poichè l'integrale \int_{L_1} è nullo, essendo tanto K che φ regolari nell'interno di L_1 . La (4) ci dà però un'espressione di $f(\zeta)$ che, mentre coincide colla (3) quando ζ varia in $\bar{\sigma}$, ha un significato anche quando ζ varia comunque in σ senza però oltrepassare la linea l corrispondente in σ a L' ; mediante la (4) la $f(\zeta)$ risulta così prolungata analiticamente da $\bar{\sigma}$ fino alla linea l' nell'interno della regione racchiusa da L_1 .

Calcoliamo però il valore $f_1(\zeta_0)$ che viene ora ad assumere la f per $\zeta = \zeta_0$, facendo variare con continuità ζ su C_ζ da ζ_2 a ζ, ζ_0 . Sarà

$$\begin{aligned} f_1(\zeta_0) &= \int_{L'} K(\zeta_0, t) \varphi(t) dt + \psi(\zeta_0) = \\ &= \int_L K(\zeta_0, t) \varphi(t) dt + \int_{L_1} K(\zeta_0, t) \varphi(t) + \psi(\zeta_0) \end{aligned}$$

Essendo $\psi(\zeta)$ monodroma, $\int_L K(\zeta_0, t) \varphi(t) dt + \psi(\zeta_0)$ è, per la (3), il valore primitivo $f(\zeta_0)$ che aveva la f prima che si facesse variare ζ da ζ_0 a ζ_1 e ζ_2 , mentre l'integrale rimanente va esteso a una curva chiusa L_1 che racchiude il polo $t_0 = s(\zeta_0)$ del nucleo K . Sarà dunque

$$(5) \quad f_1(\zeta_0) = f(\zeta_0) + \int_{L_1} K(\zeta_0, t) \varphi(t) dt.$$

Se la $\varphi(t)$ non è identicamente nulla, vediamo quindi che la f , dopo che ζ ha descritto la curva C_ζ intorno a β , ritorna in ζ_0 con un valore $f_1(\zeta_0)$ diverso in generale da quello primitivo $f(\zeta_0)$; la $f(\zeta)$ ha cioè un punto critico in β (logaritmico nelle nostre ipotesi di K e φ monodrome).

4. - Per valutare la differenza $f_1(\zeta_0) - f(\zeta_0)$ sostituiamo nella (5) l'espressione (2) di $K(\zeta, t)$; sarà

$$\begin{aligned} f_1(\zeta_0) - f(\zeta_0) &= \\ &= \int_{L_1} K(\zeta_0, t) \varphi(t) dt = \int_{L_1} K_1(\zeta_0, t) \varphi(t) dt + \int_{L_1} \frac{r(\zeta_0) \varphi(t)}{t - s(\zeta_0)} dt \end{aligned}$$

Ma il 1° integrale dell'ultimo membro è nullo, essendo tanto K_1 che φ olomorfe nella regione racchiusa da L_1 , mentre il secondo si calcola con la formula di Cauchy, quindi

$$(6) \quad f_1(\zeta_0) - f(\zeta_0) = 2\pi i r(\zeta_0) \varphi(s(\zeta_0))$$

Questa relazione fondamentale mostra come la differenza $f_1(\zeta) - f(\zeta)$ di due rami consecutivi della funzione polidroma $f(\zeta)$ dipenda dalla sola funzione incognita φ , e da essa potremo subito ricavare la funzione $\varphi(t)$

cercata, una volta note le funzioni $f(\zeta)$ e $K(\zeta, t)$ (e quindi anche $s(\zeta)$ e $r(\zeta)$). Dalla (6) infatti, posto $t = s(\zeta)$, $\zeta = s^*(t)$ (funzione inversa della $s(\zeta)$ nota), avremo

$$f_1(s^*(t)) - f(s^*(t)) = 2\pi i r(s^*(t)) \varphi(t)$$

da cui

$$(7) \quad \varphi(t) = \frac{1}{2\pi i r(s^*(t))} \left[f_1(s^*(t)) - f(s^*(t)) \right]$$

Sostituendo poi questo valore di $\varphi(t)$ nell'equazione (3) avremo

$$(8) \quad \psi(\zeta) = f(\zeta) - \int_a^b K(\zeta, t) \varphi(t) dt$$

e quando ζ , partendo da un punto qualsiasi ζ_0 di σ gira intorno a β e ritorna in ζ_0 , la $\psi(\zeta)$ ritorna in ζ_0 con un valore $\psi_1(\zeta_0)$ per cui è

$$\psi_1(\zeta_0) - \psi(\zeta_0) = f_1(\zeta_0) - f(\zeta_0) - \int_{L_1} K(\zeta_0, t) \varphi(t) dt$$

e quindi, a causa della (5), $\psi_1(\zeta_0) - \psi(\zeta_0) = 0$, cioè la funzione $\psi(\zeta)$, perfettamente determinata dalla (8) e soddisfacente insieme alla $\varphi(t)$ all'equazione (3), risulta *monodroma* nell'intorno σ di β , come era richiesto.

Riassumendo, abbiamo dunque che se il nucleo K dell'equazione integrale (3) ha un polo del primo ordine per $t = s(\zeta)$, l'equazione stessa ammette un sistema di soluzioni $\varphi(t)$, $\psi(\zeta)$, perfettamente determinate dalle (7) e (8) rispettivamente, e quindi l'equazione (1) primitiva potrà avere una soluzione $\varphi(t)$ diversa da 0 soltanto quando $f(\zeta)$ abbia per punti critici (logaritmici) quei punti β per cui $s(\beta) = b$ (estremo dell'integrale).

Dalla (7) segue anche che se $f(\zeta) = 0$, anche $\varphi(t) = 0$ e quindi, nelle nostre ipotesi che il nucleo K abbia un polo del primo ordine mobile, il nucleo stesso risulta necessariamente chiuso.

5. - Come esempio, si voglia risolvere l'equazione

$$(9) \quad \int_0^{\zeta} \frac{1}{1-t\zeta} \varphi(t) dt = -\frac{\zeta+2}{2\zeta^2} - \frac{1}{\zeta^3} \log(1-\zeta)$$

$$\text{Il nucleo } K(\zeta, t) = \frac{1}{1-t\zeta} = \frac{-\frac{1}{\zeta}}{t - \frac{1}{\zeta}} \text{ ha un polo del primo ordine}$$

per $t = s(\zeta) = \frac{1}{\zeta}$, con residuo $r(\zeta) = -\frac{1}{\zeta}$. Nel punto $\zeta = 1$, per cui $t = \frac{1}{\zeta}$ assume il valore 1 (limite superiore dell'integrale) mentre $s'(\zeta) = -\frac{1}{\zeta^2}$ ha il valore $-1 \neq 0$, la funzione $f(\zeta) = -\frac{\zeta+2}{2\zeta^2} - \frac{1}{\zeta^3} \log(1-\zeta)$ ha un punto critico, e la differenza fra due rami consecutivi è $-\frac{2\pi i}{\zeta^3}$; applicando allora la formula (6) avremo, per la $\varphi(t)$, l'equazione

$$-\frac{2\pi i}{\zeta^3} = 2\pi i \left(-\frac{1}{\zeta}\right) \cdot \varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

da cui, posto $\frac{1}{\zeta} = i$

$$\varphi(t) = t^2$$

che sostituita nella (9) la soddisfa effettivamente.

Osserviamo però che se nella $f(\zeta)$ fosse mancata la parte monodroma $-\frac{\zeta+2}{2\zeta^2}$, l'equazione

$$(10) \quad \int_0^1 \frac{1}{1-t\zeta} \varphi(t) dt = -\frac{1}{\zeta^3} \log(1-\zeta)$$

non avrebbe avuto nessuna soluzione, poichè l'equazione

$$(10') \quad \int_0^1 \frac{1}{1-t\zeta} \varphi(t) dt + \psi(\zeta) = -\frac{1}{\zeta^3} \log(1-\zeta)$$

avrebbe avuto per soluzioni $\varphi(t) = t^2, \psi(\zeta) = \frac{\zeta+2}{2\zeta^2}$ che è diversa da 0.

6. - Se il nucleo K, ferme restando le altre ipotesi, avesse per $t = s(\zeta)$ un polo d'ordine n , se cioè fosse

$$K(\zeta, t) = K_1(\zeta, t) + \frac{r_0(\zeta)}{t-s(\zeta)} + \frac{r_1(\zeta)}{[t-s(\zeta)]^2} + \dots + \frac{r_{n-1}(\zeta)}{[t-s(\zeta)]^n}$$

le considerazioni fatte ci porterebbero pure a concludere che la $f(\zeta)$ dovrebbe essere polidroma per $\varphi(t) \neq 0$; soltanto che, invece della (6), si

avrebbe, per la differenza tra due rami consecutivi $f_1(\zeta)$ e $f(\zeta)$, l'altra espressione

$$(11) \quad f_1(\zeta) - f(\zeta) = 2\pi i \left[r_0(\zeta) \varphi(s(\zeta)) + \frac{r_1(\zeta)}{1!} \varphi'(s(\zeta)) + \dots + \frac{r_{n-1}(\zeta)}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(s(\zeta)) \right]$$

da cui, per la $\varphi(t)$, l'equazione differenziale lineare d'ordine $n-1$

$$(12) \quad r_0(s^*(t)) \varphi(t) + \frac{r_1(s^*(t))}{1!} \varphi'(t) + \dots + \frac{r_{n-1}(s^*(t))}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(t) = \frac{f_1(s^*(t)) - f(s^*(t))}{2\pi i}$$

Se quindi è n il minimo ordine dei poli mobili del nucleo, la soluzione $\varphi(t)$ della (1) può dipendere al massimo da $n-1$ costanti arbitrarie.

Da tutto ciò risulta che la soluzione $\varphi(t)$ di un'equazione di 1ª specie (1) dipende dal nucleo [dalle funzioni $s(\zeta)$ e $r_k(\zeta)$] e dalla parte polidroma soltanto della $f(\zeta)$, mentre la parte monodroma $\psi(\zeta)$ che compare nell'equazione (3) risulta completamente determinata da questi elementi.

Fisica matematica. — *Sulle condizioni di esistenza del teorema di reciprocità del Volterra.* Nota di ORAZIO LAZZARINO, presentata dal Socio L. BIANCHI ⁽¹⁾.

In una Nota precedente ⁽²⁾, alla quale mi rimetto per la parte bibliografica, determinai con procedimento rapido e nuovo, ma partendo dalla ipotesi elettronica del Drude, le condizioni di esistenza del teorema di reciprocità del prof. V. Volterra, nelle ipotesi più generali di un conduttore tridimensionale, anisotropo, non omogeneo, disposto comunque in un campo magnetico qualsiasi.

Data la notevole importanza del teorema, cui si connettono le interpretazioni degli interessanti fenomeni di Hall e di Corbino, era vivamente desiderabile una nuova ricerca delle predette condizioni, che fosse del tutto indipendente dall'ipotesi elettronica, principalmente per vedere se la ve-

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1925.

(2) O. LAZZARINO, questi « Rendiconti », vol. XXVI, serie 5ª, 1º semestre 1917, pp. 596-602.

rifica sperimentale del teorema di reciprocità potesse significare verifica per l'ipotesi del Drude⁽²⁾.

In questa Nota dimostro che è possibile stabilire le condizioni di esistenza del teorema di reciprocità, nelle ipotesi più generali sopra indicate, *indipendentemente* non solo dall'ipotesi elettronica, ma da qualsiasi ipotesi sulla natura e sul meccanismo della corrente elettrica. Basta ammettere: la legge di *Ohm* relativa ai mezzi anisotropi, l'equazione di continuità per la corrente e l'ipotesi che le alterazioni, provocate eventualmente dal campo magnetico sulla conduttività specifica del corpo, s'invertano di segno con l'inversione del campo.

Le condizioni trovate determinano anche *la forma delle due omografie* che devono caratterizzare rispettivamente la conduttività specifica del corpo, in ogni suo punto, e le alterazioni, di tale conduttività, prodotte dal campo magnetico.

I. — RELAZIONE FRA CORRENTE E POTENZIALE.

Siano \mathbf{e} , \mathbf{i} rispettivamente i vettori della forza e della corrente elettrica; γ una omografia, funzione continua dei punti del conduttore, caratterizzante la conducibilità specifica di questo supposto in generale tridimensionale, anisotropo, non omogeneo, ma mantenuto a temperatura costante. Per un tale conduttore la legge di *Ohm* può scriversi

$$(1) \quad \mathbf{i} = \gamma \mathbf{e}$$

dove γ può, in particolare, ridursi ad un numero reale (omotetia vettoriale) quando si tratti di corpi isotropi.

Indicando con φ il potenziale elettrostatico, si ha $\mathbf{e} = - \text{grad } \varphi$ e quindi alla (1) si può dare la forma

$$(2) \quad \mathbf{i} = - \gamma \text{ grad } \varphi.$$

Si noti che la relazione (2) fra corrente e potenziale, di cui faremo uso in seguito, può ritenersi, come *legge sperimentale*, indipendente da qualsiasi ipotesi sulla natura e sul meccanismo della corrente elettrica.

2. RICERCA DELLE CONDIZIONI DI ESISTENZA DEL TEOREMA DI RECIPROCIÀ.

Nella sua forma più generale il teorema di reciprocità può enunciarsi:
« In un conduttore elettrico tridimensionale, anisotropo, non omogeneo, munito di quattro elettrodi A, B, C, D di resistenza trascurabile, mantenuto

(1) Ringrazio il collega PUCCANTI per aver richiamato la mia attenzione su questo argomento durante una recente discussione, in sede di laurea, di una Tesi sperimentale sul *fenomeno di Hall*.

a temperatura costante e disposto comunque in un campo magnetico qualsiasi, la differenza di potenziale che si stabilisce fra C e D, al passaggio di una corrente elettrica che entra per A ed esce per B, è uguale alla differenza di potenziale che si stabilisce fra A e B, quando, col campo invertito, una corrente d'intensità eguale alla precedente, entra per C ed esce per D ».

Siano: \mathbf{i}_1, φ_1 rispettivamente il vettore della corrente ed il potenziale quando, col campo diretto, la corrente entra per A ed esce per B; \mathbf{i}_2, φ_2 gli elementi analoghi quando, col campo invertito, la corrente entra per C ed esce per D; σ il contorno completo, supposto qualunque, purché regolare, del conduttore; \mathbf{n} un vettore unitario normale a σ in un suo punto generico e rivolto verso l'interno del corpo; τ lo spazio racchiuso dalla superficie σ . Supponiamo che, in tutto lo spazio τ , φ_1 e φ_2 siano regolari, insieme con le loro derivate prime rispetto ai punti di cui sono funzioni, e che i vettori $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ abbiano distribuzione solenoidale, cioè

$$(3) \quad \operatorname{div} \mathbf{i}_1 = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{i}_2 = 0.$$

Considerando, per il caso in esame, la formula fondamentale analoga a quella da cui il Volterra dedusse per la lamina il teorema, cioè

$$(4) \quad \int (\varphi_2 \mathbf{i}_1 - \varphi_1 \mathbf{i}_2) \times \mathbf{n} \cdot d\sigma = 0,$$

la ricerca si riduce alla determinazione delle condizioni di esistenza della (4) la quale esprime che « il flusso totale del vettore $(\varphi_2 \mathbf{i}_1 - \varphi_1 \mathbf{i}_2)$ attraverso la superficie σ del conduttore deve essere nullo ».

Trasformiamo il primo membro della (4) mediante il teorema della divergenza. Per formule note [A. V. G., I, p. 110, (1); p. 79, (2)]¹⁾ si può scrivere successivamente

$$(5) \quad \int (\varphi_2 \mathbf{i}_1 - \varphi_1 \mathbf{i}_2) \times \mathbf{n} \cdot d\sigma = - \int \operatorname{div} (\varphi_2 \mathbf{i}_1 - \varphi_1 \mathbf{i}_2) \cdot d\tau = \\ = - \int (\varphi_2 \operatorname{div} \mathbf{i}_1 - \operatorname{grad} \varphi_2 \times \mathbf{i}_1 - \varphi_1 \operatorname{div} \mathbf{i}_2 - \operatorname{grad} \varphi_1 \times \mathbf{i}_2) \cdot d\tau$$

ossia, tenendo conto delle (3),

$$(6) \quad \int (\varphi_2 \mathbf{i}_1 - \varphi_1 \mathbf{i}_2) \times \mathbf{n} \cdot d\sigma = \int (\operatorname{grad} \varphi_2 \times \mathbf{i}_1 - \operatorname{grad} \varphi_1 \times \mathbf{i}_2) \cdot d\tau.$$

¹⁾ Con la sigla A. V. G. I. denotiamo il primo volume dell'*Analisi vectoriale generale* di C. BURALI-FORTI et R. MARCOLONGO, Pavia, edizione 1912.

Ora, indicando con μ l'omografia che caratterizza le alterazioni provocate dal campo magnetico sulla conduttività specifica del corpo, e supponendo che queste alterazioni sian tali che s'inverta il loro segno per l'inversione del campo e si possa porre

$$(7) \quad \alpha_1 = \gamma + \mu, \quad \alpha_2 = \gamma - \mu,$$

si ha che, per la (2), i vettori i_1, i_2 saranno espressi da

$$i_1 = -\alpha_1 \operatorname{grad} \varphi_1, \quad i_2 = -\alpha_2 \operatorname{grad} \varphi_2$$

e quindi si può dare alla (6) la forma

$$\begin{aligned} & \int (\varphi_2 i_1 - \varphi_1 i_2) \times n \cdot d\sigma = \\ & = \int (\operatorname{grad} \varphi_2 \times \alpha_1 \operatorname{grad} \varphi_1 - \operatorname{grad} \varphi_1 \times \alpha_2 \operatorname{grad} \varphi_2) d\tau, \end{aligned}$$

ossia, applicando il teorema di commutazione [A. V. G., I, pag. 32],

$$(8) \quad \int (\varphi_2 i_1 - \varphi_1 i_2) \times n \cdot d\sigma = \int (\alpha_1 - K\alpha_2) \operatorname{grad} \varphi_1 \times \operatorname{grad} \varphi_2 \cdot d\tau.$$

Ora, tenendo anche presenti le fatte ipotesi di regolarità sulle funzioni φ_1, φ_2 e la circostanza che l'argomento del secondo integrale della (8) è esprimibile mediante la divergenza di un vettore, come si vede dalla forma intermedia della (5), si deduce che affinché, per un dato conduttore, in generale anisotropo ed eterogeneo, il detto integrale risulti *sempre nullo*, comunque si facciano variare, compatibilmente con le possibilità sperimentali, la forma e la posizione del conduttore nel campo magnetico, l'intensità e la forma di questo, la posizione degli elettrodi, la densità della corrente ecc., è necessario e basta che, per ogni punto del conduttore, sia soddisfatta la condizione

$$(9) \quad \alpha_1 - K\alpha_2 = 0.$$

Volendo precisare il significato della (9), osserviamo che, tenendo conto della (7) e ricordando che K è operatore lineare, [A. V. G., I, p. 26, (1)] la (9) può scriversi

$$(9') \quad \gamma - K\gamma = -(\mu + K\mu),$$

ossia, poichè $\gamma - K\gamma = 2 V\gamma\wedge, \mu + K\mu = 2 D\mu$ [A.V.G., I, p. 25, (1) e (2)],

$$V\gamma\wedge = - D\mu$$

e questa eguaglianza importa necessariamente [id., p. 22]

$$V\gamma\wedge = 0, \quad D\mu = 0$$

ossia, per le (9'),

$$(10) \quad K\gamma = \gamma, \quad K\mu = -\mu.$$

« Le (10) sono rispettivamente verificate quando, e solo quando, l'omografia γ è *dilatazione* e μ *omografia assiale* ». [A. V. G., I, p. 26, (3) e (4)].

Si può quindi concludere che, indipendentemente da qualsiasi ipotesi sulla natura e sul meccanismo della corrente elettrica, le condizioni di esistenza del teorema di reciprocità, nelle ipotesi più generali sopra indicate, sono:

a) « L'omografia γ , caratterizzante, in ogni punto, la conduttività specifica del corpo, deve essere *dilatazione* per conduttori anisotropi ed eterogenei; in particolare *omotetia* per conduttori isotropi.

b) « L'omografia μ , caratterizzante le eventuali alterazioni di detta conduttività provocate dal campo magnetico, deve essere *omografia assiale* ».

Sarebbe ora interessante esaminare, il che sarà oggetto di una Nota successiva, quali tipi di conduttori siano in grado di soddisfare alle condizioni trovate. Intanto si può osservare che tali condizioni si riferiscono più direttamente alle caratteristiche elettriche del conduttore, onde parrebbe che sul fenomeno possano avere influenza solo quegli elementi che siano capaci di modificare direttamente od indirettamente tali caratteristiche. È anche degno di rilievo il risultato che l'omografia μ , sulla cui forma non è stata fatta *a priori* alcuna ipotesi particolare, risulti del tipo di quella che caratterizza l'azione del campo magnetico sopra una carica elettrica in moto. Ciò, molto probabilmente, è dovuto all'ipotesi ammessa che l'inversione del campo importi inversione di segno nelle alterazioni da esso provocate ed al fatto che il campo magnetico ha per sua natura la *simmetria di una omografia assiale* ⁽¹⁾.

(1) Cfr. H. BOUASSE, *Cours de Physique*. Sixième partie: *Étude des Symétries*. Paris, Librairie Ch. Delagrave, §§ 42 e 379. La nostra *omografia assiale* corrisponde al *vettore assiale* del Bouasse, il quale dice che: « la simmetria del campo magnetico è quella di un cilindro rotante attorno al proprio asse. Tale simmetria è rappresentabile mediante una freccia, come un vettore; ma questo è un vettore assiale ».

Matematica. — *Sur les fonctions, qui satisfont à une condition de Lipschitz généralisée.* Nota di STEFAN MAZURKIEWICZ, presentata dal Corrisp. L. TONELLI⁽¹⁾.

Cette note contient la solution affirmative de la question suivante posée par M. Zygmund: existe-t-il, pour tout nombre positif $\alpha < 1$, une fonction $f(x)$, définie dans l'intervalle $(0, 1)$, monotone, non constante, satisfaisant à la condition de Lipschitz généralisée:

$$(1) \quad |f(x_2) - f(x_1)| \leq M |x_2 - x_1|^\alpha$$

et possédant presque partout une dérivée nulle? Cette fonction ne pouvant être absolument continue, nous obtenons du même coup la solution d'un problème de M. Tonelli concernant l'existence de fonctions, satisfaisant à (1) et n'étant pas absolument continues.

Excluons de l'intervalle fermé $(0, 1)$ l'intervalle ouvert concentrique, de longueur $1 - \frac{2}{2^\alpha}$; il reste deux intervalles fermés de longueur $\frac{1}{2^\alpha}$.

Excluons de chacun d'eux l'intervalle ouvert, concentrique, de longueur $\frac{1}{2^\alpha} \left(1 - \frac{2}{2^\alpha}\right)$; il reste quatre intervalles fermés de longueur $\frac{1}{2^\alpha}$. Excluons

de chacun d'eux l'intervalle ouvert concentrique de longueur $\frac{1}{2^\alpha} \left(1 - \frac{2}{2^\alpha}\right)$ etc.

Dans la $n^{\text{ième}}$ opération nous excluons 2^{n-1} intervalles ouverts de longueur $\frac{1}{2^\alpha} \left(1 - \frac{2}{2^\alpha}\right)$ - je les appellerai *intervalles blancs* d'ordre n - il reste 2^n

intervalles fermés de longueur $\frac{1}{2^\alpha}$, que j'appellerai *intervalles noirs* d'ordre n .

Déterminons $f_n(x)$ par les conditions suivantes: I, si x n'est pas intérieur à aucun intervalle noir d'ordre n - nous poserons $f_n(x) = k_x \left(\frac{1}{2^\alpha}\right)^\alpha = \frac{k_x}{2^n}$, k_x désignant le nombre d'intervalles noirs d'ordre n contenus dans l'intervalle fermé $(0, x)$; II, à l'intérieur d'intervalles noirs d'ordre n , $f_n(x)$ varie linéairement.

(1) Pervenuta all'Accademia il 28 giugno 1925.

Nous démontrerons que l'on a pour tout couple de nombres x_1, x_2 contenus dans $(0, 1)$ l'inégalité:

$$(2) \quad |f_n(x_2) - f_n(x_1)| \leq \frac{4}{\left(1 - \frac{2}{2^\alpha}\right)^\alpha} |x_2 - x_1|^\alpha.$$

On peut toujours supposer que $x_1 < x_2$.

Supposons d'abord que l'intervalle (x_1, x_2) contient exactement N intervalles blancs d'ordre $\leq n$. Posons: $p = E(\log_2(N + 1))$, $E(y)$ désignant le plus grand entier $\leq y$. On aura:

$$N \leq 2^p - 1; \quad p > \log_2(N + 1) - 1 > \log_2 N - 1; \quad 2^p > 2^{\log_2 N - 1} = \frac{N}{2}.$$

Déterminons $x_3 > x_1$ de manière que (x_1, x_3) contient exactement $2^p - 1$ intervalles blancs d'ordre $\leq n$. Nous les diviserons en p systèmes de la manière suivante:

1) Le $k^{\text{ième}}$ système contient 2^{p-k} intervalles.

2) Pour $k < l$ un intervalle du $k^{\text{ième}}$ système n'est jamais d'ordre inférieur à un intervalle du $l^{\text{ième}}$ système.

Remarquons que d'après notre définition d'intervalles blancs, il existe entre deux intervalles blancs d'ordre $m > 1$, au moins un intervalle blanc d'ordre inférieur. On en conclut facilement que les intervalles du $k^{\text{ième}}$ système sont d'ordre $\leq n - k + 1$. La longueur d'un intervalle blanc d'ordre $n - k + 1$ étant $\frac{1}{2^{\frac{n-k}{\alpha}}} \left(1 - \frac{2}{2^\alpha}\right)$, la longueur totale d'intervalles

du $k^{\text{ième}}$ système sera $\leq \frac{2^{p-k}}{2^{\frac{n-k}{\alpha}}} \left(1 - \frac{2}{2^\alpha}\right)$. Mais entre deux intervalles blancs

d'ordre $\leq n$ on trouve toujours un intervalle noir d'ordre n . Donc l'intervalle (x_1, x_3) contient au moins $2^p - 2$ intervalles noirs d'ordre n . Il s'ensuit:

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &\geq x_3 - x_1 \geq (2^p - 2) \cdot \frac{1}{2^\alpha} + \sum_{k=1}^p \frac{2^{p-k}}{2^{\frac{n-k}{\alpha}}} \left(1 - \frac{2}{2^\alpha}\right) = \frac{1}{2^{\frac{n-p}{\alpha}}} \left(1 - \frac{2}{2^\alpha}\right) \geq \\ &\geq \frac{1}{2^{\frac{n-p}{\alpha}}} \left(1 - \frac{2}{2^\alpha}\right) = (2^p)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \frac{1}{2^\alpha} \left(1 - \frac{2}{2^\alpha}\right) \geq \frac{N^{\frac{1}{\alpha}}}{2^{\frac{n+1}{\alpha}}} \left(1 - \frac{2}{2^\alpha}\right) \\ |x_2 - x_1|^\alpha &\geq \frac{N}{2^{n+1}} \left(1 - \frac{2}{2^\alpha}\right)^\alpha. \end{aligned}$$

D'autre part, la variation de $f_n(x)$ étant nulle dans tout intervalle blanc d'ordre $\equiv n$, et $\frac{1}{2^n}$ dans tout intervalle noir d'ordre n , on aura :

$$|f_n(x_2) - f_n(x_1)| \equiv (N + 1) \cdot \frac{1}{2^n} \equiv \frac{2N}{2^n} \equiv \frac{4}{\left(1 - \frac{2}{2^\alpha}\right)^\alpha} |x_2 - x_1|^\alpha.$$

Si l'intervalle (x_1, x_2) ne contient aucun intervalle blanc d'ordre $\equiv n$, on aura à distinguer 4 cas: 1) x_1 et x_2 sont situés dans un même intervalle noir d'ordre n ; 2) dans un même intervalle blanc d'ordre $\equiv n$; 3) un de ces points est contenu dans un intervalle noir d'ordre n , l'autre dans un intervalle blanc d'ordre $\equiv n$, voisin; 4) x_1 et x_2 sont situés dans deux intervalles blancs d'ordre $\equiv n$, avoisinant un même intervalle noir d'ordre n .

Les intervalles blancs d'ordre $\equiv n$ étant de traits d'invariabilité pour $f_n(x)$, il suffit de considérer le cas 1). On a dans ce cas :

$$|x_2 - x_1| \leq \frac{1}{2^\alpha}$$

$$\begin{aligned} |f_n(x_2) - f_n(x_1)| &= \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^\alpha}} |x_2 - x_1| = \frac{2^\alpha}{2^n} |x_2 - x_1|^\alpha \cdot |x_2 - x_1|^{1-\alpha} \equiv \\ &\equiv \frac{2^\alpha}{2^n} |x_2 - x_1|^\alpha \cdot \left(\frac{1}{2^\alpha}\right)^{1-\alpha} = |x_2 - x_1|^\alpha \end{aligned}$$

et *a fortiori* l'inégalité (2).

D'après cette inégalité les $f_n(x)$ sont également continues. On voit facilement que dans un intervalle blanc d'ordre m toutes les fonctions $f_{m+p}(x)$ ($p = 0, 1, 2, \dots$) sont égales, donc la suite $\{f_n(x)\}$ converge dans l'ensemble somme d'intervalles blancs. Cet ensemble étant dense dans l'intervalle $(0, 1)$, il en résulte en vertu de l'égale continuité, que la suite $\{f_n(x)\}$ converge uniformément dans l'intervalle $(0, 1)$. Posons $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Les $f_n(x)$ étant non décroissantes il en est de même de $f(x)$. On a $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$ donc $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, ce qui montre que $f(x)$ est non-constante. L'inégalité (2) entraîne :

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq \frac{4}{\left(1 - \frac{2}{2^\alpha}\right)^\alpha} |x_2 - x_1|^\alpha.$$

Enfin les intervalles blancs d'ordre n étant de traits d'invariabilité de $f_{n+p}(x)$ ($p = 0, 1, 2 \dots$) le sont aussi pour $f(x)$. Donc $f'(x)$ existe et s'annule dans l'ensemble-somme d'intervalles blancs (ces intervalles étant ouverts).

Or la mesure de cet ensemble est:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^{\frac{n-1}{\alpha}}} \left(1 - \frac{2}{2^{\frac{1}{\alpha}}} \right) = 1.$$

$f(x)$ possède donc les propriétés annoncées.

M. Zygmund a remarqué que pour $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$ notre procédé donne la fonction bien connue de Cantor. J'ajouterais enfin que $f(x)$ peut être définie comme la solution continue du système suivant d'équations fonctionnelles ⁽¹⁾:

$$f\left(\frac{x}{2^{\frac{1}{\alpha}}}\right) = \frac{1}{2} f(x) \quad ; \quad f\left(x \left(1 - \frac{2}{2^{\frac{1}{\alpha}}}\right) + \frac{1}{2^{\frac{1}{\alpha}}}\right) = \frac{1}{2} \quad ;$$

$$f\left(\frac{x + \frac{1}{2^{\frac{1}{\alpha}}} - 1}{\frac{1}{2^{\frac{1}{\alpha}}}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f(x)$$

$$0 \leq x \leq 1.$$

Matematica. — *Sulle equazioni integrali quadratiche a limiti variabili.* Nota del Dott. ALFREDO SABBATINI, presentata dal Socio V. VOLTERRA ⁽²⁾.

1. In una precedente Nota ho mostrato, che le equazioni integrali non lineari a limiti variabili, nell'ipotesi che tutti i nuclei siano finiti, non possono ammettere più di una soluzione.

Mi propongo in questa Nota di studiare in modo particolare l'equazione integrale quadratica:

$$(I) \quad \psi(x) = \varphi(x) + \lambda \int_0^x F_1(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi + \mu \int_0^x \int_0^x F_2(x, \xi, \eta) \varphi(\xi) \varphi(\eta) d\xi d\eta$$

e di vedere entro quali limiti si può dare di essa la soluzione.

(1) V. SIERPIŃSKI, *Rozpr. Akad. Um. Cracovie* 1912, p. 1-15 (en polonais); où l'on trouve la définition de la fonction de Cantor par un système d'équations fonctionnelles.

(2) Presentata nella seduta del 21 giugno 1925.

Vogliamo innanzi tutto mostrare che:

TEOREMA: Mediante risoluzione di un'equazione di Volterra, la (1) si può mutare nella equazione equivalente:

$$(2) \quad g(x) = \varphi(x) + \mu \int_0^x \int_0^x H(x, \xi, \eta) \varphi(\xi) \varphi(\eta) d\xi d\eta$$

in cui manca l'integrale lineare nella $\varphi(\xi)$.

Sia invero $S(x, y|\lambda)$ il nucleo risolvete dell'equazione di Volterra di nucleo $F_1(x, \xi)$. Poniamo nella (1) y in luogo di x , indi moltiplichiamo per $S(x, y|\lambda)$ ed integriamo rapporto ad y fra 0 ed x ; avremo così:

$$\begin{aligned} \int_0^x \psi(y) S(x, y|\lambda) dy &= \int_0^x \varphi(y) dy \left\{ S(x, y|\lambda) + \lambda \int_y^x S(x, \xi|\lambda) F_1(\xi, y) d\xi \right\} + \\ &+ \mu \int_0^x S(x, y|\lambda) dy \int_0^y \int_0^y F_2(y, \xi, \eta) \varphi(\xi) \varphi(\eta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Aggiungiamo ora alla (1), membro a membro l'espressione ultima moltiplicata per λ ; se teniamo conto della relazione:

$$S(x, y|\lambda) + F_1(x, y) + \lambda \int_y^x S(x, \xi|\lambda) F_1(\xi, y) d\xi = 0$$

avremo appunto l'equazione (2), in cui:

$$g(x) = \psi(x) + \lambda \int_0^x S(x, y|\lambda) \psi(y) dy$$

ed

$$H(x, \xi, \eta) = F_2(x, \xi, \eta) + \lambda \int_0^x S(x, y|\lambda) F_2(y, \xi, \eta) dy;$$

in quest'ultima relazione va preso $F_2(y, \xi, \eta) = 0$ per $y < \xi$ od $y < \eta$.

Osserviamo che l'equazione (2) equivalente alla (1) ha la funzione nota $g(x)$ limitata tutte le volte che sono limitate le funzioni $\psi(x)$ e $F_1(x, \xi)$, ed analogamente il nucleo $H(x, \xi, \eta)$ limitato tutte le volte che sono limitati i nuclei $F_1(x, \xi)$ e $F_2(x, \xi, \eta)$ della (1).

2. Ci proponiamo ora di risolvere l'equazione integrale (2) col metodo delle approssimazioni successive. Cercheremo perciò di porre l'incognita funzione $\varphi(\xi)$, sotto forma di una serie ordinata secondo le potenze di μ , cioè:

$$(3) \quad \varphi(x) = \sum_0^{\infty} \varphi_n(x) \mu^n.$$

Sostituiamo questa espressione di $\varphi(x)$ nella (2), ed uguagliamo nei due membri i coefficienti delle stesse potenze di μ .

Troviamo così:

$$(4) \quad \begin{cases} \varphi_0(x) = g(x) \\ \varphi_{n+1}(x) = - \sum_0^n \int_0^x \int_0^x H(x, \xi, \eta) \varphi_p(\xi) \varphi_{n-p}(\eta) d\xi d\eta. \end{cases}$$

Queste relazioni ricorrenti, sono sufficienti ad ottenerci tutti i coefficienti della serie (3), e quindi nell'ipotesi che la serie stessa converga, a darci la soluzione della (2).

Studiamo ora entro quali limiti la serie (3) risulta convergente, nell'ipotesi che le funzioni $g(x)$ ed $H(x, \xi, \eta)$ siano limitate; cioè sia:

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq M \\ |H(x, \xi, \eta)| &\leq N, \end{aligned}$$

In tale ipotesi abbiamo:

$$(5) \quad \begin{cases} |\varphi_0(x)| \leq M \\ |\varphi_1(x)| \leq M^2 N x^2 \\ \dots\dots\dots \\ |\varphi_n(x)| \leq \Omega_n M^{n+1} N^n x^{2n} \end{cases}$$

dove Ω_n è un numero positivo dipendente dall'indice n . Per i coefficienti Ω_n , mediante la seconda delle equazioni (4) si ottiene la relazione ricorrente:

$$(6) \quad \Omega_{n+1} = \sum_0^n \frac{\Omega_p}{2p+1} \cdot \frac{\Omega_{n-p}}{2n-2p+1}$$

avendosi per l'indice 0, $\Omega_0 = 1$.

3. Il calcolo dei coefficienti Ω_n , definiti dalla (6) si può fare, supponendo che essi siano i coefficienti dello sviluppo di Maclaurin di una funzione analitica:

$$y = f(x) = \sum_0^\infty \Omega_n x^n.$$

Si trova in tal caso che la funzione y , soddisfa alla equazione differenziale del 2° ordine:

$$2xyy'' + yy' - 2xyy'^2 - y^3 = 0,$$

la quale ammette per integrale generale:

$$y = \frac{K^2}{\cos^2 \{ K \sqrt{x} + K_1 \}}.$$

Nel caso nostro si richiede che la funzione y e la derivata siano regolari nel punto $x = 0$, ed inoltre si abbia $y_0 = f(0) = 1$; per ciò occorre prendere $K_1 = 0$ e $K^2 = 1$ e si ottiene così:

$$(7) \quad y = \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}}.$$

Questa funzione regolare per $x = 0$, sviluppata in serie di Maclaurin, ci dà appunto i coefficienti Ω_n .

4. Noi troveremo per altra via lo stesso risultato, col beneficio di poter dire qualche cosa intorno alla soluzione della equazione (2). A tal uopo osserviamo che se nella equazione (2) poniamo

$$g(x) = M \quad \text{e} \quad H(x, \xi, \eta) = -N$$

il coefficiente generale $\varphi_n(x)$ che comparisce nella serie (3) è proprio: $\varphi_n(x) = \Omega_n M^{n+1} N^n x^{2n}$ quale comparisce nelle disuguaglianze (5). Ma in tal caso l'equazione (2) si riduce all'equazione:

$$(2^*) \quad M = \varphi(x) - \mu N \left[\int_0^x \varphi(\xi) d\xi \right]^2$$

che si risolve con estrema facilità.

Si ha infatti dalla (2*):

$$\sqrt{\frac{\varphi(x) - M}{\mu N}} = \int_0^x \varphi(\xi) d\xi$$

da cui si ricava:

$$\frac{d}{dx} \sqrt{\frac{\varphi(x) - M}{\mu N}} = \frac{\varphi'(x)}{2 \sqrt{\mu N (\varphi(x) - M)}} = \varphi(x)$$

ossia:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x) \sqrt{\varphi(x) - M}} = 2 \sqrt{\mu N}.$$

Poniamo ora:

$$\varphi(x) - M = u^2(x);$$

avremo così: $\varphi'(x) = 2 u u'$; $\varphi(x) = u^2 + M$, e quindi si ha in u l'equazione differenziale:

$$\frac{u'}{u^2 + M} = \sqrt{\mu N}$$

che s'integra immediatamente. Si ottiene così:

$$\operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{M}} = \sqrt{\mu MN} \cdot x + C$$

e quindi:

$$u(x) = \sqrt{M} \operatorname{tg} \{ \sqrt{\mu MN} \cdot x + C \}.$$

Da questa, si ricava per $\varphi(x)$:

$$(8) \quad \varphi(x) = M [1 + \operatorname{tg}^2 \{ \sqrt{\mu MN} \cdot x + C \}] = \frac{M}{\cos^2 \{ \sqrt{\mu MN} \cdot x + C \}}.$$

La costante C va scelta in modo che si abbia, per $\mu = 0$, $\varphi(x) = M$, quindi: $C = 0$. Si ha così:

$$(9) \quad \varphi(x) = \frac{M}{\cos^2 \sqrt{\mu MN} \cdot x}.$$

Questa funzione $\varphi(x)$, per il modo come si è ottenuta, soddisfa alla equazione (2*) per tutti i valori possibili di μ , M ed N .

5. Il risultato precedente ci permette di fare una discussione dell'equazione (2) in casi molto generali.

a) Poichè la funzione $\varphi(x)$ data dalla (9), sviluppata in serie di potenze della x , ci dà una serie maggiorante della serie (3), e la $\varphi(x)$ ha i suoi poli più vicini al punto $x = 0$ nei punti

$$x = \pm \frac{\pi}{2} : \sqrt{\mu MN},$$

così risulta che la serie (3) converge assolutamente ed uniformemente per tutti valori per i quali si ha:

$$\left| \sqrt{\mu MN} x \right| < \frac{\pi}{2}.$$

b) Se le funzioni $g(x)$ ed $H(x, \xi, \eta)$ che intervengono nella (2), si mantengono sempre dello stesso segno, e in modo che sia:

$$m < |g(x)| < M$$

$$n < |H(x, \xi, \eta)| < N,$$

ed inoltre esse hanno il loro prodotto negativo, allora risulta che la serie (3) ha i suoi termini tutti dello stesso segno, quello di $g(x)$; e quindi per $x \geq 0$ $\mu > 0$ le funzioni

$$\varphi_1(x) = \frac{M}{\cos^2 \sqrt{\mu MN} \cdot x}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{m}{\cos^2 \sqrt{\mu mn} \cdot x}$$

sono rispettivamente maggiorante e minorante rispetto alla serie (3). Ma la $\varphi_2(x)$ ha un polo del 2° ordine per: $\sqrt{\mu m n} \cdot x = \frac{\pi}{2}$; dunque se ne conclude che la $\varphi(x)$ data dalla (3) ha almeno un polo in un certo punto x_0 tale che

$$\frac{\pi}{2\sqrt{\mu M N}} < x_0 < \frac{\pi}{2\sqrt{\mu m n}}.$$

Dunque in un caso abbastanza generale l'equazione integrale quadratica (2) ammette una soluzione con un punto d'infinito sull'asse reale delle x , polo che impedisce nel campo reale l'esistenza di una soluzione per $\varphi(x)$ quando $x > x_0$.

Non è detto tuttavia che la serie (3) non definisca una funzione $\varphi(x) = \varphi(x|\mu)$ per quei valori per i quali essa non è più convergente. Si avrà una funzione $\varphi(x)$ definita in un campo più vasto di quello in cui converge la (3), se per ogni valore di x la $\varphi(x|\mu)$ è prolungabile al di fuori del cerchio $|\mu| < \frac{\pi^2}{4 M N x^2}$.

c) Abbiamo già osservato che la funzione $\varphi(x)$ data dalla (9), soddisfa sempre all'equazione (2*) caso particolare della (2), ed è definita per tutti i valori di x reali o complessi; benchè abbia dei poli del secondo ordine in tutti i punti

$$\sqrt{\mu M N} \cdot x = (2K + 1) \frac{\pi}{2}.$$

I poli della $\varphi(x)$ per M, N e μ reali, cadono sull'asse reale delle x se $\mu M N > 0$, e sull'asse immaginario se $\mu M N < 0$; essi non impediscono mai l'esistenza della soluzione della (2*).

Che cosa accadrà della soluzione della (2), nel caso generale?

Che cosa nel caso particolare in cui le funzioni $g(x)$ e $N(x, \xi, \eta)$ siano sempre dello stesso segno e risulti: $\mu g(x) H(x, \xi, \eta) > 0$, caso che corrisponde al caso $\mu M N < 0$ della (2*)?

Come nel caso della (2*) la $\varphi(x)$ è definita per tutti i valori reali di x ed è sempre regolare, non potrà accadere altrettanto per la soluzione della (2) data dalla (3) soltanto in un campo limitato?

Mi propongo di approfondire meglio in seguito lo studio dell'equazione (2) con riferimento particolare a questi casi ora accennati.

Fisica. — *Ancora dell'effetto di un campo magnetico alternato sopra la polarizzazione della luce di risonanza.* Nota di E. FERMI e di F. RASETTI, presentata dal Socio A. GARBASSO ⁽¹⁾.

In una nota precedente ⁽²⁾ abbiamo calcolato come varia l'effetto di un campo magnetico alternato sulla polarizzazione della luce di risonanza, in funzione della frequenza. Abbiamo eseguite delle esperienze allo scopo di verificare le previsioni teoriche, sopra la risonanza del mercurio per la riga 2536.7.

Il dispositivo da noi usato per questo scopo constava di una parte ottica, per la produzione della risonanza, e di una parte elettrica destinata a generare il campo magnetico alternato.

La luce eccitante era ottenuta per mezzo di una lampada a mercurio, raffreddata mediante immersione in acqua. La riga 2536.7 veniva isolata mediante un monocromatore a quarzo; sul cammino dei raggi si trovava un grosso cristallo birifrangente di spato d'Islanda, che separava la luce in due fasci polarizzati ad angolo retto. Di questi, quello col vettore elettrico verticale veniva introdotto nella lampada di risonanza, che era costituita da un recipiente di vetro munito di due finestre, chiuse con lastre piane di quarzo, e situate ad angolo retto tra di loro. Di esse una serviva per l'entrata dei raggi eccitanti, e l'altra per l'osservazione della luce di risonanza; le lastre di quarzo erano tagliate parallelamente all'asse ottico e disposte in modo da non alterare la polarizzazione della luce. La lampada di risonanza conteneva una goccia di mercurio, ed era unita ad una pompa di Gaede, che funzionava continuamente durante le esperienze. La luce di risonanza veniva osservata in direzione perpendicolare a quella della luce eccitatrice; mediante un altro spato, interposto sul cammino di osservazione, si formavano due immagini del vapore risonante, polarizzate una orizzontalmente e l'altra verticalmente, che venivano fotografate con una camera a quarzo.

L'apparecchio per la produzione del campo oscillante constava essenzialmente di un circuito a triodi generatore di oscillazioni persistenti, e di un altro circuito ad esso accoppiato del quale facevano parte due bobine, situate ai lati della lampada di risonanza, per la produzione del campo magnetico alternato.

Abbiamo usato dei triodi della « Western Electric Company », col filamento ricoperto di ossidi; la tensione di placca era di circa 300 volt ed era fornita da una dinamo, la corrente di placca per ogni triodo era di 40 o 50 milliampère. Abituamente usavamo due di questi triodi in parallelo.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Firenze. Presentato nell'adunanza del 5 giugno 1925.

(2) Questi « Rendiconti », vol. I (1925), p. 716, n. 12.

Il circuito generatore era costituito unendo il negativo del filamento col punto di mezzo di una bobina L , i cui estremi erano uniti attraverso ad un condensatore variabile C_1 . Una delle armature del condensatore era congiunta direttamente alla griglia, e l'altra era unita alla placca attraverso alla dinamo. Il circuito destinato alla produzione del campo magnetico alternato conteneva in serie: una spira avvicinata alla bobina L , che funzionava da secondario di trasformatore, un condensatore variabile C_2 , un amperometro a filo caldo, privo di shunt, due bobine di dieci spire ciascuna per la produzione del campo magnetico, e una bobina che si poteva inserire o chiudere in corto circuito, per mezzo della quale era possibile accordarsi in un campo di frequenze sufficientemente esteso.

Le capacità C_1 e C_2 potevano variare all'incirca da 50 a 500 millesimi di microfarad. La bobina L poteva secondo i casi avere una induttanza di 12 o 40 microhenry. Data la considerevole capacità tra la placca e la griglia degli audion, non era possibile spingersi comodamente a una frequenza superiore a $5 \cdot 10^6$. Nelle esperienze abbiamo usato delle frequenze variabili tra uno e cinque milioni.

L'ondometro che ci ha servito per la misura delle frequenze, ci è stato gentilmente tarato dal dott. Mazza dell'Istituto di Chimica inorganica dell'Università di Firenze.

Le considerazioni teoriche svolte nella Nota precedente, ci facevano ritenere opportuno di studiare l'effetto con campi magnetici di qualche Gauss. Per produrli, con le nostre bobine, erano necessarie correnti dell'ordine di grandezza di mezzo ampère, che si potevano produrre assai bene col nostro apparecchio.

Il campo magnetico terrestre era neutralizzato mediante una grossa bobina opportunamente disposta.

Alla temperatura dell'ambiente, circa 12° , la polarizzazione della luce di risonanza si dimostrò scarsa, anche in assenza di qualunque campo magnetico. Per questo ritenemmo utile di raffreddare la lampada di risonanza. Un sistema di raffreddamento a evaporazione di etere diede dei risultati discreti, in quanto riuscì a fare aumentare fortemente la polarizzazione in assenza di campo magnetico, senza però riuscire a mantenerla costante da una esperienza all'altra; fatto che ci rese impossibile di spingere la precisione delle misure, fino a poter studiare alcuni dei dettagli previsti dalla teoria.

Osserviamo ancora che siccome la riga 2536.7 del mercurio presenta un effetto Zeeman anomalo, in quanto essa si spezza in un tripletto con una separazione eguale a tre mezzi di quella normale, la precessione prodotta da un campo magnetico si deve calcolare eguale a $\frac{3}{2}$ di quella di Larmor. Quindi le curve disegnate nella nota precedente e indicate come corrispondenti a campi di 17; 25; 32 Gauss, si avranno in realtà, per il mercurio, per campi di intensità $\frac{2}{3}$ di queste. Queste tre intensità, che corrispondevano a intensità efficaci di corrente nelle bobine di 0.32, 0.46, 0.6 amp., sono quelle con le quali abbiamo eseguite le esperienze. Su ciascuna lastra

vennero fatte sei fotografie, con pose, eguali per ciascuna lastra, di due o tre minuti; ciascuna era costituita da due immagini della luce di risonanza polarizzate ad angolo retto. La prima fotografia era fatta senza campo magnetico, le altre cinque con campi di intensità massima costante e con frequenze di 1, 2, 3, 4, 5 milioni. Abbiamo fatto tre lastre con campi prodotti da correnti di 0.32 e di 0.46 amp., e due con campi corrispondenti a 0.6 amp.

Già l'osservazione ad occhio delle lastre mostrava nettamente, per correnti 0.32 e 0.46 amp., l'aumento della polarizzazione per grandi frequenze; ma per ottenere dati più precisi abbiamo fotometrato le nostre lastre, con un fotometro a pila termoelettrica. Riportiamo qui i risultati delle fotometrie.

I numeri rappresentano i rapporti degli annerimenti della componente polarizzata con il vettore elettrico orizzontale, e di quella col vettore elettrico verticale; le frequenze sono date in milioni.

Osserviamo a questo proposito che nelle nostre fotografie non si aveva proporzionalità tra annerimento e intensità, come sarebbe voluto dalla legge di Schwarzschild, e quindi i rapporti danno solamente una indicazione qualitativa del grado di polarizzazione. Per la stessa ragione non sono confrontabili tra di loro altro che i dati della stessa lastra, perchè tra lastra e lastra si hanno delle differenze di intensità di illuminazione e di posa.

Numero della lastra	Amp.	Frequenze				
		1,2	2	3	4	5
6	0,32	0,71	0,69	0,64	0,59	0,53
7	—	—	0,75	0,72	0,67	0,51
8	—	0,58	0,59	0,52	0,39	0,36
5	0,46	0,76	0,74	0,77	0,68	0,57
9	—	0,72	0,71	0,78	0,65	0,53
10	—	0,74	0,75	0,74	0,67	—
11	0,60	0,84	0,85	0,92	0,85	0,79
12	—	0,76	0,73	0,80	0,79	0,76

Come si può rilevare da questa tabella, la precisione non è sufficiente per la verificaione dettagliata delle particolarità delle curve disegnate nella nota precedente. Quello che invece si può concludere con sicurezza, è che nelle lastre corrispondenti a 0.32 amp. la polarizzazione cresce con la frequenza, in modo più rapido per frequenze elevate; in quelle fatte con cor-

renti di 0.46 amp., la polarizzazione si mantiene press'a poco costante fino a frequenze di circa tre milioni, e per frequenze superiori comincia a crescere, benchè meno che nel caso precedente; infine, per le fotografie fatte con correnti di 0.6 amp., le oscillazioni della polarizzazione restano entro i limiti dell'errore di osservazione.

Confrontando questi risultati con le curve ottenute teoricamente nella Nota precedente, si vede che le previsioni sono confermate, almeno entro i limiti della nostra approssimazione.

Chimica. — *Contributo alla crioscopia di soluzioni di gas in solventi diversi*⁽¹⁾. Nota di FELICE GARELLI, presentata dal Socio A. ANGELI⁽²⁾.

Le prime ricerche sull'abbassamento del punto di congelamento prodotto in un solvente da un gas solubile in esso, furono fatte nel 1904 dallo scrivente in collaborazione con P. Falcicola. (Questi « Rendiconti », 1904. I. p. 110). Venne allora studiato il comportamento crioscopico dell' H_2S , CO_2 , C_2H_2 , N_2O nell'acqua ed in vari solventi organici (benzolo, bromoformio, acetofenone, acido acetico, acido formico). Da esse risultò confermata la legge generale della crioscopia e venne dimostrata la possibilità di determinare, per via crioscopica, la solubilità di gas in liquidi.

Lo studio dell'equilibrio di soluzioni di gas in liquidi col sussidio delle operazioni crioscopiche, semplici, ma che talora permettono di conseguire un notevole grado di esattezza, può svelare la tendenza dei corpi a trattenerne, all'atto del congelamento, i gas che essi tenevano disciolti nella fase liquida, sia per semplice assorbimento come per formazione di composti labili. L'anomalia crioscopica che in tal caso ne deriva, porrebbe in evidenza l'esistenza del fenomeno, che altrimenti, data la difficoltà di isolare composti tanto instabili, passerebbe inosservata.

Ad onta dell'interesse che presenta l'argomento, nessun altro sperimentatore, che io sappia, se ne è finora occupato. Soltanto Falcicola, qualche anno dopo, di sua iniziativa, estese le esperienze a vari altri gas (idrogeno, ossigeno, azoto, ossido di carbonio, metano). (Questi « Rendiconti » 1908, II p. 324). Ho creduto pertanto utile istituire su questo argomento nuove ricerche sperimentali e le ho affidate al laureando Sig. Ernesto Monath. Il lavoro da questi compiuto verrà pubblicato, in esteso, altrove. Mi limito qui, per prendere data, a riassumere brevemente i risultati ottenuti.

Furono sperimentati i comportamenti crioscopici :

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica industriale ed organica della R. Scuola d'Ingegneria di Torino.

(2) Pervenuto all'Accademia il 21 giugno 1925.

I. delle soluzioni di acetilene in benzolo, dimetilanilina, anilina, nitrobenzolo, cicloesano.

II. delle soluzioni di azoto e di ossido di azoto in acqua, benzolo, bromoformio, nitrobenzolo, cicloesano.

III. il comportamento crioscopico del gas elio in acido acetico, formico, nitrobenzolo, bromoformio, cicloesano.

IV. quello dell'ossido di carbonio in nitrobenzolo, bromoformio, benzolo.

Le determinazioni furono fatte nel solito crioscopio di Beckmann, al quale si era saldato lateralmente, in basso, un tubetto di vetro per far gorgogliare il gas nel liquido. La provetta crioscopica era ermeticamente chiusa e l'agitazione del liquido fatta mediante elettrocalamita ad interruttore metronomo.

Il termometro, a scala arbitraria, diviso in centesimi di grado, permetteva di apprezzare i due millesimi di grado. Si procedeva così: si prendeva dapprima il punto di congelamento del solvente puro ottenendo almeno tre letture concordanti. Vi si faceva passare poscia la corrente del gas, purificato ed essicato perfettamente e, raffreddando man mano il liquido, si determinava il punto di congelamento della soluzione. Rifusi i cristalli, si ripeteva la determinazione finchè si ottenevano tre letture costanti o differenti fra loro al più di un centesimo di grado. Il punto di congelamento più basso così ottenuto è quello della soluzione satura del gas alla pressione e temperatura dell'esperienza. L'abbassamento crioscopico così determinato permette di calcolare la solubilità del gas nel liquido, ammesso che il gas stesso vi si scioglia con molecole semplici, come del resto si poté dimostrare sperimentalmente, in qualche caso, mediante l'analisi gas volumetrica.

I. - GAS ACETILENE, $C_2H_2 = 26$.

Solvente: *Benzolo* - p. fusione $5^{\circ}.5$ - Costante crioscopica = 51. -

La temperatura di congelamento del puro solvente risultò a $5^{\circ}.71$ del termometro a scala arbitraria. In corrente di acetilene il punto di congelamento, si abbassò a $4^{\circ}.25$. Il massimo abbassamento, alla pressione di 755 mm. risultò quindi pari a $1^{\circ}.46$: dal quale si calcola una solubilità, alla temperatura di 4° circa, di gr. 0.744 di acetilene in 100 gr. di benzolo.

Alcune analisi gas-volumetriche, fatte sopra soluzioni più diluite di acetilene in benzolo, confermarono che l'acetilene vi si scioglie col peso molecolare 26 e che l'andamento crioscopico è normale.

Solvente: *dimetilanilina*, p. fusione $1^{\circ}.96$. Costante crioscopica 58.

Punto di congelamento del solvente puro $3^{\circ}.785$

» » » » » in corrente di acetilene. $2^{\circ}.140$

Massimo abbassamento, alla pressione di 751 mm. $1^{\circ}.645$

Dal quale si calcola una solubilità di gr. 0,737 di acetilene in 100 gr. di $C_6H_5N(CH)_2$

L'analisi gas-volumetrica dimostrò anche quì che il gas acetilene è sciolto con molecola semplice.

Solvente: *anilina*, p. fusione — 6°. Costante crioscopica 58. Il punto di congelamento del puro solvente da 4°.425 scende, in corrente moderata di acetilene, a 2°.62: l'abbassamento massimo è di 1°.805, dal quale si calcola una solubilità di gr. 0.800 in 100 di anilina.

Solvente: *cicloesano*, p. fusione 6°.2. Costante crioscopica 200. Il punto di congelamento del puro solvente da 5°.07 scende, in corrente moderata di acetilene, a 2°.68. Il massimo abbassamento è quindi uguale a 2°.39, dal quale si calcola che la soluzione satura, alla temperatura di 3° circa ed alla pressione di mm. 535 contiene gr. 0.3107 di acetilene in 100 gr. di cicloesano. Come si vede, la solubilità del gas nell'esaidrobenzolo, è assai minore che non nel benzolo (0.737).

Solvente: *nitrobenzolo*, p. di fusione 5°.3. Costante crioscopica 70. Il punto di congelamento del puro solvente da 5°.40 scende, in corrente moderata di acetilene, a 3°.85. Il massimo abbassamento è quindi uguale a 1°.55, dal quale si calcola che la soluzione satura alla temperatura di 3°.8 ed alla pressione di 735 mm. contiene gr. 0.5537 in 100 gr. di solvente.

II. - GAS AZOTO (N_2) ED OSSIDO DI AZOTO (NO).

Per studiare il congelamento delle soluzioni del gas NO in acqua ed altri solventi, è assolutamente necessario scacciare tutta l'aria con un gas inerte: abbiamo perciò operato sempre in atmosfera di azoto. All'uopo, il tubo adduttore del gas alla provetta crioscopica poteva, mediante rubinetto a due vie, esser messo a volontà in comunicazione con il gazometro contenente l'azoto e con l'apparecchio sviluppatore dell'ossido di azoto. Questo gaz era preparato con il metodo di Emich, cioè con la reazione fra il nitrito sodico, acido solforico e mercurio, mentre l'azoto fu ottenuto da quella fra nitriti e sali ammoniacali. Entrambi i gas erano accuratamente purificati ed essiccati, e così pure l'acqua solvente era stata purificata e distillata ripetutamente.

Solvente: *Acqua*. Già si sapeva, per le determinazioni di Winkler, che l'NO si scioglie pochissimo nell'acqua, e dal coefficiente di assorbimento trovato da Winkler si calcolava che l'abbassamento del punto di congelamento dell'acqua causato dall'NO sciolto in essa, non sarebbe stato rilevabile col termometro diviso in centesimi di grado. L'esperienza ha confermato la previsione. Infatti il p. di congelamento dell'acqua, che corrispondeva a 4°.45, si conservò inalterato anche durante il passaggio della corrente di NO.

La soluzione acquosa assume però una colorazione gialla ben manifesta; essa scompare non appena, mediante la corrente di azoto, si sposta dal liquido tutto l'NO, ed il punto di congelamento dell'acqua rimane, anche dopo la saturazione con N_2 , inalterato a $4^{\circ}.45$.

Solventi organici: Falcicola (l. c.) aveva trovato che l' N_2 , O_2 , CO , H_2 , ed il CH_4 , sciogliendosi in benzolo, bromoformio, nitrobenzolo e qualche altro solvente organico, invece di abbassare innalzavano il punto di congelamento del solvente. L'innalzamento era, per qualche solvente, molto notevole: p. es. l'azoto avrebbe innalzato di $1^{\circ}.11$ il punto di congelamento del bromoformio e l'ossido di carbonio di $1^{\circ}.54$; l'autore attribuiva il fenomeno a probabili *adsorbimenti* dei gas per parte dei cristalli.

Noi abbiamo trovato invece che si osservava bensì, quasi sempre, in corrente di azoto, un lievissimo innalzamento del punto di congelazione; peraltro questo punto rimane costante quando si ripete la determinazione dopo aver scacciato l'azoto, sia riscaldando la soluzione, come spostandolo mediante corrente di altro gas, pure praticamente insolubile (elio). È probabile quindi che l'innalzamento di pochi centesimi di grado del punto di congelazione di solventi organici, che noi pure abbiamo osservato quando essi vengono saturati con azoto, ossido di carbonio, elio, si debba ascrivere ad una depurazione del solvente, effettuata dalla corrente di gas puro e secco, che lo attraversa e che elimina, o tracce di umidità, o di impurezze più facilmente volatili. Ecco infatti i risultati ottenuti:

In soluzione benzolica. Il punto di congelamento del benzolo puro, che era di $4^{\circ}.07$, si innalza in corrente di azoto, a $4^{\circ}.105$, ma, dopo riscaldamento a 50° C. circa, si trova uguale a $4^{\circ}.11$ e ridiscende a $4^{\circ}.105$ con nuova corrente di azoto. Saturando poi il liquido con NO, il solvente congela a $4^{\circ}.07$.

Quindi l'abbassamento crioscopico prodotto dall'azoto in benzolo sarebbe di $0^{\circ}.005$, troppo piccolo per indurre a calcoli di solubilità, e quello dell'NO sarebbe di $0^{\circ}.04$. A quest'ultimo abbassamento corrisponderebbe una concentrazione di gr. 0.0235 di NO in 100 gr. di benzolo alla temperatura di $5^{\circ}.5$ ed alla pressione atmosferica, supponendo che l'NO vi si scioglia con molecola semplice.

In soluzione di bromoformio si ripete lo stesso fenomeno. La corrente di azoto produce dapprima un'innalzamento di 9 centesimi di grado nel punto di congelamento del solvente, ma poi rimane costante a $4^{\circ}.515$ dopo scacciato l'azoto e si abbassa di nuovo di $0^{\circ}.005$ con successiva corrente di azoto, e di $0^{\circ}.025$ con quella di NO. La piccolezza di questi abbassamenti, in relazione con le condizioni sperimentali, non permettono di trarre dati numerici attendibili sulle solubilità, certamente piccolissime, di questi gas.

In soluzione di nitrobenzolo. Identica osservazione per quanto riguarda l'azoto. Si ha dapprima un innalzamento apparente di $0^{\circ}.03$ poi un abbassamento di $0^{\circ}.005$. L'ossido di azoto fornì invece, in diverse determinazioni

concordanti, un abbassamento massimo di $0^{\circ}.135$, dal quale si calcola una concentrazione della soluzione satura pari a gr. $0^{\circ}.058$ in 100 gr. di nitrobenzolo.

In soluzione di cicloesano. L'azoto, come al solito, innalza apparentemente il p. di congelamento del solvente di quasi un decimo di grado, ma poi lo abbassa di 5 a 10 millesimi di grado. L'ossido di azoto fornisce un abbassamento massimo di $0^{\circ}.225$, dal quale si calcola una concentrazione di gr. 0.0337 di NO in 100 gr. di nitrobenzolo.

III. - GAS ELIO.

Per gentile concessione del colonnello prof. dott. Helbig, Direttore della sezione chimica dell'Istituto sperimentale di Aeronautica, che ringrazio vivamente, ho potuto aver a mia disposizione un centinaio di litri di gas elio. Ne fu determinato il comportamento crioscopico nei seguenti liquidi: nitrobenzolo, benzolo, bromoformio, cicloesano, acido acetico e acido formico. Nei primi quattro si ha dapprima il solito fenomeno dell'innalzamento apparente di pochi centesimi di grado del p. di congelamento del solvente che poi rimane costante. L'elio non abbassa in misura apprezzabile il punto di congelazione dei quattro solventi organici succitati: esso vi si dimostra quindi, praticamente insolubile.

Nei due acidi acetico e formico (che vennero scelti perchè in essi l'azoto e l'idrogeno determinano abbassamenti abbastanza sensibili) si riescono ad avere, *insistendo* con la corrente di elio, abbassamenti fino a 3 centesimi di grado. Ma trattandosi di solventi molto igroscopici, non si può escludere che l'abbassamento sia dovuto a tracce di umidità portate dalla prolungata corrente gassosa o penetrate nella provetta crioscopica, per quanto si cercasse in ogni modo di proteggerla dall'aria esterna.

IV. - OSSIDO DI CARBONIO.

Nel benzolo, dopo il solito fenomeno del lieve apparente innalzamento del punto di congelazione, si trova che l'ossido di carbonio produce un abbassamento massimo di $0^{\circ}.03$. Dal coefficiente di assorbimento determinato da Just si calcola un abbassamento massimo di $0^{\circ}.032$.

Nel nitrobenzolo, dopo il solito innalzamento apparente di pochi centesimi di grado, la corrente di CO provoca un abbassamento massimo di $0^{\circ}.025$, mentre dal coefficiente di assorbimento, noto per le misure di Just, si calcola un $\Delta = 0^{\circ}.022$.

In bromoformio. Il CO abbassa il punto di congelamento del solvente di $0^{\circ}.02$. Considerando l'elevata costante crioscopica del bromoformio, un abbassamento così piccolo dimostra che l'ossido di carbonio è quasi insolubile in bromoformio.

Chimica. — *Su alcuni derivati della Piridina* ⁽¹⁾. Nota preventiva di ANTONIO PIERONI, presentata dal Socio A. ANGELI ⁽²⁾.

Già da qualche tempo iniziai queste ricerche sulla piridina allo scopo di ottenere derivati analoghi a quelli che si ottengono dal benzolo; più particolarmente mi interessavo dei β -alogenati-nitro-e-ammino-derivati della piridina, come i più adatti, ad essere confrontati con i corrispondenti del benzolo. Dalla β -amminopiridina mi sono proposto di ottenere tutta quella serie di diazo-azo-idrazo-composti, idrazine comprese, che dovrebbe svolgersi parallelamente a quella costituita dagli analoghi composti derivanti rispettivamente dall'anilina e dalla fenilidrazina. Ma l'attività di molti studiosi in questi ultimi tempi è enormemente aumentata intorno all'argomento in questione, quindi ritengo opportuno rendere noto i primi risultati di queste mie ricerche anche se non completi.

Il nucleo piridinico, confrontato a quello benzenico, si distingue come è noto, anche per una maggior fissità dei suoi atomi d'idrogeno; così mentre riesce facile la preparazione del nitrobenzolo, la β -intropiridina si ottiene con un rendimento non superiore al 20-22 % circa e soltanto quando si scaldi a 300° in acido solforico con acido nitrico e nitrato potassico in presenza di catalizzatori ⁽³⁾.

Nel nucleo piridinico l'azoto non va considerato a sè, ma nel complesso $-N=C-$ il quale imprime il suo carattere acido agli atomi di idrogeno in posizione di α e γ . Sotto alcuni punti di vista il nucleo piridinico può dunque considerarsi come un benzolo monosostituito a sostituyente negativo, epperò gli atomi di idrogeno in α e γ possono essere scambiati da un gruppo a carattere positivo, come avviene nella reazione fra piridina e sodioammide, per cui si ottiene l' α -amminopiridina ⁽⁴⁾ e fra piridina e sodio ⁽⁵⁾.

Come nel benzolo, così nella piridina la sostituzione di un idrogeno (α) con l'ammino gruppo rende più facilmente sostituibili gli idrogeni in o e in p (β e β') all'ammino stesso; infatti si giunge facilmente dall' α -amminopiridina alla β e β' -nitro ⁽⁶⁾ e alla β' -iodopiridina ⁽⁷⁾. L' α -amminopiridina nel

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica organica della R. Università di Firenze.

(2) Pervenuta all'Accademia il 28 giugno 1925.

(3) A. KIRPAL e REITER, B. 58, 699.

(4) TSCHITSCHIBABIN C., 1915, I, 1065.

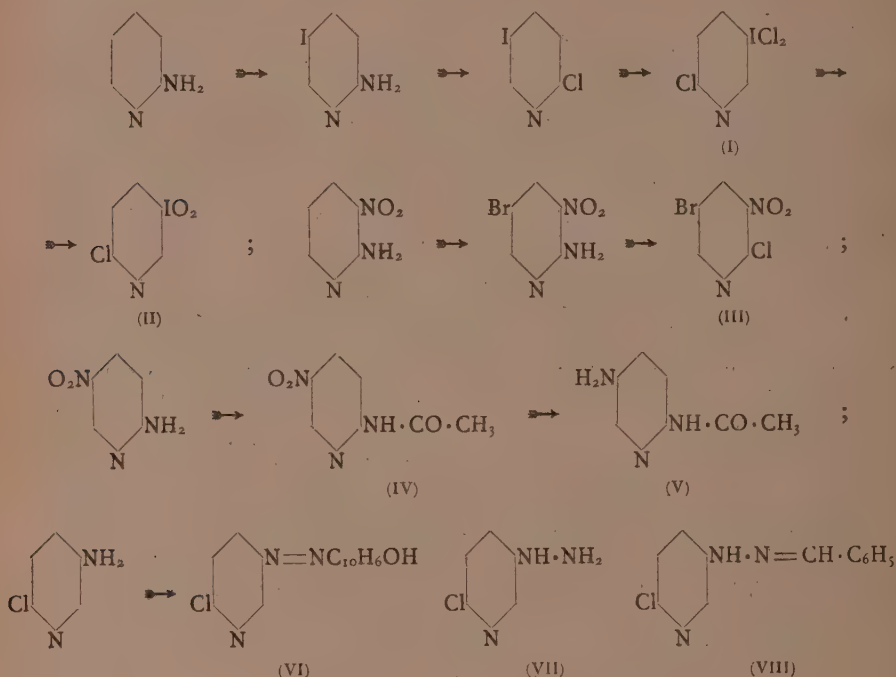
(5) EMMERT B., 50, 31, 34 (1917); J. P. WIBAUT R., XLII, 240 (1923)

(6) TSCHITSCHIBABIN C., 1916, II, 15, 228.

(7) O. MAGIDSON B., 58, 113, 1925.

comportamento generale si può confrontare all'anilina, ma non si presta ad essere trattata come tale, anche e soprattutto per la resistenza che offre alla diazotazione e per la conseguente labilità del diazogruppo; serve però bene alla preparazione delle nitro (β e β') piridine, quindi delle ammine corrispondenti, le quali invece si comportano in modo del tutto analogo all'anilina.

Dall' α -amminopiridina riuscii a preparare, con la collaborazione del dott. Bruno Haupt, i seguenti prodotti:



Soltanto le formule indicate coi numeri romani rappresentano delle sostanze nuove; le altre, benchè note, vennero preparate modificando sensibilmente alcuni dei metodi indicati da Tschitschibabin e dei quali mi riservo di dare la descrizione particolareggiata in altra nota.

La cloroiodopiridina in soluzione cloroformica addiziona due atomi di cloro per dare il dicloro-jododerivato corrispondente (I) sostanza gialla cristallina che fonde con forte decomposizione a 115°. Sciolta questa con piridina, per aggiunta di acqua si ha un precipitato bianco che raccolto, lavato con acqua, alcool e cloroformio, seccato su acido solforico esplode a 205° (iodilderivato II).

gr. 0.0944 di sostanza diedero CO_2 gr. 0.0752 H_2O gr. 0.0170

gr. 0.0491 » » O (attivo) % 11.32.

Calcolato per $\text{C}_5\text{H}_3\text{O}_2\text{NCII}$ C % 22.06 H % 1.10 O % 11.78

Trovato C % 21.82 H % 2.00 O % 11.32

Nei filtrati non si trovano tracce di iodoso derivato, ma soltanto α -cloro- β' -iodopirina ed il iodilderivato corrispondente. Da cui si deduce che nelle condizioni di esperienza, del tutto identiche a quelle che conducono dall'iodo all'iodoso benzolo non si isola dalla cloriodopiridina il iodoso-derivato, certo per una sua più grande instabilità. Dall' α -ammino- β' -nitropiridina si arrivò, applicando un metodo differente e a maggior rendimento da quello impiegato da Tschitschibabin alla cloronitropiridina, quindi per riduzione con ferro o con stagno ed acido cloridrico, all'ammina corrispondente, questa si lascia diazotare facilmente ed il sale di diazonio reagisce con β -naftolo per dare un bel prodotto rosso cristallino, che purificato dall'alcool fonde a 185° (α -cloro- β -azopiridil- β -naftolo VI)

gr. 0.0531 di sostanza diedero Ncc. 6.9 t 21° B 761

Calcolato per $\text{C}_{15}\text{H}_{10}\text{ON}_3\text{Cl}$ N % 15.1 trovato N % 14.81.

Lo stesso sale di diazonio ridotto con cloruro stannoso dà l'idrazina corrispondente (VII), bella sostanza bianca che dall'acqua si separa in aghi fondenti a 127° , arrossa all'aria, possiede l'odore caratteristico della fenilidrazina, riduce il liquore di Fehling. (Molto probabilmente se invece di partire dalla cloronitropiridina, si partisse dalla bromo o dalla iodo, con i processi di riduzione successivi si potrebbe giungere alla piridilidrazina semplice).

gr. 0.0770 di sostanza diedero Ncc. 19.5 23° 756 mm.

Calcolato per $\text{C}_5\text{H}_3\text{NCINH}\cdot\text{NH}_2$ N % 29.26 trovato N % 29.05.

Con aldeide benzoica dà l'idrazone (VIII) a p. di f. 208° .

gr. 0.1024 di sostanza diedero Ncc. 16.4 22° 753 mm.

Calcolato per $\text{C}_{12}\text{H}_{10}\text{N}_3\text{Cl}$ N % 18.14 trovato N % 18.34.

Chimica-Fisica. — *Ancora sulla statica chimica dei fenomeni elettronici.* Nota di LUIGI ROLLA e GIORGIO PICCARDI, presentata dal Socio GARBASSO ⁽¹⁾.

4). *Legge dell'azione di massa applicata all'equilibrio elettronico.*

a) *Esperienze qualitative:*

Per la verifica dell'applicabilità della legge dell'azione di massa all'equilibrio $A \rightleftharpoons A^+ + e$. sono state fatte da prima alcune esperienze qualitative a scopo orientativo, introducendo nella fiamma, prima separatamente e poi insieme, due perle di sali diversi e dello stesso sale, e registrandone le relative correnti.

I risultati ottenuti sono:

	Deviazione del galvanometro
Perla I (Na_2CO_3)	6
Perla II (Ba.Cl_2)	20
I + II.	15
Perla I (Na_2CO_3)	20
Perla II (Ba.Cl_3)	7
I + II.	17
Perla I (Na_2CO_3)	10
Perla II (Na_2CO_3)	12
I + II	16

In nessun caso si ottiene una corrente totale che sia la somma delle singole correnti, ma sempre una corrente assai inferiore, il che è in perfetta armonia con la legge dell'azione di massa.

Queste esperienze sono analoghe a quelle del King, e come quelle hanno il difetto di non essere sufficienti da sole a giustificare l'applicabilità di tale legge.

(1) Presentata nella seduta del 5 giugno 1925.

b) Esperienze quantitative:

Sono state eseguite alcune serie di esperienze sul Ba, sul Li e sul Na, col preciso scopo di verificare la effettiva invariabilità della costante di equilibrio K della reazione $A \rightleftharpoons A^+ + e.$, per larghe variazioni della concentrazione, mantenendo costante, per ogni serie, la temperatura e le condizioni aereo-dinamiche della fiamma.

La diversa concentrazione è stata ottenuta oltre che variando il numero e la grossezza delle perle introdotte nella fiamma, anche variando per uno stesso metallo la natura del sale.

I risultati ottenuti sono assai soddisfacenti:

Per il Sodio:

	Sale	Atomi per secondo	% dissociazione	K
I SERIE	Na_2SiO_3	$3,44 \cdot 10^{15}$	$1,41 \cdot 10^{-1}$	$6,35 \cdot 10^9$
	$Na_4B_4O_7$	$4,50 \cdot 10^{16}$	$3,95 \cdot 10^{-2}$	$6,4 \cdot 10^9$
	»	$8,66 \cdot 10^{16}$	$2,66 \cdot 10^{-2}$	$6,1 \cdot 10^9$
	Na_2CO_3	$4,03 \cdot 10^{17}$	$3,81 \cdot 10^{-3}$	$6,03 \cdot 10^9$
	»	$5,14 \cdot 10^{17}$	$3,33 \cdot 10^{-3}$	$5,75 \cdot 10^9$
II SERIE	Na_2SiO_3	$1,23 \cdot 10^{15}$	$1,25 \cdot 10^{-1}$	$1,9 \cdot 10^9$
	$Na_1P_2O_7$	$1,8 \cdot 10^{16}$	$1,12 \cdot 10^{-1}$	$2,2 \cdot 10^9$
	Na_2CO_3	$2,69 \cdot 10^{17}$	$7,35 \cdot 10^{-3}$	$1,44 \cdot 10^9$
	»	$4,07 \cdot 10^{17}$	$6,4 \cdot 10^{-3}$	$1,68 \cdot 10^9$
	$NaCl$	$4,36 \cdot 10^{18}$	$1,85 \cdot 10^{-3}$	$1,59 \cdot 10^9$
III SERIE	$Na_2B_4O_7$	$1,74 \cdot 10^{17}$	$1,59 \cdot 10^{-2}$	$4,10 \cdot 10^9$
	Na_2CO_3	$2,9 \cdot 10^{17}$	$1,19 \cdot 10^{-2}$	$3,89 \cdot 10^9$

Per il Bario:

I SERIE	$BaCl_2$	$2,02 \cdot 10^{16}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{10}$
	»	$4,62 \cdot 10^{16}$	$6,6 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{10}$
II SERIE	$BaCl_2$	$8,93 \cdot 10^{15}$	$1,97 \cdot 10^{-1}$	$3,4 \cdot 10^{10}$
	»	$1,20 \cdot 10^{16}$	$1,55 \cdot 10^{-1}$	$2,88 \cdot 10^{10}$
	»	$3,21 \cdot 10^{16}$	$1,01 \cdot 10^{-1}$	$3,3 \cdot 10^{10}$
III SERIE	$BaCl_2$	$3,46 \cdot 10^{16}$	$5,67 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{10}$
	»	$5,75 \cdot 10^{16}$	$4,71 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{10}$
	»	$5,78 \cdot 10^{16}$	$3,97 \cdot 10^{-2}$	$0,9 \cdot 10^{10}$

Per il Litio :

	Sale	Concentrazione	% dissociazione	K
I SERIE	Li_2SO_4	$1,55 \cdot 10^{16}$	$4,02 \cdot 10^{-3}$	$2,52 \cdot 10^7$
	»	$2,33 \cdot 10^{16}$	$3,55 \cdot 10^{-3}$	$2,93 \cdot 10^7$
	»	$5,53 \cdot 10^{16}$	$2,10 \cdot 10^{-3}$	$2,47 \cdot 10^7$
II SERIE	Li_2SO_4	$1,85 \cdot 10^{16}$	$8,48 \cdot 10^{-3}$	$1,31 \cdot 10^8$
	»	$2,56 \cdot 10^{16}$	$7,80 \cdot 10^{-3}$	$1,57 \cdot 10^8$
	»	$3,39 \cdot 10^{16}$	$5,43 \cdot 10^{-3}$	$1,00 \cdot 10^8$
	»	$1,21 \cdot 10^{17}$	$3,27 \cdot 10^{-3}$	$1,34 \cdot 10^8$
	»	$1,74 \cdot 10^{17}$	$2,28 \cdot 10^{-3}$	$0,91 \cdot 10^8$
III SERIE	Li_2SO_4	$6,99 \cdot 10^{15}$	$8,38 \cdot 10^{-3}$	$4,91 \cdot 10^7$
	»	$1,73 \cdot 10^{16}$	$5,77 \cdot 10^{-3}$	$5,77 \cdot 10^7$
	»	$1,34 \cdot 10^{17}$	$1,86 \cdot 10^{-3}$	$4,66 \cdot 10^7$
	»	$1,59 \cdot 10^{17}$	$1,53 \cdot 10^{-3}$	$3,73 \cdot 10^7$
	»	$1,91 \cdot 10^{17}$	$1,43 \cdot 10^{-4}$	$4,29 \cdot 10^7$

Con questo resta quantitativamente e quindi completamente dimostrata l'applicabilità della legge dell'azione di massa e leggi derivate ai fenomeni di ionizzazione.

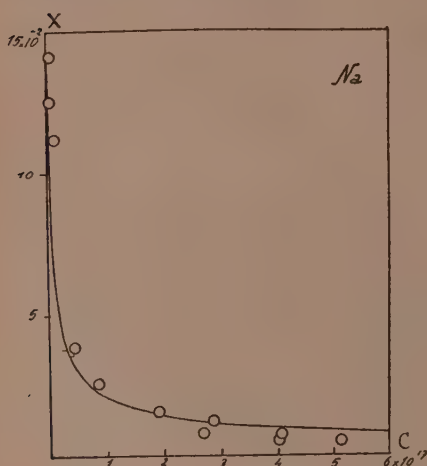


Diagramma 1.

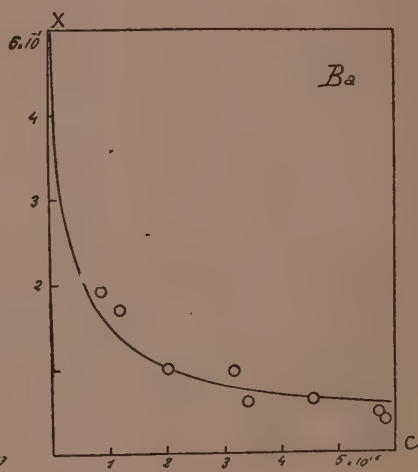


Diagramma 2.

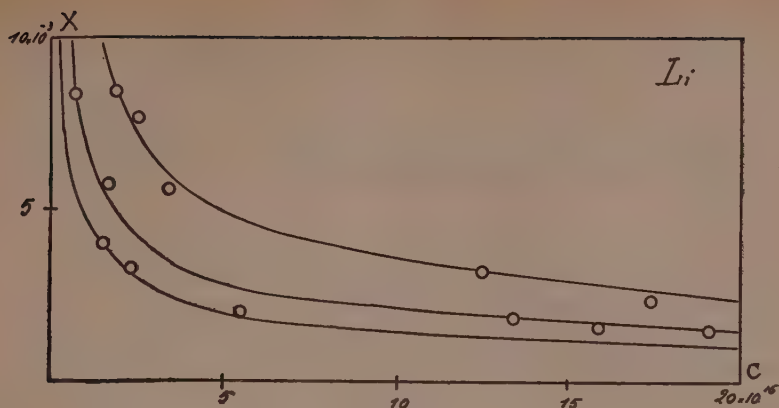


Diagramma 3.

È stato anche studiato come varia $X = \%$ dissociazione al variare della concentrazione, e si è trovato, come appare immediatamente dalle tabelle di cui sopra, che X^2 è inversamente proporzionale alla concentrazione degli atomi neutri, che nelle nostre esperienze è vicinissima a quella degli atomi introdotti.

$$X^2 \cdot C = \text{costante}.$$

Il diagramma è una iperbole cubica. Ogni iperbole corrisponde a date condizioni di temperatura e a date condizioni aereo-dinamiche della fiamma, e quindi anche ad un dato valore di K . (Diagrammi 1, 2 e 3).

5). *Calcolo del potenziale di ionizzazione.*

Con questo metodo che dà modo di conoscere il valore della costante di equilibrio K , si giunge immediatamente al calcolo del calore di ionizzazione e quindi al potenziale di ionizzazione.

Dalla formula che esprime la legge dell'equilibrio mobile

$$U = -RT^2 \cdot \frac{d \log K}{dT}$$

poichè, nelle condizioni sperimentali in cui è avvenuta l'esperienza, il calore di ionizzazione si può ritenere indipendente dalla temperatura, si ha:

$$\log K_2 - \log K_1 = \frac{U}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right).$$

Con questa espressione si ha il vantaggio, su quella adoperata dal Saha, di prescindere dalla « costante chimica » di Nernst, la quale, nel caso nostro,

perde il suo significato fisico, e di elidere anche eventuali coefficienti costanti che sarebbero estremamente difficili a calcolare con qualche probabilità di successo.

I valori ottenuti sono in pieno accordo con quelli trovati sperimentalmente per altra via.

Ad esempio, pel sodio, abbiamo trovato:

ESPERIENZA I.	ESPERIENZA II.
$T = 1395^{\circ} + 273^{\circ} \text{ C}$	$T = 1435^{\circ} + 273^{\circ} \text{ C}$
numero atomi per secondo: $1,60 \cdot 10^{16}$	numero atomi per secondo: $1,41 \cdot 10^{17}$
numero elettroni per secondo: $8,21 \cdot 10^{12}$	numero elettroni per secondo: $3,70 \cdot 10^{13}$
$K_1 = \frac{[\text{Na}^+][\text{el}]}{[\text{Na}]} = \frac{[\text{el}]^2}{[\text{Na}]} = 4,21 \cdot 10^9$	$K_2 = \frac{[\text{Na}^+][\text{el}]}{[\text{Na}]} = \frac{[\text{el}]^2}{[\text{Na}]} = 9,62 \cdot 10^9$

Applicando la formula sopra scritta, si trova $U = 116000 \text{ cal.}$; Frank ed Hertz ⁽¹⁾ trovarono per il sodio $U = 117000 \text{ cal.}$ L'accordo è assolutamente ottimo.

Esprimendo in Volta, si trova $U = 5$ (invece di 5,1).

6). In esperienze fatte su vari elementi (Rb, K, Na, Li, Ba, Ca, Tl, Cu, B, P.), si è potuto rilevare che, alle temperature della fiamma usate nelle nostre ricerche, (1400° - 1500° C), sono ionizzati in modo apprezzabile soltanto gli elementi il cui potenziale di ionizzazione è inferiore a circa 8 volta.

Poichè tutti gli elementi che costituiscono i radicali acidi dei sali, hanno dei potenziali di ionizzazione altissimi, in genere superiori a 10 Volta, viene di conseguenza che alla temperatura delle nostre esperienze, gli elementi dei radicali acidi non possono assolutamente determinare alcuna corrente elettronica apprezzabile.

Si può quindi avere la sicurezza che la corrente osservata è dovuta soltanto, diremo così, alla vagliatura dei prodotti di ionizzazione degli atomi metallici.

Tutto questo conferma un fatto già osservato dall'Arrhénius ⁽²⁾, e cioè che la conducibilità elettrica di una fiamma salata è indipendente dalla natura del radicale acido del sale volatilizzato.

Quanto è stato osservato riguardo alla relazione fra potenziale di ionizzazione e funzione chimica degli elementi, formerà l'oggetto di una Nota seguente.

(1) J. FRANCK, G. HERTZ, «Phys. ZS.», 17, 409 (1916); 20, 152 (1919).

(2) S. ARRHÉNIUS, «Ann. d. Phys.», 43, 18 (1891).

Mineralogia. — *Alcune nuove osservazioni sulla dachiardite.*
Nota di MARIA DE-ANGELIS ⁽¹⁾, presentata dal Socio ARTINI.

Fino dal 1905 ⁽²⁾ il prof. G. D'Achiardi descrisse una nuova ed interessante specie di zeolite, per la quale egli, in un lavoro di un anno posteriore ⁽³⁾, propose il nome di *dachiardite*, a ricordo del compianto padre suo, prof. A. D'Achiardi, benemerito illustratore della Mineralogia toscana.

In quei due lavori il prof. G. D'Achiardi considerò i cristalli del nuovo minerale come solidi mimetici, a forma di prismi ottagonali, accennando, come ipotesi, alla possibilità che essi constassero di più individui geminati, ma senza poterne approfondire lo studio geometrico, evidentemente per mancanza di facce terminali distinte, e limitandosi alla misura degli angoli formati tra le facce dell'apparente prisma ottagonale. Le sue ricerche ottiche, come risulta anche dalle nitide fotografie, a nicols incrociati, di lamine normali all'asse del detto prisma, confortano l'ipotesi della geminazione multipla, ma non sono sufficienti ad una determinazione più precisa del grado di simmetria.

Essendo il nostro Museo venuto recentemente in possesso di un piccolo ma caratteristico esemplare di dachiardite, già appartenuto alla collezione Garbari, ho creduto utile prenderlo in esame, per vedere se fosse possibile trovare qualche cristallino abbastanza bello, che mi permettesse di completare lo studio di questo minerale. La ricerca è stata fortunata: ho potuto infatti staccare alcuni pochi, e piccolissimi, ma nitidi cristallini, suscettibili di buone misure goniometriche.

L'apparenza di questi cristalli non è tanto quella di un prisma, quanto quella di un anello ottagonale, di solito incompleto, e aperto nel mezzo, risultante evidentemente da un geminato ciclico. I singoli individui costituenti il gruppo presentano facce tutte spettanti ad una sola zona, il cui asse è parallelo, per ogni individuo, al relativo lato dell'anello; una di queste facce, la più ampia, è rivolta verso l'esterno, così che l'insieme di queste dà l'impressione del pseudo-prisma descritto dal D'Achiardi, mentre le parallele, più strette, limitano il vano centrale dell'anello. Altre due facce, un poco striate, ma brillanti, una molto stretta, inclinata verso l'esterno,

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di Mineralogia del Museo Civico di Milano; pervenuto all'Accademia il 25 luglio 1925.

(2) G. D'ACHIARDI, *Zeolite probabilmente nuova dell'Isola d'Elba*. «Proc. Verb. Soc. Toscana Sc. Nat.», 15 genn. 1905.

(3) G. D'ACHIARDI, *Zeoliti del filone della Speranza presso S. Piero in campo (Elba)*. «Atti Soc. Toscana di Sc. Nat.». Memorie, vol. XXII.

e una ampia, inclinata verso l'interno, fanno angoli diseguali con le due precedenti; in modo che la loro combinazione dà l'impressione di un cristallo monoclino, allungato secondo l'asse y , ciò che, come vedremo, è confermato dalle proprietà ottiche.

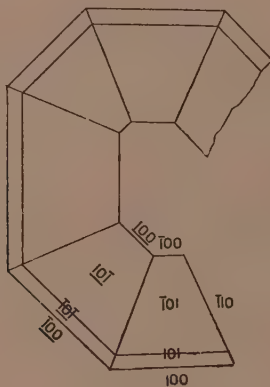
Assumendo come (100) la faccia verticale a maggiore sviluppo, come (101) la più stretta, e come $(\bar{1}01)$ la più ampia delle due superiori, e tenendo conto dell'angolo diedro formato tra le facce di $\{100\}$ di due individui adiacenti, supposti geminati secondo una faccia di un ipotetico prisma verticale $\{110\}$, si possono agevolmente calcolare le costanti. Una faccia di distacco nitida tra due individui mi permise anche una misura diretta di tale diedro, tra (100) e $(\bar{1}10)$.

Le costanti così calcolate, in base a numerose e soddisfacenti misure goniometriche, sono le seguenti:

$$a : b : c = 2.43196 : 1 : 1.35203.$$

$$\beta = 75^\circ . 49' . 36''.$$

La figura mostra, proiettato sul piano normale dell'asse verticale, uno dei gruppi ciclici misurati.



Le facce inferiori, parallele a (101) e $(\bar{1}01)$, mancano sempre del tutto; questo, e qualche altro carattere di sviluppo, mi danno a credere che i cristalli possano spettare più probabilmente alla classe domatica, che non alla prismatica, del sistema monoclino.

La sfaldatura, come già fu osservato dal prof. D'Achiardi, è facile e perfetta secondo $\{100\}$. Laminette di sfaldatura permettono di constatare: che l'estinzione è parallela all'allungamento (asse y); che il minerale è biassico; e che i piani degli A. O. sono normali al piano di simmetria.

La direzione dell'asse y , contrariamente a quanto afferma il prof. D'Achiardi, corrisponde non già a t , bensì ad a .

Sopra una laminetta tagliata parallelamente a $(\bar{1}01)$ si constata che le bisettrici acute, positive, escono, sotto una debole inclinazione, da questa faccia; la dispersione degli A. O. è piuttosto forte, con $\rho > v$. L'angolo degli A. O. è abbastanza grande: mediante il piccolo apparecchio a rotazione di Klein, nella soluzione di Thoulet, con $n = 1.656$, potei misurare, approssimativamente, $2Ha = 63^\circ$ (luce media).

Le misure goniometriche eseguite, messe a confronto coi rispettivi valori calcolati, sono le seguenti:

Spigoli misurati	Angoli osservati			Angoli calcolati
	N.	Limiti	Medie	
$(100) \cdot (101)$	9	$50^\circ.14' - 50^\circ.55'$	$50^\circ.26'$	*
$(100) \cdot (\bar{1}01)$	13	$107.38 - 107.56$	$107.46 \frac{1}{2}$	*
$(101) \cdot (\bar{1}01)$	10	$57.6 - 57.55$	$57.26 \frac{1}{2}$	$57.20 \frac{1}{2}$
$(\bar{1}01) \cdot (\bar{1}00)$	3	$71.42 - 72.5$	71.54	$72.13 \frac{1}{2}$
$(100) \cdot (\bar{1}\bar{1}0)$	1	—	66.52	67.1
$(100) \cdot (\bar{1}00)$	15	$45.31 - 46.23$	45.58	*
$(101) \cdot (\bar{1}0\bar{1})$	5	$28.13 - 29.1$	28.40	28.48
$(\bar{1}01) \cdot (10\bar{1})$	16	$13.26 - 13.55$	$13.37 \frac{1}{2}$	$13.41 \frac{1}{2}$

Biologia. — *La terza generazione di incroci tra bachi da seta a tre e a quattro mute. Il « numero delle mute » non è dunque un carattere unitario mendeliano?* Nota del dott. C. JUCCI, presentata dal Corrisp. Russo.

In due precedenti Note ⁽¹⁾ ho riassunto i risultati delle mie ricerche sul comportamento ereditario del tipo di sviluppo larvale negli incroci reciproci tra bachi da seta a tre ed a quattro mute, insistendo sulla complessità del problema e sulla necessità di proseguire gli esperimenti nella prossima stagione per giungere ad una conclusione definitiva.

E definitive mi sembrano le conclusioni che possono trarsi dallo studio della terza generazione da me condotto in questa primavera 1925. Gli allevamenti sono tuttora in corso; ma i bachi stanno ormai all'ultima età ed è già possibile, prima di ricavare i dati numerici esatti, apprezzare i risultati degli esperimenti.

La prima generazione di numerosi incroci reciproci tra razze di bachi a tre ed a quattro mute mi dette nel 1923, quasi tutti bachi treotti: dominanza spiccatissima del treottismo. La F_2 mi presentò scissione tra terzini e quartini con prevalenza numerica dei terzini, ma non nel classico rapporto di 3 ad 1. Ma il carattere « numero delle mute » è molto sensibile alle condizioni estrinseche di allevamento, e questa discordanza dal rapporto classico è insufficiente a dimostrare che il « numero delle mute » non sia un « carattere unitario » mendeliano. Occorreva seguire nella F_3 la discendenza delle farfalle terzine e delle quartine della F_2 .

Soprattutto delle seconde: perchè le prime, secondo il concetto mendeliano, dovrebbero essere in parte omozigote, in parte eterozigote. Sicchè, allevandole ad ovature isolate, parte di queste ovature dovrebbero dare tutti bachi terzini, parte presentare nuovamente scissione come nella F_2 ; allevandole poi in lotti misti, questi lotti dovrebbero presentare bachi treotti e bachi quartini, i primi in numero assai superiore (cinque volte di più: 4 : 0 + 6 : 2). Non essendomi possibile, coi mezzi a mia disposizione, allevare un numero di ovature isolate abbastanza grande, perchè potessi ragionevolmente attendermi, per legge di probabilità, che metà fossero omo- e metà eterozigote, mi sono dovuto contentare di allevare la discendenza delle farfalle terzine nella F_2 in lotti misti, costituiti da un buon numero di ovature. Ma da questa esperienza, se ben si rifletta, non ci si può attendere una risposta decisiva. Perchè il risultato di una percentuale di bachi treotti assai superiore a quella dei bachi quartini ottenuta da questi lotti, può spiegarsi anche indi-

(1) Questi « Rendiconti », serie VI, vol. I, p. 683; Id., vol. II, p. 67.

pendentemente dalle leggi di Mendel; le quali, dovrebbe essere superfluo avvertirlo, se sono l'unico faro luminoso che finora vivamente rischiari le tenebre del campo ereditario e al lume del quale dobbiamo tentare di rischiare gli angoli scuri, non è detto però che costituiscano l'unica luce possibile e capace di illuminare da sola tutto intiero il dominio della Genetica.

Più conclusivo dovrebbe riuscire lo studio della discendenza dei bachi risultati quartini nella F_2 . Questi dovrebbero essere omozigoti recessivi, e dare quindi nella F_3 bachi tutti a 4 mutè. Trovare bachi treotti nella discendenza di quartini della F_2 , parrebbe dunque dimostrare che il carattere numero delle mute non è mendeliano o, per essere più esatti, non è un carattere unitario « mendeliano ». (L'ipotesi dei fattori multipli, quando non si basi su osservazioni concrete, sposta la questione del campo positivo, sperimentale, alle regioni teoriche, filosofiche).

Ma una obiezione è possibile, ed è tutt'altro che leggiera. Il carattere « numero delle mute », abbiamo già accennato, è molto influenzabile dalle condizioni estrinseche di allevamento, e la dominanza del treottismo sul quartinismo sembra essere fortissima sì, ma non assoluta. È dunque possibile, se non probabile, che qualche baco a costituzione genetica di treotto o di eterozigoto faccia (e abbia fatto nella F_2) 4 anziché 3 mute. La presenza di bachi treotti nella discendenza di bachi stati quartini nella F_2 , non dimostra dunque senz'altro che non è avvenuta scissione mendeliana dei caratteri. Bisogna allevare isolate le ovature deposte dalle farfalle quartine nella F_2 , e verificare quante di esse si presentino omozigote e quanto diano luogo a scissione. Solo se una notevole percentuale di ovature si riveli non omozigote, dando luogo a bachi terzini e quartini insieme, allora soltanto potrà affermarsi che scissione mendeliana dei caratteri non è avvenuta.

Tutte queste considerazioni, dominate dal senso dei limiti imposti dalla relativa povertà di spazio, foglia e mano d'opera, mi hanno guidato nel tracciare il programma per gli allevamenti della F_3 in questa primavera 1925.

Nel maggio 1924 avevo allevato, oltre ai lotti misti (106 ovature complessivamente) 50 ovature isolate. Da ognuna di esse ottenni bachi terzini e bachi quartini; e, per ciascuna ovatura, accoppiando tra loro rispettivamente le farfalle terzine e le farfalle quartine, raccolsi in tante celle isolate la discendenza di tutti i fratelli figli di quella coppia genitrice.

Nell'aprile 1925 ho incubato il seme di molte ovature n. 47, 'sfarfallate 21-22 giugno, terzini nella F_2 (razze parentali: ♀ treotti ♂ Oro; F_1 terzini; F_2 terzini), seme sgranato e conmistato; e di molte ovature, pure terzine, n. 4, sfarfallate 19-20 giugno (razze parentali: ♀ treotti ♂ Nippon [bivoltina giapponese]; F_1 terzini; F_2 terzini) e di molte ovature n. 36, sfarfallate 23-24 giugno (razze parentali: ♀ Oro, ♂ treotti; F_1 terzini; F_2 terzini).

A cominciare dalla seconda età è stato possibile separare, da ognuno di questi lotti, bachi candidati terzini e candidati quartini. La distinzione è stata più netta ancora alla terza muta, e si sono definitivamente separati

due lotti, l'uno di bachi che sono entrati nel periodo della *mangerella* avviandosi verso la maturità; e l'altro, piccolo al confronto, di bachi che dopo pochi giorni sono caduti in un quarto sonno. Niente di inaspettato fin' qui, anche da un punto di vista mendeliano.

Per studiare la discendenza dei quartini nella F_2 , sano stati allevati i bachi di molte ovature n. 48 e n. 49 (razze parentali: ♀ treotti ♂ Oro; F_1 terzini, F_2 quartini), dopo sgranato e commisto il seme. Anche in questi lotti si sono distinti alla seconda muta due gruppi, i candidati terzini e i candidati quartini. La distinzione è divenuta nettissima alla terza muta ed oggi (30 maggio) i terzini stanno per salire al bosco, mentre i quartini, mutati da una quarta muta, entrano ora nel periodo della *mangerella*. Già il fatto che i bachi terzini derivanti dai lotti quartini nella F_2 sono molto numerosi (1/3 del numero complessivo), tende a dimostrare che veramente i quartini non sono omozigoti recessivi, perchè bisognerebbe supporre che non solo alcuni, ma addirittura molti dei bachi quartini nella F_2 fossero solo fenotipicamente quartini e genotipicamente invece treotti o almeno eterozigoti. Ma il risultato dell'allevamento di ovature isolate, permette, mi sembra, di togliere di mezzo ogni dubbio.

Ho allevato isolate 14 ovature di n. 4 e 19 ovature di n. 47, sfarfalate il 28-29 giugno (F_1 terzini; F_2 quartini). In ognuna di queste ovature ho constatato alla seconda muta la separazione netta di un gruppo, più o meno numeroso, di candidati treotti dalla maggioranza di candidati quartini. Per necessità di spazio però ho dovuto trasportare, appena dopo la seconda muta, i bachi delle 19 ovature n. 47 in una bigattiera fredda e umida. Le condizioni sfavorevoli hanno fatto subito sentire la loro influenza, rendendo più lento o irregolare lo sviluppo, facendo comparire un numero notevole di *spostati*, cioè bachi che restano indietro, piccoli e che fanno un numero imprecisabile di mute, assai probabilmente superiore a 4, se li si lascia vivacchiare senza gittarli. Tuttavia in quasi tutte le ovature è riconoscibile ancora adesso un numero, in alcune notevole, in altre scarse, in altre ridotto a bassissimo, di individui con l'aspetto di treotti che mangiano avidamente mentre i fratelli quartini dormono il quarto sonno.

Nettissimo è poi il risultato offerto dalle ovature isolate n. 4, tenute anche dopo la seconda muta nella bigattiera migliore, più calda e abbastanza asciutta. Alla terza muta si è conservata ed è anzi divenuta nettissima la distinzione tra bachi treotti e quartini, quelli che s'avviano già alla maturità, questi che stanno ora svegliandosi dal quarto sonno. Solo in tre o quattro delle ovature isolate, il lotto dei treotti è ridotto a pochi bachi; nelle altre è rappresentato da numerosi individui e in qualche caso da un numero di bachi maggiori che nel lotto dei quartini. Parrebbe dunque potersi affermare con tutta sicurezza che le ovature dei quartini nella F_2 , non solo non sono tutte omozigote, ma nemmeno in notevole percentuale; forse anzi non esistono ovature di quartini nella F_2 che nella F_1 diano origine solo a bachi a 4 mute.



Bachi a tre e a quattro mute nella discendenza (F_3) di quartini nella (F_2) (1).

(Fotogr. Or 17 29 maggio 1925).

I-II) discendenza del n. 48 e n. 49: ♀ Treotti ♂ Or.

I bachi quartini (in basso) sono appena usciti dalla 4^a muta, mentre i Treotti sono vicini a salire al bosco, compiendo la loro 4^a ad ultima età.

III-IV) discendenza di 5 ovature isolate n. 4: ♀ Treotti ♂ bivoltino (4 E e 250, 4 A e 210, 4 F e 260, 4 L e 310, 4 D e 240).

I bachi quartini (in basso) stanno in 4^o sonno o sono appena usciti dalla 4^a muta (?); mentre i Treotti corrispondenti (in alto) si trovano nella 4^a ed ultima età (mangiano, dopo la 3^a muta). La grandezza del corpo, le dimensioni della testa, l'aspetto del tegumento (lucido nei treotti) permettono distinzione sicura.

Ma se il carattere « numero delle mute » non è un carattere unitario mendeliano, quali leggi dunque ne regolano il comportamento ereditario? Se è stata difficile la soluzione della prima questione - e non ardisco ancora considerarla con tutta sicurezza definitivamente risolta - certo molto più ardua ancora si presenta la soluzione di questa seconda.

A questa soluzione io spero di portare un contributo con lo studio della curva di sviluppo dei miei incroci e con esperienze di reincrocio, delle quali mi riservo di comunicare presto i risultati.

(1) Ringrazio di tutto cuore il mio carissimo amico Darwin Wen che, con affetto fraterno e con intelligente premura, mi ha efficacemente assistito e coadiuvato nelle esperienze di questo anno; a lui debbo, tra l'altro, questa ed altre numerose fotografie che documentano i risultati ottenuti nella terza generazione degli incroci.

Fisiologia. — *Influenza dei trefoni embrionali sulla cicatrizzazione delle ferite.* Nota preventiva ⁽¹⁾ di G. BERGAMI, presentata dal Socio F. BOTTAZZI ⁽²⁾.

Sembra che i tessuti embrionali dei mammiferi e degli uccelli producano, a spese dei principi contenuti rispettivamente nel plasma materno e nell'uovo, delle speciali sostanze che permettono ai fibroblasti coltivati *in vitro* di formare nuovo protoplasma e di crescere attivamente.

Vari dati sperimentali, per la maggior parte ottenuti da Alexis Carrel, a cui si deve l'interessante scoperta, e dai suoi collaboratori, mostrano che i fibroblasti coltivati *in vitro* in un mestruo costituito da solo plasma, non sono capaci di utilizzare per la formazione di nuovo protoplasma, le sostanze azotate contenute nel liquido di cultura; ed infatti in tale mestruo presentano un accrescimento poco attivo e di breve durata, del tutto identico a quello dei fibroblasti coltivati in semplici soluzioni saline fisiologiche prive di qualsiasi sostanza azotata (Lewis).

Quest' accrescimento di breve durata, a cui presto segue la degenerazione e la morte degli elementi cellulari neoformati, è, secondo Carrel e Burrow, dovuto alla presenza di una certa quantità di succhi embrionali nell'espianto stesso, il quale, come si sa, vien tolto da un embrione; e quindi cessa coll'esaurirsi di esso.

Invece quando al mestruo di cultura, sia esso costituito da plasma, sia da semplice soluzione fisiologica, si aggiunge succo di embrione, le cellule dell'espianto proliferano attivamente; la loro vitalità è tale, che nel laboratorio di Carrel esistono attualmente culture pure di fibroblasti moltiplicatisi *in vitro* dal 1912, epoca in cui Carrel per la prima volta usò questo accorgimento di tecnica.

L'estratto di embrione, se aggiunto in piccole quantità al mestruo di cultura, non è capace di promuovere e mantenere l'accrescimento dell'espianto; ed anzi Carrel ha recentemente dimostrato che esiste un rapporto di proporzionalità tra velocità di accrescimento della cultura e concentrazione di estratto embrionale nel mestruo.

Non si deve, secondo Carrel, pensare ad una semplice azione ormonica, perchè in tal caso l'accrescimento dei fibroblasti richiederebbe sempre un mezzo di cultura azotato; invece le esperienze dimostrano che i fibroblasti si accrescono con eguale intensità sia in un *medium* composto di plasma

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Fisiologia della Regia Università di Napoli.

(2) Nota pervenuta all'Accademia il 25 luglio 1925.

più estratto embrionale, sia in uno composto di semplice soluzione fisiologica più estratto di embrione.

Ora nel secondo caso l'unica sorgente di azoto è data dalla presenza dell'estratto embrionale, per cui Carrel conclude che l'azione di quest'ultimo consiste nel fornire un appropriato materiale azotato ai fibroblasti. A queste speciali sostanze, che sarebbero quindi fabbricate da alcune cellule ed utilizzate da altre per la sintesi di nuovo protoplasma, egli ha dato il nome di *trefoni* (da *τρέφειν* = nutrire), per distinguerle dagli *armoconi* che hanno solo funzioni direttive e modificatrici.

L'influenza favorevole dei *trefoni* sull'accrescimento delle cellule coltivate *in vitro* è confermata in tutti i numerosi ed autorevoli lavori pubblicati in questi ultimi anni sulle culture *in vitro*, e non c'è sperimentatore che non indichi, tra i componenti *indispensabili* di un buon mestruo di cultura, l'estratto di tessuto embrionale.

D'altra parte Carnot, somministrando per via orale vari estratti di organi embrionali a girini ed a giovani topi, ha notato un forte aumento della velocità di accrescimento, e Abel ha ottenuto notevolissimi miglioramenti nello sviluppo di fanciulli rachitici ed ipotrofici, somministrando loro estratti di embrione.

Questi dati vengono a confermare, per altra via, l'esistenza nei tessuti dell'embrione di particolari sostanze atte a favorire l'accrescimento.

Mi è parso, quindi, non privo di interesse il cercare di studiare l'influenza dei *trefoni* sui processi rigenerativi *in vivo*; ed in queste prime esperienze, eseguite nella decorsa primavera e che saranno pubblicate *in extenso* nel I fascicolo del volume VIII dell'« Archivio di Scienze Biologiche », ho sperimentato l'azione degli estratti acquosi di embrioni di pollo sulla cicatrizzazione delle ferite nei polli stessi.

L'estratto è stato ottenuto mediante triturazione con sabbia di quarzo, in liquido di Ringer, di embrioni di pollo al decimo giorno di incubazione, e successiva centrifugazione. Il liquido opalescente era quindi distribuito in fialette chiuse alla lampada, e volta per volta il contenuto di una di esse era direttamente applicato sulla ferita imbevandone un tampone di garza ed ovatta, mentre sulla ferita di confronto, di eguale superficie e simmetrica, era applicata una medicatura asettica protettiva inumidita con liquido di Ringer. Ogni due giorni si rinnovava la medicatura e l'applicazione dell'estratto.

In tutte le manipolazioni ho avuto particolare cura per il mantenimento di un'asepsi assolutamente rigorosa, e le fiale di estratto si conservano ancora oggi sterili.

Dalle esperienze eseguite risulta che i *trefoni* contenuti nell'estratto acquoso di embrione, sono utilizzati dalle cellule del tessuto cruentato per una formazione di tessuto cicatriziale molto più rapida della normale.

La ferita di confronto, di eguale superficie e simmetrica, cicatrizza in un tempo quasi doppio di quella trattata con l'estratto.

In una sola esperienza eseguita su specie animale differente da quella dell'embrione da cui si è ricavato l'estratto, si è anche avuta una notevolissima influenza benefica su di una ferita nettamente torpida che si è rapidamente cicatrizzata.

Sono in corso di esecuzione ricerche sull'azione dei *trefoni* di origine leucocitaria e di altri tessuti.

Conclusioni:

I *trefoni* contenuti negli estratti acquosi d'embrione di pollo accelerano il processo di cicatrizzazione delle ferite in animali della stessa specie. Il tempo occorrente per la completa cicatrizzazione di una ferita trattata con estratto, è di circa la metà minore di quello richiesto da una ferita di confronto.

Patologia vegetale. — *Guarigione di alcuni cancri vegetali con la cura dei raggi X* ⁽¹⁾. Nota del Dott. VINCENZO RIVERA, presentata dal Socio F. CAVARA ⁽²⁾.

Se si toglie il tentativo di Gosset, Magrou, Gutmann e Lakhovsky ⁽³⁾, i quali però operarono con *onde hertziane* (raggi elettrici di frequenza particolare) e che ebbero risultato positivo, nessuna altra prova di terapia fisica è stata fatta, che io sappia, sopra i cancri vegetali, la cui costituzione è pure, secondo lo Smith ⁽⁴⁾, così simile a quella dei cancri animali.

Le analogie tra queste produzioni patologiche dei due mondi, mi hanno spinto a sperimentare sopra cancri vegetali prodotti artificialmente sopra *Ricinus communis* e *Pelargonium zonale*, l'efficacia dei raggi X, o raggi Röntgen, così chiara e di importanza curativa notoria per la cura di certi tumori animali.

I tumori vegetali erano determinati da *Bacterium tumefaciens*, cortesemente inviati dal prof. Magrou dell'Istituto Pasteur. La tecnica di irradiazione, che, dopo alcuni preliminari tentativi, fu trovata efficace per i cancri delle due specie era la seguente: 4 MA, 180 KW, 40 cm. DF, campo aperto, nessun filtro, irradiando per 25'.

I casi curati furono sei, e cioè tre cancri di *Pelargonium* e tre di *Ricinus*, con uno o due trattamenti per ogni cancro. Si osservò in tutti i casi sperimentati che mentre i cancri di controllo non trattati seguitavano ad

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di botanica della Regia Università di Bari.

(2) Presentata all'Accademia il 21 giugno 1925.

(3) *Essais de thérapeutique du cancer expérimental des plantes*. «C. R. de Biol.», t. XCI, luglio 1924, p. 626.

(4) *An introduction to bacterial diseases of plants*. Sanders Philad. e Londres 1920 e preced. pubblicaz.

accrescersi, i cancri irradiati arrestavano, dopo circa otto giorni dalla irradiazione, il loro accrescimento e successivamente ingiallivano, imbrunivano, apparivano morti: la pianta ricostituiva, al disotto del tessuto canceroso distrutto, un tessuto di cicatrizzazione ed appariva completamente guarita da queste produzioni patologiche.

La dose di irradiazione fornita danneggia dunque il tessuto canceroso, ma rispetta quello normale della pianta. Solo ripetendo per più di due volte la irradiazione nella dose suindicata, viene danneggiata anche la pianta di *Pelargonium*.

Ho voluto pure rendermi conto se i raggi X, oltre ad avere un'azione sopra queste produzioni patologiche, influissero in qualche modo sulla vita o sulla moltiplicazione del *Bacterium* patogeno che le determina. Con la stessa dose usata contro i cancri ho perciò irradiato delle culture pure di *B. tumefaciens* in agar al peptone, un giorno dopo eseguito il trapianto: il *B.* ha seguitato a moltiplicarsi nel tubo dando colonie della stessa importanza e della medesima forma di quello allevato nei tubi di controllo, non irradiati: successivamente con inoculazioni di questo *B.* irradiato, ho prodotto su *Ricinus* cancri in tutto simili a quelli ottenuti con il *B.* di controllo non irradiato.

Ne deduco che i raggi X, così efficaci sui tumori vegetali in pieno sviluppo, non hanno alcun effetto sul *B.* che questi tumori produce o almeno sulle colonie del *B.* in coltura pura su agar al peptone.

L'azione dei raggi è invece evidente sopra le cellule tumorali e specialmente sopra i focolai di accrescimento del tumore costituiti di cellule piccole a grossi nuclei, o, per essere più precisi, di cellule a nuclei normali, ma con citoplasma ridotto ⁽¹⁾.

Sopra queste zone cellulari i raggi X producono dapprima disorganizzazione nucleare, quindi ingrandimento delle cellule stesse con aumento del citoplasma e successivamente rottura delle pareti cellulari.

Sembra che si possa stabilire che il *periodo di latenza*, cioè del ritardo degli effetti della irradiazione sopra i cancri, periodo di latenza che per i cancri del ricino va da quattro a sei giorni, non rappresenti in realtà una continuazione normale della crescita dei cancri; è invece ammissibile, da quanto si rileva dai preparati fatti nei vari momenti del periodo di latenza del cancro, che il trattamento con raggi X arresti immediatamente la moltiplicazione nucleare e perciò la proliferazione cellulare. A questo punto, per influenza diretta od indiretta della irradiazione subita, il citoplasma delle cellule tumorali comincia a crescere, perdendosi, in quelle cellule, la caratteristica di avere poca sostanza citoplasmatica: questa crescita in grandezza delle cellule tumorali, che è forse causata da un aumento di permeabilità delle

(1) SMITH L., *Crown. Gall.* «Revue de Pathologie végétale et d'Entom. agric.», tome XI, oct.-déc. 1924, p. 223.

membrane, è forse pure la causa della morte di esse e della distruzione delle zone di accrescimento del cancro, nelle quali le pareti cellulari appaiono in definitiva lacerate come per scoppio del contenuto protoplasmatico.

Qualunque sia il meccanismo della crescita del tumore nel periodo di latenza, e qualunque sia la causa della morte delle cellule tumorali vegetali, la cura di queste produzioni cancerose vegetali è straordinariamente efficace: con una sola irradiazione, nella dose indicata, di raggi Röntgen, si ha completamente ragione di queste formazioni patologiche, senza che il tessuto dell'ospite rimanga menomamente alterato.

La facilità di ottenere e curare questi cancri vegetali, la limpidezza dei preparati che su questi cancri si ottengono, lasciano sperare che ancora altri contributi possano trarsi dallo studio di essi a beneficio forse del problema dei cancri in genere.



A SINISTRA: Due tumori ottenuti con inoculazione di *B tumefaciens* su *Ricinus communis*. Quello sottostante si è irradiato con Raggi Röntgen; quello sovrastante era protetto, durante la irradiazione, mediante una piastra di piombo.

A DESTRA: La stessa pianta venticinque giorni dopo la irradiazione.

La pianta è cresciuta, ma il tumore irradiato (quello sottostante) è rimasto di dimensioni pressochè invariate, mentre quello sovrastante non irradiato si è accresciuto ancor più che i tessuti della pianta. La differenza di grossezza dei due tumori, che prima della irradiazione si equivalevano, è straordinaria.

G. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1925.

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo).

Matematica. — *Sulla convergenza assoluta delle serie di Fourier.*
Nota del Socio Corrisp. LEONIDA TONELLI ⁽¹⁾.

S. Bernstein diede, nel 1914 ⁽²⁾, un importante teorema sulla convergenza assoluta di una serie di Fourier, in una variabile. Egli dimostrò precisamente che la serie di Fourier di una funzione $f(x)$, data in $(-\infty, +\infty)$ e di periodo 2π , converge assolutamente se la $f(x)$ soddisfa ad una condizione di Lipschitz di grado $\alpha > \frac{1}{2}$, vale a dire se esistono due costanti positive K e α , con $\alpha > \frac{1}{2}$, tali che sia sempre

$$(1) \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq K |x_1 - x_2|^\alpha.$$

Questo criterio, per quanto molto generale, lascia ancora insoluta la questione della convergenza assoluta delle serie di Fourier per classi importanti di funzioni. Per esempio, alle funzioni, di periodo 2π , definite in $(0, \pi)$ da \sqrt{x} o da $\sqrt[3]{x}$, e in $(-\pi, 0)$ da $f(x) = f(-x)$, non è applicabile il teorema del Bernstein, perchè il massimo valore di α che rende per esse soddisfatta la (1), è $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{3}$, rispettivamente; ciò nonostante, gli sviluppi in serie di Fourier di queste funzioni sono assolutamente convergenti ⁽³⁾.

(1) Pervenuta all'Accademia il 7 luglio 1925.

(2) « Comptes rendus », t. 158 (1914), p. 1661.

(3) V. più oltre, n. 6.

L'importanza che ha, specialmente nelle applicazioni, la convergenza assoluta degli sviluppi trigonometrici, mi ha indotto a riprendere la questione trattata dal Bernstein; e, nella presente Nota, espongo un nuovo criterio, dapprima in una forma molto generale e poi in una forma più particolare, che mi sembra di larga e facile applicazione. Questo criterio è il seguente:

A) Se la funzione $f(x)$ è assolutamente continua e periodica, di periodo 2π , e se, per un $\sigma > 0$, $|f'(x)|^{1+\sigma}$ risulta integrabile, in tutto $(0, 2\pi)$, allora la serie di Fourier della $f(x)$ è ovunque assolutamente convergente.

In particolare, si ha:

B) Se la funzione $f(x)$ è assolutamente continua ⁽²⁾ e periodica, di periodo 2π ; se i punti di $(0, 2\pi)$, nell'intorno dei quali la $f'(x)$ non è limitata, sono in numero finito: x_1, x_2, \dots, x_m , ed, essi esclusi, è sempre

$$|f'(x)| < \frac{M}{|x - x_1|^{\alpha_1} |x - x_2|^{\alpha_2} \dots |x - x_m|^{\alpha_m}},$$

con M costante positiva qualunque e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, costanti positive minori di 1; allora la serie di Fourier della $f(x)$ converge ovunque assolutamente.

1. — Rammentiamo, in primo luogo, un risultato dovuto a W. H. Young e F. Hausdorff ⁽³⁾. Indicati con a_n e b_n i coefficienti della serie di Fourier della funzione $f(x)$, si ha che « se p è un numero > 1 e la funzione $f(x)$ è integrabile in $(0, 2\pi)$, insieme con $|f(x)|^{1+\frac{1}{p}}$, la serie

$$\sum_n \left\{ |a_n|^{1+p} + |b_n|^{1+p} \right\}$$

è convergente ».

Rammentiamo, inoltre, la disuguaglianza di Hölder ⁽⁴⁾, generalizzazione di altra ben nota di Cauchy:

$$(2) \quad \sum_{n=1}^m |u_n| |v_n| \leq \left\{ \sum_{n=1}^m |u_n|^\alpha \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \left\{ \sum_{n=1}^m |v_n|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right\}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}},$$

valida per ogni $\alpha > 1$.

(1) Rammentiamo che una funzione assolutamente continua ha derivata finita quasi dappertutto, e tale derivata risulta (assolutamente) integrabile. Là dove la derivata non esiste finita, porremo sempre, in ciò che segue, $f'(x) = 0$.

Avvertiamo poi che, in tutta la presente Nota, l'integrabilità è intesa nel senso del Lebesgue.

(2) L'assoluta continuità può (in particolare) essere qui sostituita dalla condizione che la $f(x)$ sia continua in tutto $(0, 2\pi)$, e che, in tutti i punti di questo intervallo, esclusi x_1, x_2, \dots, x_m , essa abbia derivata finita e continua.

(3) W. H. YOUNG, « Comptes rendus », t. 155 (1912), p. 30 e p. 472; « Lond. Roy. Soc. Proc. », t. 87 (1912), p. 331; « Lond. Math. Soc. Proc. », t. 12 (1912), p. 71. — F. HAUSDORFF, « Math. Zeitschrift », B. 16 (1923), p. 163.

(4) « Nachr. v. d. k. Gesellsch. d. W. in Göttingen », 1889, p. 38.

2. — Ciò premesso, dimostriamo che « se la serie

$$\sum_1^{\infty} \left\{ |a_n|^{\alpha} + |b_n|^{\alpha} \right\},$$

con $\alpha > 1$, è convergente, le serie

$$\sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n}, \quad \sum_1^{\infty} \frac{b_n}{n}$$

convergono assolutamente ». Ed infatti, facendo, nella disuguaglianza (2),

una volta $u_n = a_n, v_n = \frac{1}{n}$, e un'altra volta $u_n = b_n, v_n = \frac{1}{n}$, otteniamo

$$\sum_{n=1}^m \frac{|a_n|}{n} \leq \left\{ \sum_{n=1}^m |a_n|^{\alpha} \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \left\{ \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right\}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}},$$

$$\sum_{n=1}^m \frac{|b_n|}{n} \leq \left\{ \sum_{n=1}^m |b_n|^{\alpha} \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \left\{ \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right\}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}.$$

Per $m \rightarrow \infty$, i primi fattori dei secondi membri di queste disuguaglianze hanno limiti finiti, in virtù della ipotesi fatta; tali secondi membri hanno perciò limite finito, perchè è $\frac{\alpha}{\alpha-1} > 1$, e la serie $\sum \frac{1}{n^{\sigma}}$, con $\sigma > 1$,

è convergente. Dunque convergono anche $\sum \frac{|a_n|}{n}$ e $\sum \frac{|b_n|}{n}$.

3. — Da quanto abbiamo ora dimostrato, segue che: *se la funzione $f(x)$ è integrabile in $(0, 2\pi)$, e per un $\sigma > 0$ è ivi integrabile anche $|f(x)|^{1+\sigma}$, indicati con a_n e b_n i coefficienti dello sviluppo di Fourier della $f(x)$, le serie $\sum \frac{a_n}{n}$ e $\sum \frac{b_n}{n}$ risultano assolutamente convergenti.*

Ed infatti, se è $\sigma \geq 1$, dalla disuguaglianza di Bessel segue la convergenza di $\sum_1^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$; e se è $0 < \sigma < 1$, il teorema di Young e Hausdorff (n. 1) assicura la convergenza di $\sum \left\{ |a_n|^{1+\frac{1}{\sigma}} + |b_n|^{1+\frac{1}{\sigma}} \right\}$. Ad ogni valore di $\sigma > 0$ corrisponde dunque un $\alpha > 1$, tale che risulti convergente la serie $\sum \left\{ |a_n|^{\alpha} + |b_n|^{\alpha} \right\}$. Ed allora, applicando ciò che abbiamo stabilito

nel n. 2, otteniamo la convergenza assoluta di $\sum \frac{a_n}{n}$ e $\sum \frac{b_n}{n}$.

4. - Siamo ora in grado di dimostrare rapidamente il criterio A). Indicando ancora con a_n e b_n i coefficienti della serie di Fourier della $f(x)$, abbiamo, con una integrazione per parti, e tenendo presente l'ipotesi della periodicità della $f(x)$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha = - \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} f'(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha,$$

$$b_n = \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha = \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} f'(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha.$$

Se dunque rappresentiamo con a'_n e b'_n i coefficienti dello sviluppo di Fourier della derivata $f'(x)$, le uguaglianze precedenti danno:

$$a'_n = nb_n, \quad b'_n = -na_n.$$

Dopo di ciò, applicando alla $f'(x)$ (che per ipotesi è integrabile, insieme con $|f'(x)|^{1+\sigma}$, con $\sigma > 0$) il risultato del n. 3, abbiamo che le serie

$\sum \frac{a'_n}{n}$ e $\sum \frac{b'_n}{n}$ sono assolutamente convergenti. Sono dunque assolu-

mente convergenti anche $\sum a_n$ e $\sum b_n$, e ciò mostra l'assoluta convergenza della serie di Fourier della $f(x)$. Il criterio A) è, pertanto, dimostrato.

5. - Il criterio B) non è che un corollario di quello A). Ed infatti, detto α il maggiore dei numeri $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, e scelto σ in modo che sia $0 < \sigma < \frac{1}{\alpha} - 1$, si ha $\alpha_v(1 + \sigma) < 1, v = 1, 2, \dots, m$, e

$$|f'(x)|^{1+\sigma} < \frac{M^{1+\sigma}}{|x - x_1|^{\alpha_1(1+\sigma)}, \dots, |x - x_m|^{\alpha_m(1+\sigma)}}$$

e la $|f'(x)|^{1+\sigma}$ risulta integrabile in $(0, 2\pi)$. Non resta dunque che applicare il criterio A).

6. - Nel caso in cui sia $\sigma > 1$, il criterio A) si può dedurre da quello del Bernstein, in forza della seguente proposizione: *una funzione $f(x)$ assolutamente continua e periodica, e tale che $|f'|^{1+\sigma}$ sia integrabile, per un $\sigma > 0$, soddisfa alla condizione*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K |x_1 - x_2|^{\frac{\sigma}{1+\sigma}},$$

qualunque siano x_1 e x_2 .

Questa proposizione risulta immediatamente osservando che è

$$f(x_1) - f(x_2) = \int_{x_2}^{x_1} f'(x) dx,$$

e, per la disuguaglianza di Schwarz generalizzata⁽¹⁾,

$$\left| \int_{x_2}^{x_1} f'(x) dx \right| \leq |x_1 - x_2|^{\frac{\sigma}{1+\sigma}} \left\{ \int_{x_2}^{x_1} |f'|^{1+\sigma} dx \right\}^{\frac{1}{1+\sigma}}.$$

Se dunque è $\sigma > 1$, è pure $\frac{\sigma}{1+\sigma} > \frac{1}{2}$, e la serie di Fourier della $f(x)$ converge assolutamente per il criterio di Bernstein.

Quando sia invece $\sigma \leq 1$, il criterio A) non può più dedursi da quello del Bernstein. Ed infatti, mentre alle funzioni uguali a \sqrt{x} o $\sqrt[3]{x}$, in $(0, \pi)$, e a $\sqrt{-x}$ o $\sqrt[3]{-x}$, rispettivamente, in $(-\pi, 0)$, non è applicabile (come già abbiamo osservato) il criterio del Bernstein, ad esse si applica invece immediatamente quello A) (od anche quello B).

Chimica. — *Ricerche sull'isomorfismo dei molibdati dei metalli delle terre rare con quelli del calcio, dello stronzio, del bario e del piombo.* Nota del Socio F. ZAMBONINI e del prof. R. G. LEVI⁽²⁾.

Grazie alle ricerche eseguite da A. Cossa⁽³⁾, col sussidio delle misure cristallografiche di Q. Sella, di Ch. Friedel e di G. La Valle, fu dimostrato, oltre quarant'anni fa, che un innegabile isogonismo esiste fra i tungstati ed i molibdati di cerio e di didimio ed i composti corrispondenti del calcio e del piombo. Alcuni anni or sono, le estese ricerche chimiche e cristallografiche di uno di noi⁽⁴⁾ hanno posto fuori di dubbio che tungstati e molibdati dei metalli delle terre rare sono isomorfi con quelli dei metalli alcalino-terrosi e del piombo: fu possibile stabilire che, in molti casi, la miscibilità allo stato solido è completa, mentre in altri è più o meno estesa. Essendo state le ricerche estese ad altri tipi di composti, il fenomeno della miscibilità allo stato solido fra i composti dei metalli delle terre rare e

(1) Vedi, per es., i miei *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, vol. 1, p. 165.

(2) Pervenuta all'Accademia il 15 luglio 1925.

(3) « Memorie R. Accad. Lincei », 1878 (3^a) III, 1. « Transunti », 1880 (3^a) V, 7 marzo 1880. « Rendiconti », 1886 (4^a), II, 320.

(4) F. ZAMBONINI, « Rivista ital. di min. », 1915 LIV-LV. « Zeitsch. für Kryst. », 1923, LVIII, 226 (Festband).

quelli del calcio, dello stronzio, del bario e del piombo apparve di carattere quasi generale. Pochi mesi or sono, uno di noi⁽¹⁾ ha richiamato l'attenzione sul fatto che le strutture atomiche proposte dal Bohr per i metalli delle terre rare e per gli alcalino-terrosi ci danno ragione dell'isomorfismo constatato fra molti composti degli elementi indicati, come pure di quelle proprietà chimiche dei metalli delle terre rare, le quali per tanto tempo li hanno fatti considerare come bivalenti, e, più di recente, hanno indotto A. Werner a chiamarli « metalli alcalino-terrosi trivalenti ».

La constatata miscibilità, spesso completa, allo stato solido fra i composti delle terre rare e quelli corrispondenti dei metalli alcalino-terrosi e del piombo presenta un grande interesse per alcune questioni fondamentali di isomorfismo.

Ed invero, è ben noto che, pur essendo ormai certo che ogni composto appartenente ad una data serie isomorfa possiede un suo proprio volume molecolare, gli studiosi, anche i più recenti, hanno sempre riaffermato il concetto che il volume molecolare delle sostanze isomorfe è poco diverso, giungendo talvolta, come ha fatto il Gossner⁽²⁾, a propugnare una specie di diretta dipendenza fra il grado di miscibilità di due sostanze allo stato solido e la differenza dei loro volumi molecolari. Nel lavoro già ricordato di uno di noi, la questione è stata sottoposta ad un nuovo esame, esprimendo la differenza tra i valori dei volumi molecolari di due sostanze isomorfe

in percento del valore più piccolo, mediante la formula $100 \frac{V - V_1}{V_1}$. Si è,

così, trovato che, tutte le volte che i due componenti di una coppia isomorfa hanno la stessa formula generale, ossia che gli elementi vicarianti hanno la medesima valenza, la differenza dei volumi molecolari, espressa come ora si è detto, per lo più è piccola e solo in casi che hanno bisogno, probabilmente, di essere meglio studiati, raggiunge il 40-50 % del volume molecolare più piccolo. Ma se si esaminano i molibdati ed i tungstati dei metalli alcalino-terrosi (e del piombo) e quelli delle terre rare, si trovano

per $100 \frac{V - V_1}{V_1}$ dei valori enormemente più grandi, che vanno dal 152 al

176 %, qualora si adottino le formule $R''(Mo, W)O_4$ e $X_2'''[(Mo, W)O_4]$.

Se si ammette, invece, che nella unità di struttura cristallina, che è quella che conta per lo stato solido, quei composti contengano un tale numero di atomi da dar luogo a formule con la stessa somma di valenze principali, il che equivale a prendere non i pesi molecolari risultanti dalle formule più semplici possibili, ma i pesi equivalenti, come, per esempio, $CaMoO_4$ e $\frac{1}{3} Ce_2(MoO_4)_3$, ovvero $Ce_2(MoO_4)_3$ e $(CaMoO_4)_3$, ecc., allora

(1) F. ZAMBONINI, « Rendiconti R. Accad. Lincei », 1924, XXXIII (5^a) 2° sem., 16. « Gazzetta chim. », 1925, LV, 136.

(2) « Zeitsch. für Kryst. », 1908, XLIV, 80.

i valori di $100 \frac{V - V_i}{V_i}$ diventano perfettamente normali. Lo stesso fatto si verifica per molte altre coppie di composti isomorfi nei quali gli elementi vicarianti hanno diversa valenza, non solo, ma anche nei casi di cristalli misti di un sale doppio con i suoi componenti. Questo risultato presentava un certo interesse, perchè veniva a stabilire che nei cristalli misti di due composti di valenza con elementi vicarianti a valenza diversa, i composti stessi si trovano in tale stato, che la somma delle valenze principali è la stessa. In altri termini, si affermava il principio che nei casi in questione dovevano essere dei *volumi equivalenti* quelli contenuti nell'unità di struttura cristallina. Ma questa conclusione, per quanto verosimile, aveva bisogno di una dimostrazione sperimentale, che poteva essere fornita dall'esame röntgenografico, in base al quale sarebbe stato possibile stabilire se nei molibdati e tungstati di Ca, Sr, Ba, Pb e dei metalli delle terre rare isolati e nei loro cristalli misti l'unità di struttura cristallina conteneva o meno atomi in numero tale da dare formule equivalenti.

L'esistenza accertata di cristalli misti tra molibdati e tungstati di elementi a valenza diversa rendeva oggetto di un nuovo e necessario esame un'altra questione di fondamentale importanza: la struttura dei cristalli misti. Questo problema era stato risolto, per le sostanze isomorfe dotate di formule contenenti lo stesso numero di atomi, con una intuizione veramente geniale fin dal 1904 dal Groth⁽¹⁾. Se, per esempio, nell'edificio cristallino del solfato di potassio supponiamo che un certo numero dei punti materiali occupati da atomi di zolfo vengano ad essere, invece, occupati da atomi di selenio, passeremo ai cristalli misti di K_2SO_4 e K_2SeO_4 . L'ipotesi di Groth fu verificata nel 1917 da L. Vegard e H. Schjelderup⁽²⁾ nella coppia KCl — KBr e confermata, poi, ancora dal Vegard⁽³⁾ stesso nel 1921, nelle altre due coppie KCl — NH_4Cl e K_2SO_4 — $(NH_4)_2SO_4$. È stato, poi, dimostrato da uno di noi⁽⁴⁾ che può applicarsi con successo, tenendo conto dei diametri atomici introdotti da W. L. Bragg⁽⁵⁾, anche in quei casi di isomorfismo, assai importanti, come quello dell'albite e dell'anortite, fra composti aventi formula con uguale numero complessivo di atomi, ma con elementi in parte a valenza diversa. Evidentemente, però, quando si ha a che fare con cristalli misti di composti di elementi vicarianti a valenza diversa, le cose si complicano, perchè non può più parlarsi di una sostituzione atomo ad atomo di quegli elementi. Tale è il caso dell'isomorfismo tra i composti dei metalli alcalino-terrosi e quelli corrispondenti delle terre rare. È da notare che, anche ricorrendo all'artificio di assumere pesi molecolari

(1) *Einleitung in die chemische Krystallographie*. Leipzig, 1904.

(2) *Die Konstitution der Mischkristalle*, «Phys. Zeitsch.», 1917, p. 93.

(3) «Videnskapsselskapets Skrifter I. Mat.-Naturv. Klasse», Kristiania, 1921, n. 6.

(4) F. ZAMBONINI, «Rend. R. Accad. Lincei», 1922, XXXI, 295.

(5) «Philos. Magaz.», 1920 (6^a), XL, 169.

diversi dai più semplici possibili, non si può giungere a formule aventi lo stesso numero di atomi, e riconducibili quindi, in qualche modo, all'esempio ricordato dell'albite e dell'anortite.

Come possiamo immaginarci la struttura dei cristalli misti in questione, per esempio, di CaMoO_4 con $\text{Ce}_2(\text{MoO}_4)_3$? Se i due composti allo stato solido presentassero nell'unità di struttura cristallina pesi *equivalenti*, allora, poichè il numero degli atomi di Mo e di O è, nei due casi, lo stesso, si avrebbe una sostituzione del Ce al Ca per porzioni *equivalenti* di reticoli. Ma, sia in questo caso che nell'altro, meno probabile, che i volumi dei reticoli unitari non sieno equivalenti, non può escludersi un'altra ipotesi, quella, cioè, di una sostituzione per reticoli unitari semplici o a gruppi. Un tale tipo di sostituzione è lungi dall'essere impossibile, per quanto non sia stato, finora, preso nella dovuta considerazione: è da osservare anzi come da parecchi anni, ormai, uno di noi insegna nei suoi corsi, che la struttura in questione segna il passaggio fra i cristalli misti tipici con la struttura di Groth-Vegard ed i cristalli a struttura zonata ovvero anche stratiforme. È evidente, però, che il tipo di struttura dei cristalli misti al quale abbiamo accennato dovrebbe finire col dar luogo, nei röntgenogrammi, a nuovi massimi, assenti in quelli dei costituenti puri. L'esperienza permette, perciò, di risolvere fra le varie ipotesi ⁽¹⁾.

Le indagini röntgenografiche furono eseguite nel settembre dello scorso anno nel Laboratorio di Chimica Generale del R. Politecnico di Milano, mediante il metodo delle polveri di Debye e Scherrer, con gli apparecchi ed i metodi già usati in precedenti ricerche da uno di noi (R. G. Levi). E, precisamente, si adoperò un tubo del tipo di Siegbahn-Hadding con anticatodo di rame, e la camera fotografica di Scherrer, del diametro di 57 mm., con la quale, come è noto, si hanno direttamente i valori in gradi dalla lettura in millimetri dei fotogrammi. Non si sono introdotte le correzioni per il diametro del preparato (1,5 mm.), non rientrando nel compito di queste prime ricerche il calcolo rigoroso dei röntgenogrammi.

Nelle note che seguono riassumeremo brevemente i risultati ottenuti, che sono stati, per ora, limitati ai molibdati di Ca, Sr, Ba, Pb ed a quelli di Ce^{+++} , La, Pr, Nd, Sm ⁽²⁾.

(1) V. M. GOLDSCHMIDT ha studiato, qualche tempo fa, l'influenza che la sostituzione parziale dell'ittrio al calcio esercita sulle dimensioni reticolari della fluorite, ma non ha spinto oltre le sue indagini.

(2) Cenni sui risultati ottenuti furono comunicati da R. G. LEVI in una conferenza tenuta alla Società Chimica di Milano il 21 gennaio 1925, da F. ZAMBONINI nella seduta dell'11 marzo 1925 della sezione di Napoli dell'Associazione Ital. di Chimica Gen. ed Appl.

Chimica. — *Solfati di neodimio e tallio talloso.* Nota del Socio F. ZAMBONINI e del dott. V. CAGLIOTI ⁽¹⁾.

Di recente uno di noi, insieme al dott. G. Carobbi ⁽²⁾, ha fatto conoscere i risultati ottenuti dallo studio di una parte, abbastanza estesa, del sistema $\text{La}_2(\text{SO}_4)_3 - \text{Tl}_2\text{SO}_4 - \text{H}_2\text{O}$ per l'isoterma di 25° ⁽³⁾. In continuazione di quelle ricerche rendiamo noti i risultati ai quali siamo pervenuti col sistema $\text{Nd}_2(\text{SO}_4)_3 - \text{Tl}_2\text{SO}_4 - \text{H}_2\text{O}$, sempre per l'isoterma di 25° .

Il solfato di neodimio adoperato era quello stesso, da considerarsi praticamente come puro, del quale ci siamo serviti per lo studio dei solfati doppi di neodimio e potassio ⁽⁴⁾. Si è operato esattamente come è stato già riferito nei precedenti lavori: quanto ai metodi analitici, abbiamo applicato quelli stessi che ci hanno dato buoni risultati nel sistema $\text{La}_2(\text{SO}_4)_3 - \text{Tl}_2\text{SO}_4 - \text{H}_2\text{O}$ ⁽⁵⁾.

Solfati di didimio e tallio sono stati brevemente descritti, molti anni fa, da Zschiesche ⁽⁶⁾, il quale, mescolando a temperatura ordinaria i due sali, ottenne il composto $\text{Di}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 3\text{Tl}_2\text{SO}_4 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$, mentre per riscaldamento, dalle soluzioni non completamente sature, si separarono dei cristalli di formula $\text{Di}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot \text{Tl}_2\text{SO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$.

I risultati ottenuti per l'isoterma di 25° sono riuniti nella seguente

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Napoli; pervenuto all'Accademia il 9 settembre 1925.

(2) ZAMBONINI e CAROBBI, « Rend. R. Acc. Lincei » (6) 1925, I, 278.

(3) A proposito di questo sistema, va ricordato che, poco prima della pubblicazione delle nostre ricerche, L. Fernandes ha incidentalmente ricordato di avere preparato ed analizzato i due sali $\text{La}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot \text{Tl}_2\text{SO}_4 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ e $\text{La}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 3\text{Tl}_2\text{SO}_4 \cdot \text{H}_2\text{O}$, « Gazzetta chim. ital. » 1924, LIV, 625.

(4) ZAMBONINI e CAGLIOTI, « Rend. R. Acc. Lincei » (5) 1924, XXXIII, 2° sem., 308.

(5) ZAMBONINI e CAROBBI, « Rend. R. Acc. Lincei » (6) 1925, I, 278.

(6) « Journ. für prakt. Chemie », 1869, CVII, 100.

TABELLA I.

Numero dell'esperienza	Composizione della fase liquida				Composizione del corpo di fondo					Costituenti del corpo di fondo
	$\text{Nd}_2(\text{SO}_4)_3$	Tl_2SO_4	H_2O	$\frac{\text{Tl}_2\text{SO}_4}{\text{H}_2\text{O}}$	Nd	Tl	SO_4	H_2O	$\frac{\text{Nd}_2(\text{SO}_4)_3}{\text{Tl}_2\text{SO}_4}$	
1	4.89	0.25	94.86	0.0026	30.54	23.62	36.10	9.74	2.09	$\text{Nd}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$ + I — I — 3
2	4.50	0.25	95.24	0.0027	29.15	27.05	35.40	8.50	1.71	
3	3.84	0.26	95.90	0.0027	25.56	35.80	34.30	5.05	1.16	I — I — 3
4	3.81	0.27	95.92	0.0028	25.40	35.40	34.05	4.93	1.16	
5	3.80	0.27	95.93	0.0028	25.38	35.40	33.90	4.88	1.16	I — I — 8
6	3.78	0.28	95.94	0.0029	23.61	33.27	31.84	11.28	1.15	
7	3.15	0.30	96.55	0.0031	23.68	33.40	31.56	11.36	1.15	I — I — 8
8	1.86	0.45	97.69	0.0046	23.57	33.28	31.78	11.17	1.15	
9	0.76	1.11	98.13	0.0113	24.01	32.94	31.64	11.41	1.18	I — I — 8
10	0.30	3.00	96.70	0.031	23.63	33.40	31.52	11.37	1.15	
11	0.27	3.55	96.18	0.037	23.24	34.93	30.92	10.91	1.076	I — I — 8
12	0.27	3.62	96.21	0.038	17.69	47.44	28.95	5.92	0.60	
13	0.29	3.71	96.00	0.038	15.92	51.70	27.67	4.71	0.50	I — 4½
14	0.29	3.70	96.01	0.0385	15.80	55.64	25.30	3.39	0.46	
15	0.26	3.81	95.92	0.040	11.78	60.49	26.25	1.30	0.32	I — 4½
16	0.26	3.85	95.89	0.040	10.42	64.26	25.10	0.38	0.26	
17	0.24	4.10	95.66	0.043	10.22	64.20	25.47	0.25	0.26	I — 4½
18	0.19	4.70	95.11	0.050	10.32	64.01	25.40	0.27	0.26	
19	0.16	4.83	95.01	0.051	8.24	67.98	23.45	0.28	0.19	I — 4½
20	0.11	4.90	94.99	0.051	7.86	68.20	23.74	0.20	0.186	
21	0.10	5.00	94.90	0.052	7.32	68.53	24.82	0.33	0.17	+ Tl_2SO_4
22	0.09	5.02	94.89	0.052	7.21	68.54	24.21	0.36	0.17	

Composizione teorica dei composti ottenuti:

	Nd	Tl	SO ₄	H ₂ O
Nd ₂ (SO ₄) ₃ · Tl ₂ SO ₄ · 3H ₂ O .	25.42	35.95	33.86	4.76
Nd ₂ (SO ₄) ₃ · Tl ₂ SO ₄ · 8H ₂ O .	23.56	33.30	31.37	11.76
Nd ₂ (SO ₄) ₃ · 4½Tl ₂ SO ₄ . . .	10.14	64.53	25.53	—

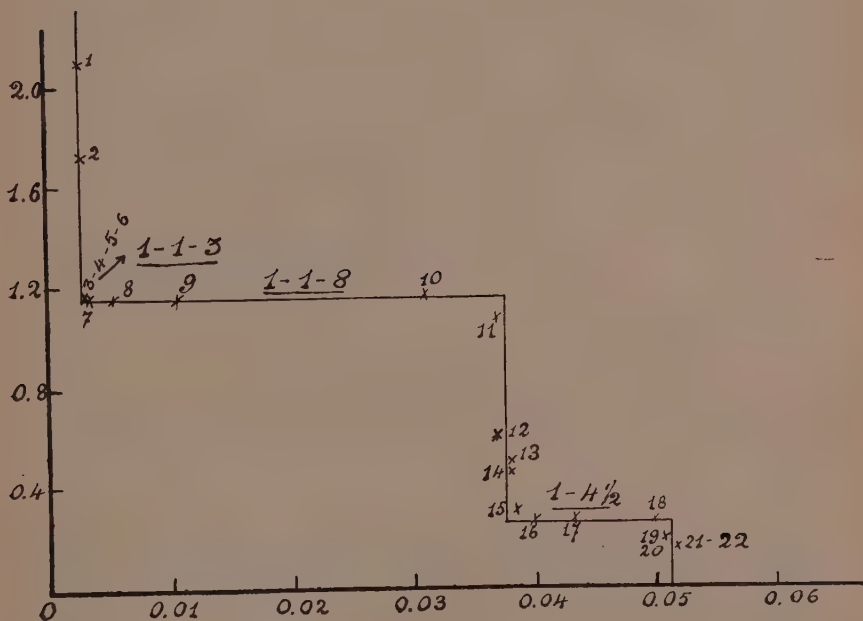
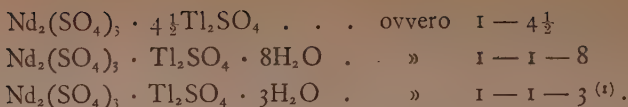


Fig. 1.

Nella fig. 1 sono rappresentati, con lo stesso metodo già adoperato negli altri nostri lavori sull'argomento, i risultati della Tabella I: sulle ordinate si trovano riportati i rapporti $\frac{\text{Nd}_2(\text{SO}_4)_3}{\text{Tl}_2\text{SO}_4}$ determinati nei corpi di rondo, e sulle ascisse, invece, quelli $\frac{\text{Tl}_2\text{SO}_4}{\text{H}_2\text{O}}$ delle fasi liquide. I composti formati sono i seguenti:



Di questi, il primo è stato ottenuto da Zambonini e Carobbi per il lantanio, nel quale elemento, però, il solfato $1-1$ cristallizza, nelle esperienze eseguite a 25° , con $2\text{H}_2\text{O}$. Nel lantanio si è anche osservato un composto $1-3 \text{La}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 3\text{Tl}_2\text{SO}_4$, che non si è formato nel sistema $\text{Nd}_2(\text{SO}_4)_3 - \text{Tl}_2\text{SO}_4 - \text{H}_2\text{O}$.

Inoltre, mentre nel sistema col lantanio il campo di esistenza più esteso spetta al composto $1-4\frac{1}{2}$, nel caso attuale dei solfati di neodimio-tallio, compete agli idrati del sale doppio $1-1$.

Non si è formato, nelle nostre condizioni sperimentali, nessuno dei due solfati doppi di didimio e tallio descritti da Zschiesche. Invece, si sono trovati, negli studi recenti sui solfati doppi di lantanio e tallio, $1-1-2$ da Zambonini e Carobbi, $1-3$ anidro, da questi autori, monoidrato dal Fernandes. Non è improbabile che il didimio usato dallo Zschiesche fosse lantanifero, e che a questo fatto sia dovuta la formazione di quei composti che noi non abbiamo ottenuto col neodimio privo di lantanio.

Daremo, ora, alcuni brevi cenni sui composti preparati.

Il solfato doppio $\text{Nd}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot \text{Tl}_2\text{SO}_4 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$, puro, è in equilibrio a 25° , con soluzioni contenenti 3.8% di solfato di neodimio e $0.26-0.27\%$ di solfato talloso. È pressochè impossibile ottenerlo completamente puro: al microscopio abbiamo sempre osservato qualche cristallino o del solfato ottoidrato $\text{Nd}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$ o del sale doppio $1-1-8$. Il composto $1-1-3$ si presenta sotto forma di minuti cristallini a dimensioni piuttosto uniformi, di colore violaceo pallido. Al microscopio appaiono pressochè incolori. Sono allungati secondo una direzione, che è costantemente positiva: la loro birifrangenza è molto bassa, il che dà luogo, talvolta, a colori anormali di interferenza, e rende, di solito, incerta ed incompleta la estinzione. Una direzione di massima estinzione, positiva, forma un angolo di circa $12^\circ-14^\circ$ con quella di allungamento, sulla faccia mediante la quale i cristalli si presentano generalmente appoggiati. A 130° si elimina il 3.49% H_2O , ossia 2 molecole (3.18% calc.): il resto va via quasi completamente a 200° , e solo per le ultime tracce occorre una temperatura più elevata.

(1) Non abbiamo trascurato di assicurarci che questo composto contenesse proprio tre molecole di acqua di cristallizzazione, anzichè due soltanto, come nel solfato di lantanio e tallio talloso $1-1-2$. Ma per la formula $1-1-2$ si richiede $\text{Nd}=25.84$ $\text{Tl}=36.53$ $\text{SO}_4=34.41$ $\text{H}_2\text{O}=3.22$, ed i risultati analitici risolvono subito il dubbio in favore della formula $1-1-3$, tanto più che i solfati di neodimio e tallio si asciugano facilmente e perfettamente, ed anche per gli idrati più ricchi non si rinviene mai acqua in eccesso su quella domandata dalla teoria.

Il sale doppio $1-1-8$ ($\text{Nd}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot \text{Ti}_2\text{SO}_4 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$) puro è in equilibrio con soluzioni contenenti da 3.78 a 0.30 % $\text{Nd}_2(\text{SO}_4)_3$ e da 0.28 a 3.00 % Ti_2SO_4 : ha, perciò, come abbiamo già veduto, un campo di esistenza molto esteso. Cristallizza facilmente in nitidi cristallini violacei, molto splendenti, che si ottengono anche lasciando evaporare lentamente delle soluzioni dei due solfati. In quest'ultimo caso, i cristalli raggiungono anche 1 mm. nella loro maggiore dimensione. Il composto $\text{Nd}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot \text{Ti}_2\text{SO}_4 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$ è isomorfo con i solfati doppi $\text{X}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot (\text{NH}_4)_2\text{SO}_4 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$ o, più semplicemente, $(\text{NH}_4)\text{X}(\text{SO}_4)_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ nei quali $\text{X} = \text{La}, \text{Ce}, \text{Di}$, noti da lungo tempo, descritti cristallograficamente da Marignac⁽¹⁾, da Morton⁽²⁾, da Wyruboff⁽³⁾ e da Kraus⁽⁴⁾. Questi composti sono monoclini prismatici, precisamente come quello del quale ci stiamo occupando. I cristalli di $\text{Nd}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot \text{Ti}_2\text{SO}_4 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$ hanno habitus prismatico; ora sono piuttosto allungati nella direzione dell'asse verticale, ora, invece, piuttosto tozzi. Adottando la stessa orientazione già in uso per i solfati doppi con l'ammonio su elencati, si ha che i nostri cristalli presentano le forme $a\{100\}$, $m\{110\}$, un prisma $\{hko\}$ con $h > k, q\{011\}$, $k\{012\}$.

Le faccie delle due zone $[001]$ e $[100]$ sono striate parallelamente al rispettivo asse di zona. Le misure sono poco esatte ed oscillanti, come ebbero già ad osservare Marignac e Wyruboff nei cristalli dei composti da loro studiati. I pochi angoli misurati concordano con i valori dati dal Morton per il composto $\text{NH}_4 \cdot \text{Di}(\text{SO}_4)_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$:

$\text{Ti Nd}(\text{SO}_4)_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$	$\text{NH}_4 \text{Di}(\text{SO}_4)_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$
$(010):(110) = 71^\circ 36', 71^\circ 51', 71^\circ 58'$	$71^\circ 13'$
$(010):(011) = 48^\circ 34', 48^\circ 36'$	$47^\circ 45'$
$(011):(012) = 17^\circ 48'$	$17^\circ 34'$

È notevole, che il pinacoide $a\{100\}$ è sovente sostituito da due faccie, spesso piane e splendenti, di un prisma $\{hko\}$, le faccie del quale formano con la più prossima di $\{010\}$ angoli di circa 84° . Una buona misura di $(hko):(h\bar{k}o)$ ha dato $11^\circ 6'$: si tratta, perciò, probabilmente, del prisma $\{410\}$, osservato da Marignac nel solfato di lantanio-ammonio $1-1-8$, per il quale si calcola, in base alle costanti di Kraus, $(410):(4\bar{1}0) = 9^\circ 56'$. Nei solfati doppi dei lantanidi con l'ammonio sono, appunto, ben note e frequenti le faccie vicinali, ed altrettanto si ripete in quei solfati doppi corrispondenti, nei quali il tallio sostituisce l'ammonio.

(1) *Œuvres compl.*, I, 393. Solfati doppi di lantanio e di didimio con l'ammonio.

(2) «*Ofv. Vetensk. Akad. Handl. Stockholm*» 1885, VI, 189. Sale doppio di didimio e ammonio.

(3) «*Bull. Soc. Franç. Min.*» 1891, XIV, 84. Sale doppio di cerio e ammonio.

(4) «*Zeitsch. für Kryst.*» 1901, XXXIV, 419. Solfati doppi di lantanio-ammonio e di cerio-ammonio.

Nei cristalli più grandi, la zona $[001]$ è, generalmente, dominante, ma in quelli microscopici sono frequenti i cristalli nei quali la zona $[100]$ si avvantaggia, tanto che essi si osservano sovente poggiati su una faccia del prisma $\{011\}$.

Il peso specifico è risultato uguale a 3,61.

A 130° si ha una perdita di peso uguale a 8,63 %, corrispondente perciò, a $6\text{H}_2\text{O}$ (8,82 % calc.): il resto dell'acqua si elimina a 200° .

Finalmente, il composto puro $\text{Nd}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 4\frac{1}{2}\text{Tl}_2\text{SO}_4$ è stabile in contatto di soluzioni contenenti da 0,26 % a 0,19 % $\text{Nd}_2(\text{SO}_4)_3$ e da 3,85 % a 4,70 % Tl_2SO_4 .

È una polvere cristallina di colore rosso violaceo chiaro, che al microscopio risulta composta da minute tavolette a contorno esagonale, come quelle del solfato doppio $\text{La}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 4\frac{1}{2}\text{Tl}_2\text{SO}_4$, descritto da Zambonini e Carobbi. In alcune laminucce un poco più spesse, si è potuto osservare che esse sono otticamente uniassiche, negative. Con la lamina di gesso in luce parallela si vede, però, che alcune delle lamine non sono rigorosamente uniassiche, dimodochè potrebbe darsi che il composto in questione sia pseudoesagonale (o trigonare), ma potrebbe anche trattarsi di anomalie ottiche.

Biologia. — *Figure illustrative in aggiunta alle diverse comunicazioni.* Nota del Socio L. A. HERRERA ⁽¹⁾.

Fig. 1. Frammento di grosso blastomero di trota. Il nucleo sta per dividersi. La membrana è sparita davanti ai centrosomi circondati dalla sfera attrattiva e l'astro. (Secondo Hennegin).

Fig. 2 e 2'. Imitazione della divisione cellulare. Collodio ed azzurro oltremare, aspirazione bipolare con una pompa. Grandezza naturale. Una goccia di acqua al centro. Corrisponde alla Nota: *Sull'imitazione della struttura del protoplasma e della divisione cellulare* ⁽²⁾.

Fig. 3 e 3'. Corrisponde alla Nota: *Presentazione di micro-fotografie che mostrano figure di cariocinesi in cristalli di metaformaldeide* ⁽³⁾.

(1) Lavoro eseguito nei laboratori della Direzione degli Studi biologici di Messico.

(2) Questi « Rendiconti », ser. 5^a, vol. XXXIII, 1^o, p. 101 (1924).

(3) Questi « Rendiconti », ser. 6^a, vol. I, p. 364 (1925).

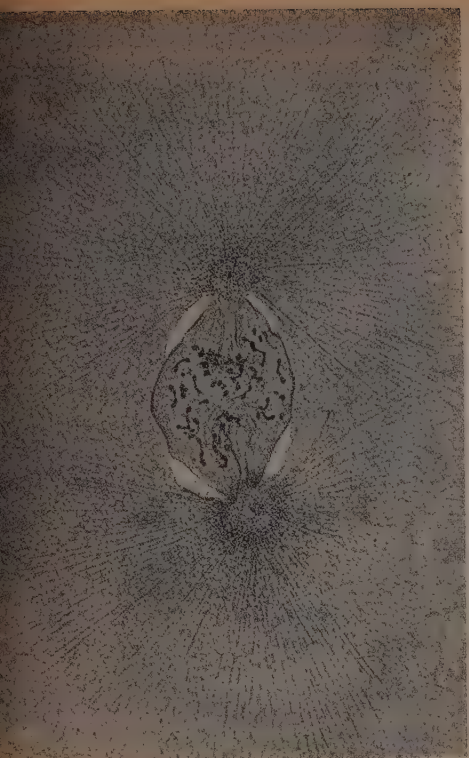


Fig. 1.



Fig. 2'.



Fig. 2.

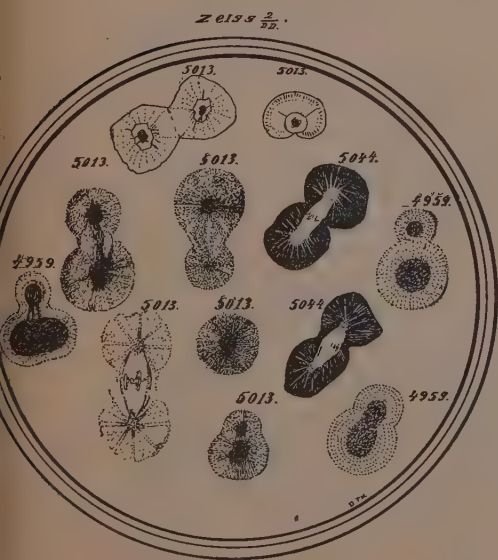


Fig. 3'.



Fig. 3.

Biologia. — *Accrescimento autonomo per movimento ameboide di frammenti di neuriti separati dal centro trofico.* Nota del Corresp. GIUSEPPE LEVI.

Mi sono proposto di studiare quali conseguenze determinino nei neuriti cresciuti in vitro delle lesioni meccaniche. Col micromanipolatore di Peterfi, costruito dalla Casa Zeiss, è possibile di eseguire senza grandi difficoltà queste delicatissime operazioni su strutture così tenui, quali i neuriti cresciuti in plasma da espianti di embrioni di pollo.

Venivano preparati colla consueta tecnica frammenti di mesencefalo o di rombencefalo di embrioni fra il 5° e l'8° giorno; da espianti a questo stadio di sviluppo si ottiene quasi sempre l'accrescimento di neuriti distinti, i quali solamente in un secondo tempo possono talora anastomizzarsi; mentre che in colture ottenute da embrioni fra il 3° e il 5° giorno, il coagulo è invaso da una rete intricata di fibre; questa differenza fu di già posta in luce dalle mie ricerche pubblicate nel 1917.

È indispensabile che lo strato di plasma sia quanto più possibile sottile e conviene diluirlo con una certa quantità di liquido di Locke; se il coagulo è spesso e denso offre una notevole resistenza all'ago di vetro; allora le fibre vengono stirate ma non recise.

D'altro canto una diluizione troppo grande del plasma non permette l'accrescimento delle fibre; dimodochè occorre saggiare per tentativi la tecnica adeguata alla preparazione di colture utilizzabili per queste ricerche.

Già 20 ore dopo la preparazione della coltura numerose fibre sono cresciute nel coagulo; allora toglievo il vetrino al quale aderisce la coltura, e la fissavo alla camera umida del micromanipolatore.

Eseguita l'operazione, il vetrino veniva fissato per una seconda volta al portaoggetto ad incavo, studiato per varie ore al microscopio mantenuto alla temperatura di 37°-39°; le osservazioni furono eseguite coll'obbiettivo ad immersione 1/7 Koristka oppure coll'obb. Imm. 3 mm. Zeiss, e coll'Or. Comp. 8 Zeiss.

Se le fibre cresciute nel coagulo furono violentemente strappate dall'ago di vetro del micromanipolatore ed anche se furono sottoposte ad una trazione lenta, ma elevata, esse divengono varicose e si alterano rapidamente. Ma se si sorveglia l'operazione a forte ingrandimento e se si adoperano aghi molto sottili, non è difficile di dirigere l'ago di vetro verso una determinata fibra e di comprimerla fino a reciderla; da quel punto si diffonde per breve tratto una sostanza finissimamente granulosa, la quale nel primo istante ha la refrangenza caratteristica della sostanza neurofibrillare.

Abbassato l'ago di vetro si distinguono i due estremi del moncone centrale e del periferico della fibra recisa; talora l'uno e l'altro si presentano alquanto rigonfi, ma ciò non è norma costante.

Di solito si allontanano l'uno dall'altro, ma possono anche rimanere quasi a contatto.

Consideriamo dapprima il destino del moncone periferico della fibra, il quale, contrariamente a quanto si potrebbe supporre, non presenta alterazioni. Nel momento in cui la fibra viene recisa avviene sovente una tumultuaria emissione, lungo tutto il tragitto del tratto periferico della fibra, di finissimi filamenti, i quali vengono immediatamente retratti. Io stesso ho constatato che l'emissione di filamenti è un fenomeno costante durante l'accrescimento normale, ma esso è molto meno intenso che in questo caso; il ben noto fiocchetto terminale della fibra non solamente non scompare nella grande maggioranza dei casi, ma persiste per molto tempo dopo l'operazione. Ed il movimento ameboide di questa estremità, che ha caratteri tanto variabili (vedi la mia pubblicazione del 1917), continua ad essere altrettanto vivace che nelle fibre integre; avviene alternativamente con grande rapidità un'emissione ed una retrazione di delicati filamenti, e, come nelle fibre integre, uno dei filamenti acquista uno sviluppo prevalente, diviene la continuazione della fibra ed emette nuovi filamenti; così la zona di maggiore attività si sposta ed il neurite cresce in lunghezza senza diminuire affatto di spessore.

Ma quest'accrescimento si produce non solamente per opera dell'estremo distale della fibra, bensì talora anche per l'attività del suo estremo prossimale.

Infatti ho constatato, che qualche tempo dopo l'operazione l'estremità prossimale, la quale talora è un po' rigonfia, ma può anche non esserlo, incomincia ad emettere dei tenui e pallidi filamenti che vengono subito retratti; infine anche in quel punto si manifesta un'attività ameboide, che nelle linee generali è analoga a quella che caratterizza l'estremo libero delle fibre integre; la sua espressione strutturale è molto varia. Il quadro che ho riscontrato con maggiore frequenza è il seguente: dapprima l'estremo della fibra recisa si rigonfia a sfera ed assume una forma irregolare; si osserva un'emissione ed una retrazione di gemme, che hanno l'opacità caratteristica della sostanza neurofibrillare; più tardi da questa parte rigonfia si diparte un esilissimo filamento il quale si divide ed in seguito si suddivide; questi tenui rami sono poi retratti ed altri ne sono emessi; si costituisce così un ciuffo di filamenti di esistenza transitoria, simile a quello che esiste costantemente all'estremo distale della fibra. Però l'attività ameboide dell'estremo prossimale del segmento isolato non è fenomeno costante; in molti casi quest'estremo rimane inattivo durante tutto il periodo di sopravvivenza del frammento; ritengo che tali differenze dipendano dalle modalità con cui la fibra fu tagliata.

In qualche caso ho visto formarsi dei brevi rami collaterali da tali frammenti di fibre isolati dal centro trofico.

Ho determinato la velocità di accrescimento di questi frammenti, ed ho potuto stabilire, che, almeno durante le prime ore dopo l'operazione, la velocità non è di molto inferiore a quella delle fibre integre; in 15 min. coprono una distanza di 7μ (alla temperatura di 37°); periodi di accrescimento si alternano con periodi di sosta, come del resto avviene nelle fibre integre. Dopo le prime ore i movimenti ameboidi delle due estremità si fanno meno vivaci ed anche l'accrescimento in lunghezza diviene più lento, finchè si arresta del tutto.

Ho voluto precisare a quale distanza di tempo cessano le manifestazioni di attività dei frammenti di fibra isolati; in alcuni casi in cui l'operazione era ben riuscita la fibra si manteneva integra sin ad 8 ore dopo. Altre volte i fenomeni regressivi si iniziavano molto prima, sino a 4-5 ore dopo il taglio.

Le alterazioni che incominciano a comparire a lungo andare in queste condizioni dipendono certamente dalla cessata influenza trofica del neuroblasta e non da fattori contingenti; infatti in alcuni casi le fibre contigue integre rimanevano attive e terminavano con tipici ciuffi di filamenti. Però è possibile che l'essere più o meno precoce la regressione del neurite dipenda, più che dalla mancata influenza del centro trofico, dalla varia intensità del trauma a cui fu sottoposto.

E non è da escludere che, con una tecnica più perfetta di quella da me seguita, si arrivi a dimostrare un più lungo periodo di sopravvivenza di fibre separate dai relativi neuroblasti.

Ho inoltre cercato di stabilire se vi è una correlazione fra la lunghezza del tratto di neurite isolato e la durata del periodo di sopravvivenza; ma la variabilità di questo periodo caso per caso non mi ha permesso di arrivare a risultati soddisfacenti.

Certamente tratti anche brevissimi di fibra isolati si manifestano attivi; ed in un caso un tratto di fibra di appena 0,1 mm. di lunghezza perdurò attivo per 8 ore. Rimane ancora da stabilire se tratti più lunghi sopravvivono per un tempo maggiore.

Il quadro strutturale del processo regressivo nel segmento di neurite isolato non ha niente di caratteristico; come nei neuriti che regrediscono spontaneamente, di solito al 3°-4° giorno di vita della coltura, l'arresto nel movimento ameboide è segnato per lo più dal rigonfiarsi a bottone dell'estremo distale della fibra, ma altre volte questo rimane affilato; sul tragitto della fibra appaiono delle varicosità, talora ancor prima della cessazione di attività dell'estremo distale; queste varicosità crescono di numero e di grandezza e la fibra prende il ben noto aspetto a rosario.

Consideriamo le trasformazioni del moncone centrale di neurite tagliato; se l'operazione fu eseguita con molta cautela i due monconi rimangono a

contatto, ed allora in un periodo di tempo relativamente breve si ristabilisce la continuità materiale fra di essi, per attività ameboide dei due estremi tagliati. La rapidità con cui questo fenomeno avviene, quando la fibra fu recisa con aghi sottilissimi, è veramente sorprendente. In un caso ho visto ristabilirsi la continuità in circa 6 minuti; ed in tal caso le modificazioni dei due monconi sono tanto lievi, che riescono quasi inapprezzabili; i due monconi si rigonfiano alquanto, emettono piccole lobulazioni, le quali si incontrano; per qualche tempo rimane un tratto sottile a congiungere i due rigonfiamenti; poi anche questi scompaiono, e della minuscola operazione non rimane più traccia visibile.

Ma l'eventualità più frequente è che i due monconi restino separati da un intervallo più o meno grande, ed allora l'estremità libera del moncone prossimale va incontro a trasformazioni più vistose di quelle di cui fu fatto parola poco fa; emette un fiocchetto di filuzzi identico a quello che caratterizza l'estremità libera di una fibra in via di accrescimento, cresce in lunghezza e procede in direzione distale. Avviene adunque una rigenerazione *in vitro* della fibra tagliata, il che era stato del resto dimostrato da vari anni dalle ricerche di Ingebritsen, per quanto non ne fossero stati illustrati i particolari.

Può accadere che l'estremità libera del moncone prossimale incontri l'estremo prossimale del moncone periferico e si saldi ad esso; in tal caso si ottiene la *restitutio ad integrum* della fibra nervosa, altrettanto perfetta che nell'esperienza poco fa ricordata.

Alla riunione dei due monconi partecipano caso per caso in grado diverso il moncone prossimale od il distale della fibra. Talora è attivo solamente l'estremo del tratto periferico della fibra, altre volte solamente l'estremità recisa del moncone centrale.

La dimostrazione da me data della persistenza per un periodo di tempo relativamente lungo dell'attività ameboide di un tratto di fibra isolato dal centro trofico, pone secondo il mio avviso sotto una luce nuova il processo di accrescimento dei neuriti.

Si potrebbe supporre che questo processo dipendesse da un flusso di sostanza, il quale procede di continuo dal neuroblasta verso l'estremità libera. Risulta invece che la connessione col neuroblasta non è indispensabile all'estrinsecazione del movimento ameboide del fiocchetto terminale.

La persistenza di manifestazioni vitali in frammenti di protoplasma isolati non è un reperto del tutto nuovo; fu già constatato, ad es., che il movimento di flagelli, separati dalla cellula a cui appartengono, può continuare per qualche tempo.

Ma poichè i frammenti di neuriti si allungano senza assottigliarsi in misura apprezzabile, dobbiamo ammettere, che la sostanza vivente da cui sono costituiti non solamente sopravvive, ma si accresce in misura presso a poco eguale che nei neuriti che sono in continuità materiale coi neuroblasti rispettivi.

Non conosco altri esempi di accrescimento autonomo di frammenti anucleati di protoplasma di Metazoi. Che questa proprietà sia una prerogativa del protoplasma del neurone, si spiega riflettendo, che i singoli neuroni in via di differenziazione crescono enormemente di volume, mentre che l'aumento di volume delle altre cellule è sempre molto limitato.

Ma sino ad oggi l'incremento di volume del neurone era considerato come l'espressione morfologica della predominanza dei processi anabolici sui catabolici del neuroblasta, cioè della parte nucleata del neurone; le presenti ricerche dimostrano, che tutto il protoplasma del neurone è dotato della proprietà di accrescersi, e che tale proprietà si manifesta anche se dei frammenti del neurite vengono artificialmente separati dal neuroblasta.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra un nuovo metodo di studio delle equazioni differenziali lineari.* Nota⁽¹⁾ del dott. GABRIELE MAMMANA presentata dal Socio L. BIANCHI.

In una breve memoria, in corso di pubblicazione, nel fare lo studio delle equazioni differenziali del secondo ordine lineari ed omogenee, mi valgo di un nuovo metodo, notevole, a mio avviso, soprattutto perchè suscettibile di essere applicato con successo, convenientemente generalizzato, allo studio completo, di equazioni differenziali lineari di ordine superiore al secondo.

Grazie a tale metodo, pervengo, in modo assai semplice e breve, alle note proprietà degli integrali delle equazioni dette (teoremi di oscillazione, sugli autovalori ecc.), e riesco a raggiungere un nuovo importante risultato che stabilisce un legame fra i teoremi di oscillazione, relativi ad una equazione del secondo ordine omogenea i cui coefficienti dipendono da parametri, e quelli sugli autovalori; legame che, come verrà brevemente detto in seguito, permette, ad esempio, di stabilire l'esistenza di infiniti autovalori relativi alla equazione di tipo normale

$$\frac{d}{dx} \theta \frac{dy}{dx} + (\lambda A + \beta) y = 0 \quad /$$

e alle condizioni ai limiti, $y(a) = y(b) = 0$, comunque si prendano le funzioni $A(x)$, e $\beta(x)$, continue in un intervallo (a, b) .

(1) Pervenuta all'Accademia il 17 agosto 1925.

Scopo principale, però, della detta memoria è quello di dare un saggio del metodo che sto per seguire nello studio delle equazioni lineari di ordine superiore al secondo, ai cui integrali si impongano condizioni di tipo lineare.

I. Daremo ora un cenno brevissimo del menzionato metodo; e dei risultati raggiunti nella memoria stessa.

Si porrà per definizione:

$$\begin{aligned} L(f) &\equiv \frac{d^n f}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1} \frac{df}{dx} + p_n f = \\ &= (D^{(n)} + p_1 D^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} D^{(1)} + p_n D^{(0)}) f \equiv O^{(n)} \cdot f \end{aligned}$$

dove le p_i rappresentano funzioni continue di x definite in un intervallo (a, b) , ed f è simbolo di funzione derivabile. Al simbolo $O^{(n)}$ daremo il nome di operatore differenziale lineare di ordine n .

Gli operatori del primo ordine, che sono quelli che più interessano, saranno della forma $O^{(1)} \equiv (D^{(1)} + p_1 D^{(0)})$; essi, come del resto quelli di ordine qualsiasi, sono suscettibili di composizione.

Si definirà prodotto di due operatori del primo ordine $O_1^{(1)} \equiv (D^{(1)} + \alpha D^{(0)})$, e $O_2^{(1)} \equiv (D^{(1)} + \beta D^{(0)})$, nell'ordine $O_1^{(1)} \cdot O_2^{(1)}$, l'operatore del secondo ordine $O^{(2)}$ seguente:

$$O^{(2)} = O_1^{(1)} \cdot O_2^{(1)} \equiv (D^{(2)} + \{\alpha + \beta\} D^{(1)} + \{\beta' + \alpha\beta\} D^{(0)})$$

il quale si ottiene con questa regola: nell'operatore $O_2^{(1)}$ si pensino per un momento $D^{(1)}$ e $D^{(0)}$ come simboli di funzione, e a $O_2^{(1)}$, pensata così come funzione composta per mezzo di $D^{(1)}$, β , $D^{(0)}$, si applichi l'operatore $O_1^{(1)}$ avendo cura poi di porre $\frac{dD^{(1)}}{dx} = D^{(2)}$ e $\frac{dD^{(0)}}{dx} = D^{(1)}$.

Il prodotto di due operatori non è, in generale, evidentemente, commutativo.

Adottando gli operatori, la più generale equazione differenziale del secondo ordine omogenea, $\chi'' + p\chi' + q\chi = 0$ si potrà rappresentare come segue:

$$(1) \quad O^{(2)} \chi \equiv (D^{(2)} + p D^{(1)} + q D^{(0)}) \chi = 0.$$

Decomporre il primo membro di una equazione come la (1), nel prodotto di due fattori simbolici del primo ordine, significherà costruire due operatori del primo ordine $O_1^{(1)} \equiv (D^{(1)} + \alpha D^{(0)})$, e $O_2^{(1)} \equiv (D^{(1)} + \beta D^{(0)})$, tali da avere identicamente:

$$O^{(2)} \chi = (O_1^{(1)} \cdot O_2^{(1)}) \chi = O_1^{(1)} (O_2^{(1)} \chi),$$

ciò che importa la ricerca di due funzioni α e β soddisfacenti al sistema seguente:

$$\alpha + \beta = p \quad ; \quad \beta' + \alpha\beta = q.$$

Se p e q sono funzioni reali, si dimostra che la decomposizione in fattori simbolici come $O_1^{(1)}$ e $O_2^{(1)}$ con α e β funzioni continue e reali ⁽¹⁾ non è sempre possibile, più precisamente sussiste il seguente:

TEOREMA: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè sia possibile decomporre il primo membro della (1), in un prodotto di due fattori simbolici del primo ordine reali, è che esista un integrale di (1) che non si annulli mai in tutto l'intervallo di definizione (a, b) dei coefficienti p e q , o ciò che fa lo stesso, ogni integrale di (1) nullo in a , non sia più ulteriormente nullo in (a, b) ⁽²⁾.*

Ove però si tolga la restrizione relativa alla realtà delle funzioni α e β , ferma però restando l'altra, che cioè in tutto (a, b) esse si conservino continue (e però limitate), la decomposizione in parola è sempre possibile ed in infiniti modi. Si ha al riguardo il

TEOREMA: *È sempre possibile, ed in infiniti modi, decomporre il primo membro della (1) nel prodotto di due fattori simbolici del primo ordine, in generale complessi.*

Quanto alle funzioni α e β che figurano nei medesimi fattori di decomposizione, c'è da aggiungere quanto segue: esse sono determinate da una equazione di Riccati, e quindi a meno di una costante arbitraria, ed inoltre, quando di esse siano state fissate le parti reali, i rispettivi coefficienti dell'immaginario, che devono riescire uguali e contrarii, restano determinati.

II. L'introduzione degli operatori differenziali, e la enunciata possibilità di decomposizione del primo membro di una equazione del secondo ordine nel prodotto di due fattori simbolici del primo ordine, dà modo di rappresentare la più generale equazione del secondo ordine lineare e omogenea a coefficienti reali, sotto la forma seguente:

$$(2) \quad L(\chi) \equiv (D^{(1)} + \alpha D^{(0)}) (D^{(1)} + \beta D^{(0)}) \chi = 0$$

(1) Due fattori simbolici come $O_1^{(1)}$, $O_2^{(1)}$ ecc. si diranno, per brevità, reali se α e β sono reali, e complessi se tali sono α e β .

(2) Per maggiore precisione è bene porre in rilievo che il teorema vale pel caso che α e β si intendano finite e continue in tutto (a, b) (estremi inclusi), che diversamente con funzioni α e β dotate di singolarità, la decomposizione del primo membro di (1) in fattori reali è sempre possibile.

dove α e β sono continue in tutto un intervallo (a, b) , e in generale complesse, e della forma:

$$(2') \quad \alpha = v(x) - ih(x) ; \quad \beta = u(x) + ih(x)$$

essendo anche $h = ce^{\int_a^x (u-v) dx} = c\rho(x)$, con c costante.

Dalla (2) segue:

$$L(\chi) = (D^{(1)} + \alpha D^{(0)}) \left(\frac{d\chi}{dx} + \beta\chi \right) = 0$$

da cui si deduce che ogni soluzione $\bar{\chi}$ della equazione del primo ordine

$\frac{d\chi}{dx} + \beta\chi = 0$ è integrale della (2). Ora si ha per le (2'):

$$\bar{\chi} = \bar{c}e^{-\int_a^x \beta dx} = \bar{c}e^{-\int_a^x u dx} \cdot e^{-ic \int_a^x \rho dx}$$

e ove si ponga:

$$-\int_a^x u dx = \eta \quad \text{e} \quad \int_a^x \rho dx = \xi$$

anche:

$$\bar{\chi} = \bar{c}e^{\eta} e^{-ic\xi} = \bar{c}e^{\eta} (\cos c\xi - i \sin c\xi).$$

Ove è da notare che ξ è funzione crescente di x in tutto (a, b) e nulla in a . Ora, basta notare che $L(\chi)$, in fondo, è una espressione differenziale lineare a coefficienti reali per poter concludere che le funzioni $e^{\eta} \cos c\xi$ ed $e^{\eta} \sin c\xi$ sono due integrali di (2), evidentemente indipendenti; per l'integrale generale di (2) stessa, si avrà quindi

$$(3') \quad \chi = e^{\eta} (c_1 \cos c\xi + c_2 \sin c\xi); \quad c_1 \text{ e } c_2 \text{ essendo costanti arbitrarie.}$$

Con opportune posizioni, alla (3') si può dare una delle due forme:

$$(3) \quad \chi = ke^{\eta} \sin c(\xi - \gamma); \quad \text{oppure} \quad \chi = k_1 \cos c(\xi - \gamma_1).$$

Ogni integrale di (2), si ottiene da (3), fissando un sistema di valori per le costanti k e γ (k_1 e γ_1)⁽¹⁾.

La forma notevole (3) data alla soluzione generale di una equazione del secondo ordine, dà ragione del comportamento speciale della stessa solu-

(1) Per γ e γ_1 ci si può limitare a considerare valori contenuti rispettivamente negli intervalli $\left(0, \pi\right)$; $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Per ottenere dalle (3) due integrali indipendenti occorre e basta scegliere per γ o γ_1 due valori diversi contenuti nei rispettivi detti intervalli.

zione per quel che riguarda, ad esempio, il suo carattere oscillatorio, l'esistenza di autovalori ecc.; qui però non ci fermeremo a fare una analisi minuta della cosa, diremo solo di un importante nuovo risultato che la (3) permette di raggiungere, e del quale fu fatto cenno in principio della presente.

Dalla (3) si ricava che un integrale χ_1 di (2), nullo in a , è rappresentato dalla formula:

$$\chi_1 = ke^n \sin c\xi.$$

Si supponga che i coefficienti della (2), dipendano in modo continuo da parametri, per esempio da un parametro; l'argomento $c\xi(x)$ riuscirà, allora, anche esso funzione continua del medesimo; si supponga inoltre che al variare di tale parametro, secondo un fissato ordinamento (per esempio col crescere di esso) il numero degli zeri di χ_1 , che cadono nell'intervallo (a, b) cresca indefinitamente, crescerà di conseguenza indefinitamente $c\xi(b) - c\xi(a) = c\xi(b)$ (ricordiamo che $c\xi(x)$ è funzione crescente di x); d'altra parte l'argomento $c\xi(b)$ è funzione continua del parametro, esso, dunque, col crescere del medesimo, crescerà passando pei multipli interi di π ; esisteranno cioè infiniti valori del parametro (autovalori) per cui l'integrale χ_1 , nullo in a , si annulla pure in b . Esprimeremo tale risultato semplicemente come segue:

A un teorema di oscillazione, relativo ad una equazione omogenea del secondo ordine, è sempre associato un altro teorema che ne stabilisce l'esistenza di infiniti autovalori.

Applichiamo questo risultato alla equazione del tipo

$$\frac{d}{dx} \theta \frac{dy}{dx} + (\lambda A + \beta(x)) y = 0 \quad (\text{con } \theta(x) > 0 \text{ in } (a, b))$$

nel quale il coefficiente di y dipende linearmente da λ .

Per tale equazione è noto quanto segue:

Se la funzione $A(x)$ ha dei tratti positivi (negativi) col divergere di λ positivamente (negativamente) il numero degli zeri di una sua soluzione cresce indefinitamente. Per quanto riguarda poi gli autovalori, finora, si è solo stabilita l'esistenza di infiniti di essi, nei soli due seguenti casi:

- I. $A(x)$ di segno costante in tutto (a, b) , e $\beta(x)$ qualunque.
- II. $A(x)$ qualunque, $\beta(x) < 0$ in tutto (a, b) .

Il risultato sopra stabilito ci consente di togliere la forte restrizione relativa alla funzione $\beta(x)$, ed enunciare in tutta la sua generalità il seguente

TEOREMA: *Esiste una infinità numerabile di autovalori λ reali, relativi alla equazione differenziale $\frac{d}{dx} \theta \frac{dy}{dx} + (\lambda A + \beta) y = 0$ e alle condizioni ai limiti $y(a) = y(b) = 0$, comunque si prendano le funzioni $A(x)$ e $\beta(x)$ continue.*

Fisica. — *Intorno ad una deviazione della legge di Poiseuille.*
Nota⁽¹⁾ di B. MARZETTI presentata del Socio G. BRUNI⁽²⁾.

1. In una precedente Nota⁽³⁾: *Sull'efflusso di materie plastiche a piccola velocità* ho mostrato il singolare comportamento di quel tipico materiale plastico che è il caucciù non vulcanizzato, quando venga fatto effluire lentamente da un tubo o da un orifizio: le velocità d'efflusso non sono funzione lineare delle pressioni, come vorrebbe la legge di Poiseuille, sibbene per un vasto intervallo del quadrato di quelle. In questo comportamento avevo creduto ritrovare lo stesso allontanamento dalla legge di Poiseuille riscontrato, da diversi sperimentatori, per altre materie plastiche sotto piccole pressioni e generalmente attribuito a cause perturbatrici. Conseguentemente presumevo che con pressioni maggiori l'andamento dell'efflusso in funzione della pressione dovesse raccordarsi con la forma lineare, precisamente come è stato riscontrato per le materie plastiche in generale.

Per trovare questo passaggio dalla legge dei quadrati alla legge di Poiseuille, materiali analoghi a quelli della precedente Nota sono stati provati a pressioni crescenti fino a 50 kg. per cm.², raggiungendo velocità d'efflusso di parecchi metri al minuto. Ma, sino a questo estremo dell'intervallo esplorato, nessun accenno ad una deviazione verso la forma lineare è stato possibile riscontrare: o la legge dei quadrati si verifica fedelmente per tutto l'intervallo⁽⁴⁾, oppure si nota, verso le maggiori velocità d'efflusso, un allontanamento analogo a quello che mostra il diagramma (II) della precedente Nota, cioè in senso opposto a quello ricercato, poichè gli efflussi tendono a crescere ancor più rapidamente dei quadrati delle pressioni.

2. A scopo di controllo del materiale caucciù, si fanno correntemente, nei laboratori industriali, misure di viscosità su così dette soluzioni di caucciù in un conveniente solvente, generalmente benzolo. Ora, nella letteratura di questo argomento nessun accenno si trova ad una deviazione della legge di Poiseuille, analoga a quella che ho riscontrata per il caucciù non soltanto puro, ma anche mescolato con ingredienti, come olii plastificanti, mescolanze che possono essere considerate come soluzioni molto concentrate. Era, dunque, il caso di esplorare l'intervallo fra queste mescolanze e quelle soluzioni per vedere come avvenga il passaggio dall'uno all'altro comportamento.

Due soluzioni di caucciù in benzolo a concentrazioni diverse, entrambe

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio fisico della Società Italiana Pirelli (Milano).

(2) Pervenuta all'Accademia l'8 agosto 1925.

(3) « Reale Acc. Linc. », vol. XXII, serie 5^a, fasc. 11.

(4) « Giorn. Chim. Ind. ed Appl. », giugno 1924, p. 277.

piuttosto elevate (precisamente $1:4$ e $1:2.34$), convenientemente saggiate, hanno subito mostrato una differenza di comportamento: con la prima ho ottenuto la proporzionalità degli efflussi alle pressioni; con la seconda, invece, ho ottenuto efflussi crescenti come i quadrati delle pressioni o anche più rapidamente.

Durante questi saggi preliminari il benzolo si è mostrato un solvente non conveniente col dispositivo sperimentale di cui disponevo, a motivo della sua volatilità. Perciò sono passato a sperimentare con soluzioni in olio minerale pesante. Queste soluzioni o mescolanze di caucciù con olii pesanti si ottengono facilmente introducendo parte del liquido nel caucciù, mentre questo viene lavorato alla macchina a cilindri. Quando la quantità di olio è tale che la mescolanza aderisce troppo sui cilindri, allora si continua l'aggiunta del liquido agitando in un recipiente.

Con una mescolanza di caucciù e olio minerale ⁽¹⁾ nel rapporto $1:2.15$, sperimentando con l'apparecchio che ha dato il diagramma (III) della precedente Nota, (tubo d'efflusso di 50 mm. di lunghezza e 4 mm. di diametro) ho ottenuto la proporzionalità alle pressioni sino a 0.3 kg./cm.^2 circa, ossia sino ad un efflusso di gr. 0.2 al minuto. Aumentando la pressione l'efflusso tende ad aumentare sempre più rapidamente, tanto che verso 0.5 kg./cm.^2 la funzione diventa lineare dei quadrati delle pressioni e tale si mantiene sino a 5 kg./cm.^2 di pressione, limite sino al quale è stato sperimentato.

Con altra mescolanza più viscosa (rapporto $1:1.43$) si è ripetuto lo stesso comportamento completato, però, con un marcato accenno a crescere gli efflussi, ancor più rapidamente dei quadrati delle pressioni per i valori più elevati di queste.

La temperatura di queste esperienze è quella ambiente.

3. Successivamente l'apparecchio è stato munito di tubo di vetro lungo mm. 180 e del diametro medio di mm. 1.26. Con tale tubo d'efflusso sono state fatte numerose determinazioni su materiali diversi. Riporto due serie: l'una ottenuta con mescolanza caucciù-olio pesante nel rapporto $1:17$; l'altra con un olio di ricino che ha una viscosità dello stesso ordine di grandezza. Nella seguente tabella, H sono le pressioni in kg./cm.^2 e P i pesi in mg. effluiti nel tempo t . La temperatura è 15°C .

(1) L'olio adoperato ha una densità 0.888, distilla sopra 300°C e mostra una mobilità notevole.

Caucciù 1 — Olio pesante 17				Olio di ricino			
H	P	t	$\frac{P}{tH}$	H	P	t	$\frac{P}{tH}$
0.021	548	17' 41"	1480	0.021	930	16' 4"	2769
0.051	674	8' 5"	1635	0.50	1320	1' 16"	2085
0.081	735	5' 12"	1745	1.02	2192	52"	2480
0.130	1074	4' 46"	1730	1.62	3277	43" $\frac{2}{3}$	2770
0.183	1075	3' 20"	1760	2.02	2412	25" $\frac{2}{3}$	2800
0.238	885	2' 7"	1755	2.62	4300	34" $\frac{2}{3}$	2830
0.292	1702	3' 15"	1790	4.02	4406	23" $\frac{2}{3}$	2795
0.495	1319	1' 24"	1900	5.02	5489	22" $\frac{2}{3}$	2905
0.77	1632	1' 1"	2085	6.02	6552	21" $\frac{2}{3}$	2995
0.77	1767	1' 8"	2025	7.02	7045	20" $\frac{2}{3}$	2885
1.02	2787	1' 14"	2215	7.02	6990	20" $\frac{2}{3}$	2900
2.02	3792	45" $\frac{2}{3}$	2480	8.02	6805	17" $\frac{2}{3}$	2865
2.02	2073	24" $\frac{2}{3}$	2500	9.02	6942	14" $\frac{2}{3}$	3250
3.87	4461	21" $\frac{1}{3}$	3260	10.00	9234	18" $\frac{1}{3}$	3040
5.87	5210	13" $\frac{2}{3}$	3980	11.00	10474	18" $\frac{2}{3}$	3035
7.92	11915	19" $\frac{2}{3}$	4605	12.00	10219	16" $\frac{2}{3}$	3040
9.92	10804	12" $\frac{2}{3}$	5195	13.00	6530	9" $\frac{1}{3}$	3270
11.7	12100	11" $\frac{1}{3}$	5330	14.00	6775	10" $\frac{2}{3}$	2735
13.9	11275	8" $\frac{1}{3}$	5925	15.00	6265	9"	2785
15.95	11623	6" $\frac{2}{3}$	6620	17.05	6826	8" $\frac{2}{3}$	2860
18.1	21925	10" $\frac{2}{3}$	6975	20.1	6816	7" $\frac{2}{3}$	2675
19.1	18950	8" $\frac{1}{3}$	7250				

Dai valori delle colonne $\frac{P}{tH}$ si vede che le singole determinazioni lasciano a desiderare quanto a precisione. Ma lo scopo di queste misure è soltanto quello di mettere in evidenza grossolane differenze di comportamento. Si vede, infatti, come i due materiali, aventi viscosità poco diverse (in un certo intervallo), provati allo stesso apparecchio e per uno stesso intervallo delle forze applicate, danno: l'uno (l'olio di ricino) un comportamento normale senza allontanamento sistematico dalla legge di Poiseuille; l'altro (contenente caucciù) il comportamento normale sino ad una certa pressione (0.5 atm. circa); poi s'inizia una deviazione che va sempre più accentuandosi sino a raggiungere (verso le 10 atm.) la legge dei quadrati.

Ne segue che la misura della fluidità resulterebbe maggiore per l'olio di ricino se fatta a bassa pressione, mentre alle pressioni più elevate la soluzione di caucciù appare quasi 3 volte più fluida.

Si può notare che il caucciù accenna ad una frizione, vale a dire ad una forza sotto la quale non si ha efflusso, ma trattasi di un valore molto basso.

Da quanto sopra esposto risulta chiarito il comportamento del materiale che c'interessa: con forze piccole e sino ad un certo valore degli efflussi, questi sono funzione lineare delle forze stesse; poi si manifesta un allontanamento che si accentua sempre più sino a condurre la funzione alla forma lineare del quadrato delle forze; in fine si verifica, spesso, un allontanamento anche da questa forma verso ancor più rapidi aumenti degli efflussi in confronto delle forze agenti.

Il passaggio dalla legge di Poiseuille a quella dei quadrati si manifesta tanto prima quanto minore è la mobilità del materiale, talchè pei materiali di cui nella precedente nota non era, forse, possibile riscontrare la legge di Poiseuille coi mezzi di cui potevo disporre, a motivo dei piccoli efflussi che sarebbe stato necessario apprezzare. Tuttavia era stato notato che la legge dei quadrati doveva non essere valida per le più basse pressioni, poichè estrapolando si otteneva il risultato assurdo di un efflusso sotto pressione zero: quanto abbiamo ora veduto dà perfettamente ragione di questa apparente assurdità.

4. Per spiegare il singolare comportamento del caucciù, sia puro, sia diluito con altri materiali, non sembra sia possibile far valere le stesse cause perturbatrici già riscontrate per altre materie plastiche. In vero quelle cause si verificano per le più basse pressioni e scompaiono con pressioni elevate, mentre nel nostro caso dovrebbe accadere precisamente il contrario. D'altra parte ho già mostrato⁽¹⁾ il carattere telescopico del moto durante l'efflusso del caucciù, anche nel caso che questo avvenga da un orifizio di breve spessore. Nel caso, poi, del tubo di vetro col quale sono state fatte le determinazioni riportate, è facile farsi un'idea della natura del moto: i materiali adoperati erano, generalmente, trasparenti e non così puri da non presentare numerose particelle visibili con mediocre ingrandimento: osservando la corrente dentro il tubo di vetro si vede un rincorrersi e sopravanzarsi di particelle alcune delle quali si muovono con velocità molto piccola, mentre altre hanno una velocità molto maggiore specialmente lungo un filetto centrale. Insomma l'impressione è che, effettivamente, il moto avvenga per scorrimento di strati coassiali, quasi fermi in prossimità delle pareti e molto veloci presso l'asse. Non si apprezza nessuna differenza di comportamento fra l'olio di ricino e il caucciù-olio minerale e neppure, con questo materiale, fra le basse pressioni per le quali si verifica la legge di Poiseuille e le alte per le quali si ha la legge dei quadrati.

(1) « Giorn. Chim. Ind. ed Appl. », dicembre 1924, p. 567.

Allora non resta che insistere nella supposizione che il caucciù, da solo o anche diluito con altro materiale, presenti una caratteristica non ancora riscontrata per altre sostanze: la mobilità dovrebbe essere, non costante, ma funzione della velocità di scorrimento.

I risultati sperimentali direbbero che la mobilità si mantiene costante, come per gli altri materiali noti, in un primo intervallo; poi tende ad aumentare sino a raggiungere la proporzionalità alla radice quadrata della velocità e tale si mantiene per un vasto intervallo; infine tende a crescere ancora più rapidamente. Si sarebbe condotti a ritenere che la variazione della mobilità debba essere più continua per modo che, sia la legge di Poiseuille, che quella dei quadrati, sarebbero verificate soltanto approssimativamente per un certo intervallo. Tuttavia è da ricordare che, almeno la legge dei quadrati, è stata verificata, con alcuni materiali, per intervalli molto estesi senza nessun accenno a deviazioni sistematiche, nei limiti d'errore dell'esperienza.

Chimica-Fisica. — *Sulla statica chimica dei fenomeni elettro-nici.* Nota ⁽¹⁾ di LUIGI ROLLA e GIORGIO PICCARDI, presentata dal Socio A. GARBASSO.

1. Poichè l'esperienza dimostra che il potenziale di ionizzazione è completamente indipendente dalla temperatura (almeno nelle condizioni di fiamma studiate), dalla formula che esprime la legge dell'equilibrio mobile

$$\frac{d \log K}{dT} = - \frac{U}{RT^2}$$

si ricava, integrando, la seguente legge lineare, che dà $\log K$ in funzione di U , per $T = \text{costante}$:

$$(1) \quad \log K = - \frac{U}{RT} + C.$$

C'è una certa costante di integrazione.

Dunque, se conosciamo per due diversi elementi il valore di U , noi possiamo determinare sperimentalmente i valori di $\log K$ relativi ai due elementi stessi, in certe date condizioni di esperienza, e quindi calcolare i coefficienti dell'equazione (1), validi per quelle certe condizioni.

Una volta noti questi coefficienti, possiamo calcolare U per altri elementi, determinando sperimentalmente i valori di $\log K$ ad essi relativi

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica-fisica della R. Università di Firenze: pervenuto all'Accademia il 27 marzo 1925. Vedi questi «Rendiconti», serie 6^a, vol. II, pp. 29, 128.

(sempre, s'intende, operando nelle condizioni per le quali furono determinati i coefficienti della equazione (1)).

Che l'equazione (1) sia applicabile viene facilmente dimostrato, costruendo, per una serie di elementi i cui potenziali di ionizzazione siano noti per altra via (ed il cui valore non superi gli 8 *volta* circa), un diagramma che porti in ordinate i valori di $\log K$ determinati sperimentalmente, ed in ascisse i valori noti del potenziale di ionizzazione.

Questo diagramma è una retta. (Diagramma 1).

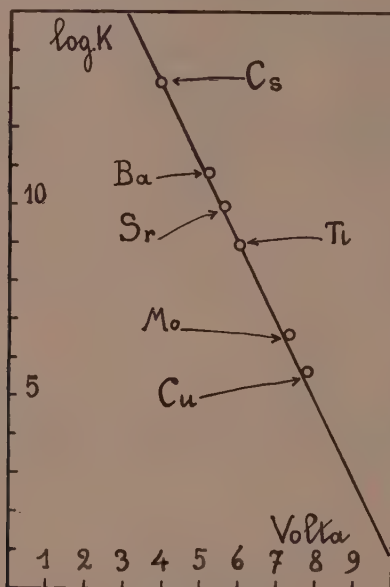


Diagramma 1.

Infatti si è trovato:

Elementi	$\log K$ osservato	Potenziale di ionizzazione determinato per altra via
Cs	12.62	3.9
Rb	11.10	4.1
K	11.44	4.1
Na	9.77	5.13
Li	8.20	(5.37) calc.
Tl	7.48	6.04

Le divergenze che si notano derivano, in parte, da impurezze contenute nei sali (il sale di Rubidio dava visibilissima la riga del Sodio nello spettro di fiamma), ed in parte dal fatto che, essendo state tali esperienze eseguite in tempi diversi e lontani, non è stato sempre possibile condurle esattamente nelle identiche condizioni.

Le divergenze sono in genere dell'ordine del decimo di *volta* e quindi molto piccole.

È notevole il fatto seguente: la retta del diagramma taglia l'asse delle ascisse in un punto compreso fra il potenziale 8 ed il potenziale 9, confermando quanto avevamo asserito in una nota precedente e cioè, che nella fiamma dell'ordinario bruciatore di Bunsen e col nostro gas, non sono sensibilmente ionizzati che gli elementi di potenziale inferiore a circa 8 *volta*.

2. Si può osservare che il coefficiente angolare della retta rappresentata dall'equazione (1) [poichè U, calore di ionizzazione, è eguale a V, potenziale di ionizzazione in volta $\times \frac{96500 \text{ coulomb}}{4.186 \text{ joule}}$;

$$\text{tag } \alpha = - \frac{23052}{R \cdot T}$$

ed usando i logaritmi decimali

$$\text{tag } \alpha = - \frac{23052}{4.571 \cdot T},$$

nel nostro caso, in cui $T = 1750^\circ$ assoluti circa, viene ad assumere il valore -2.81 . Questo valore corrisponde all'angolo di 109° circa, praticamente eguale all'angolo formato dalla retta del diagramma con l'asse delle ascisse.

Questa coincidenza forse non è soltanto numerica.

La costante C è il valore di log K corrispondente a $U = 0$, ossia a $V = 0$ oppure a $\text{tag } \alpha = 0$, ossia a $T = \infty$. Questo punto, ammessa la validità dell'equazione (1), è fisso e vale per qualunque valore del parametro T; basterà quindi calcolarlo una volta per sempre.

Poichè tag α si può calcolare conoscendo T, ne viene che noi possiamo costruire *a priori* tutto il sistema di rette del diagramma $\log K \times V$. Tutto questo vale peraltro nell'ipotesi di poter far variare T senza variare le condizioni aereo-dinamiche della fiamma.

3. Abbiamo determinato sperimentalmente con questo metodo i potenziali di ionizzazione del Bario, dello Stronzio, del Rame e del Molibdeno.

Per il Bario, per lo Stronzio e per il Molibdeno esistevano soltanto questi valori, calcolati su dati spettroscopici:

Ba	5.19
Sr	5.67
Mo	7.35

mentre per il Rame era stato osservato questo valore⁽¹⁾

Cu	7.8
----	-----

In questa ricerca abbiamo usato condizioni di fiamma diverse da quelle per solito usate ed una temperatura più alta, per avere un nuovo controllo di quanto era già stato osservato.

Come elementi di riferimento abbiamo preso il Cesio ed il Tallio, dei quali possediamo sali che allo spettroscopio mostrano una grande purezza, ed i cui potenziali di ionizzazione sono ben noti.

Per essi abbiamo ottenuto:

	Log K osservato	Potenziale di ionizzazione determinato per altra via
Cs	13.27	3.90
Tl	8.98	6.04

Per il Bario, lo Stronzio, il Rame ed il Molibdeno abbiamo ottenuto:

	log K osservato
Ba	10.81
Sr	9.92
Cu	5.69
Mo	6.63

Con questi valori e con quelli del Cesio e del Tallio si ricavano immediatamente i seguenti potenziali di ionizzazione:

Ba	5.1
Sr	5.6
Mo	7.1
Cu	7.6

in ottimo accordo coi valori previsti e col valore osservato.

(1) Per i valori dei potenziali di ionizzazione, per i metodi di determinazione e per la relativa bibliografia rimandiamo al lavoro di K. T. COMPTON e F. L. MOHLER. *Critical Potential*, «Bull. Nat. Res. Council», 9 1^a, n. 48. Sept. (1924).

Le differenze sono sempre dell'ordine del decimo di *volta*.

Il diagramma 2, qui unito, mostra come si verifichi anche in questo caso l'andamento lineare, quando si prenda per V il valore determinato per altra via e per $\log K$ il valore determinato col nostro metodo.

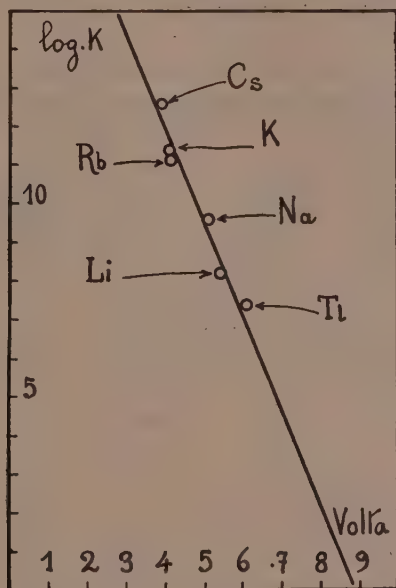


Diagramma 2.

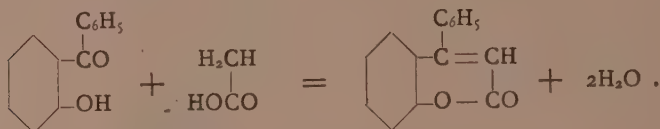
Questo metodo di confronto è preferibile, dal punto di vista sperimentale, all'altro metodo, già esposto in una precedente Nota, per la rapidità di lavoro e per l'esattezza e la certezza dei risultati; esattezza e certezza che provengono quasi unicamente dal fare astrazione dal valore reale della temperatura della fiamma; valore di sempre difficile determinazione e spesso impossibile ad ottenersi con la dovuta e necessaria precisione.

Chimica. — *α-β-difenil-cumarine*. Nota ⁽¹⁾ di G. BARGELLINI
presentata dal Socio N. PARRAVANO ⁽²⁾.

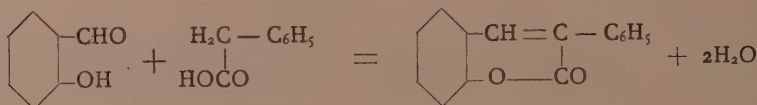
Come dalle aldeidi aromatiche orto-ossi-sostituite per condensazione con acetato sodico in presenza di anidride acetica si formano, come è noto, le cumarine



dai benzofenoni orto-ossi-sostituiti si possono ottenere con gli stessi reattivi le β-fenil-cumarine ⁽³⁾



In modo analogo condensando l'aldeide salicilica con fenil acetato sodico, Oglialoro ⁽⁴⁾ ottenne la α-fenil-cumarina:



e da altre aldeidi aromatiche orto-ossi-sostituite io ho potuto preparare alcune α-fenil-cumarine diversamente sostituite che descriverò in una prossima Nota.

Allo scopo di completare questo quadro delle cumarine α- e β-sostituite, ho voluto studiare anche i prodotti che si formano quando si fa rea-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 12 agosto 1925.

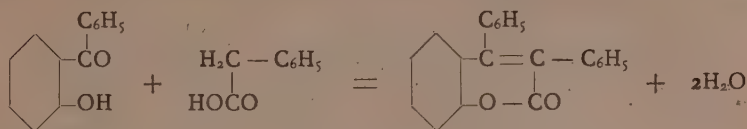
(3) CIAMICIAN e SILBER, «Ber.», 27, 409, 1628 (1894);

KOMAROWSKI e v. KOSTANECKI, «Ber.», 27, 1999 (1894);

BARGELLINI e LEONARDI, «Gazz. Chim. Ital.», 41 (1), 737 (1911).

(4) OGLIALORO, «Gazz. Chim. Ital.», 9, 428 (1879).

gire, in condizioni sperimentali analoghe, il fenilacetato sodico sui benzofenoni orto-ossi-sostituiti. La reazione avviene secondo lo schema seguente:



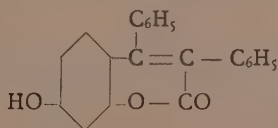
e si formano le cumarine α - β -difetil-sostituite.

La reazione si compie riscaldando su bagno di sabbia in un palloncino munito di refrigerante a ricadere quantità equimolecolari del benzofenone e fenilacetato sodico secco mescolati con circa 5 volte il loro peso complessivo di anidride acetica. Gettando in acqua dopo circa 30 ore di riscaldamento, il prodotto della reazione si deposita.

Descriverò in questa Nota le proprietà dei composti che ho ottenuti partendo dal 2-4-diossi-benzofenone, dal 2-3-4-trioossi-benzofenone, dal 2-4-6-trioossi-benzofenone e dal 2-4-diossi-4'-metossi-benzofenone, riservandomi di mostrare in seguito in una Nota riassuntiva sull'argomento la importanza che può avere la conoscenza di questi composti come contributo allo studio della costituzione di alcune sostanze naturali.

PARTE SPERIMENTALE.

α - β - DIFENIL - 4 - OSSO - CUMARINA.



Per riscaldamento del 2-4-diossi-benzofenone con fenilacetato sodico e anidride acetica si forma l'*acetil-derivato* che, purificato per cristallizzazione dall'alcool bollente, si ha in cristallini splendidi di colore bianco giallastro fusibili a 220°.

Sostanza gr. 0.2264	CO ₂ gr. 0.6450	H ₂ O gr. 0.0973
dove % trovato	C 77.69	H 4.77
per C ₂₃ H ₁₆ O ₄ calcolato	C 77.53	H 4.49

Questo acetil-derivato è solubile a caldo nell'alcool e nel benzolo; meglio si scioglie nell'acido acetico.

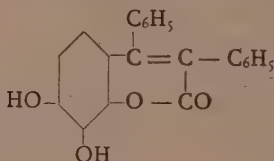
L'acetil-derivato si può facilmente saponificare sciogliendolo in acido solforico concentrato a temperatura ordinaria. Versando poi nell'acqua la

soluzione solforica, che è gialla, si ha la *ossi-cumarina* che si purifica cristallizzandola dall'alcool diluito bollente. Il prodotto puro è in piccoli cristalli bianchi che fondono a 290°

Sostanza gr. 0.2467	CO ₂ gr. 0.7268	H ₂ O gr. 0.1056
donde % trovato	C 80.34	H 4.75
per C ₂₁ H ₁₄ O ₃ calcolato	C 80.25	H 4.45

È insolubile nell'acqua, solubile nell'alcool e nell'acido acetico: si scioglie pochissimo nel benzolo.

α - β -DIFENIL-3-4-DIOSSI-CUMARINA.



Si ottiene dal 2-3-4-triossi-benzofenone per riscaldamento con fenilacetato sodico e anidride acetica. Il *biacetil-derivato* che si forma nella reazione si cristallizza dall'alcool bollente, nel quale non è molto solubile. Per raffreddamento si ottiene l'acetil-derivato puro in cristallini bianchi splendenti che a 220° cominciano a decomporsi e a 255° fondono completamente decomponendosi.

Sostanza gr. 0.1757	CO ₂ gr. 0.4670	H ₂ O gr. 0.0750
donde % trovato	C 72.48	H 4.74
per C ₂₃ H ₁₈ O ₆ calcolato	C 72.46	H 4.34

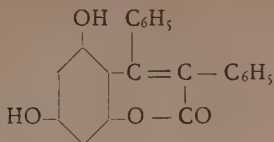
L'acetil-derivato è insolubile nell'acqua, si scioglie a caldo nell'alcool e nel benzolo, più facilmente nell'acido acetico.

Sciogliendolo nell'acido solforico concentrato a freddo viene saponificato e versando in acqua la soluzione solforica che è di color giallo, si ottiene la *diossi-cumarina*. Cristallizzata dall'alcool diluito bollente si presenta in aghetti bianchi che fondono decomponendosi a 271°-273°.

Sostanza gr. 0.2114	CO ₂ gr. 0.5906	H ₂ O gr. 0.0841
donde % trovato	C 76.19	H 4.42
per C ₂₁ H ₁₄ O ₄ calcolato	C 76.39	H 4.24

Si scioglie nell'alcool e nell'acido acetico; è insolubile nell'acqua e pochissimo solubile nel benzolo.

α - β -DIFENIL-4-6-DIOSSI-CUMARINA.



Riscaldando insieme 2-4-6-trioossi-benzofenone, fenilacetato sodico ed anidride acetica, si ottiene il *biacetil-derivato* che si purifica cristallizzandolo dall'alcool bollente, nel quale non è molto solubile. Aghetti bianchi fusibili a 190°.

Sostanza gr. 0.2411	CO ₂ gr. 0.6384	H ₂ O gr. 0.0944
donde % trovato	C 72.23	H 4.35
per C ₂₅ H ₁₈ O ₆ calcolato	C 72.46	H 4.34

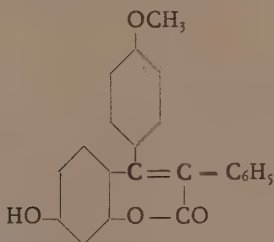
Il biacetil-derivato è insolubile nell'acqua, si scioglie facilmente nell'acido acetico e nel benzolo anche a freddo; nell'alcool è meno solubile.

Versando in acqua la soluzione solforica gialla, si ottiene la *dioSSI-cumarina* che si può purificare sciogliendola nell'acido acetico a caldo, aggiungendo acqua fino ad intorbidamento e lasciando raffreddare lentamente la soluzione. Si separa così la dioSSI-cumarina in aghetti bianchi che fondono a 260°-265°.

Sostanza gr. 0.1745	CO ₂ gr. 0.4895	H ₂ O gr. 0.0712
donde % trovato	C 76.50	H 4.53
per C ₂₁ H ₁₄ O ₄ calcolato	C 76.39	H 4.24

La dioSSI-cumarina è insolubile nell'acqua, pochissimo solubile nel benzolo e nel cloroformio anche a caldo: si scioglie facilmente nell'alcool e nell'acido acetico.

α -FENIL- β -PARAMETOSSIFENIL-4-OSSI-CUMARINA.



Si forma l'*acetil-derivato* riscaldando con anidride acetica una mescolanza di fenilacetato sodico e 2-4-dioSSI-4'-metossi-benzofenone (ottenuto

per condensazione della resorcina con acido anisico). Cristallizzandolo dall'alcool bollente si ha in cristallini bianchi fusibili a 220°-222°.

Sostanza gr. 0.1701	CO ₂ gr. 0.4650	H ₂ O gr. 0.0721
dove % trovato	C 74.55	H 4.70
per C ₂₄ H ₁₈ O ₅ calcolato	C 74.61	H 4.66 .

Questo acetil-derivato è insolubile nell'acqua, non molto solubile nell'alcool; più facilmente si scioglie nel benzolo e nell'acido acetico.

Si scioglie nell'acido solforico concentrato a freddo con colorazione gialla. Versando nell'acqua la soluzione solforica si ha la *ossi-cumarina* che si purifica per cristallizzazione dell'alcool. Aghetti bianchi che fondono a 255° decomponendosi.

Sostanza gr. 0.1995	CO ₂ gr. 0.5610	H ₂ O gr. 0.0835
dove % trovato	C 76.69	H 4.66
per C ₂₂ H ₁₆ O ₄ calcolato	C 76.74	H 4.65

Questa cumarina è insolubile nell'acqua e pochissimo solubile nel benzolo anche bollente. Più facilmente si scioglie nell'alcool e nell'acido acetico.

Chimica. — *Dell'isomorfismo fra Uranio tetravalente e Zirconio.* Nota di LORENZO FERNANDES presentata dal Corrispondente G. PELLIZZARI ⁽¹⁾.

Sino a pochi anni or sono le cognizioni sull'isomorfismo dei vari elementi delle terre rare tetravalenti erano assai limitate. Sono da gran tempo note le relazioni isomorfe che passano tra l'ossido di Titanio ed alcuni altri biossidi dello stesso gruppo del sistema periodico; inoltre dai lavori di Hillebrand e Melville era stato messo in evidenza l'isomorfismo del Torio coi composti Uranosi. In un primo tempo il primo dei due autori ⁽²⁾ studiò i due ossidi UO₂ e ThO₂ e riuscì, mediante la lunga digestione di questi nel borace fuso, ad ottenere delle soluzioni solide. Qualche anno più tardi preparò per via umida dei solfati misti dei due elementi portando un nuovo contributo allo studio del loro isomorfismo ⁽³⁾.

Molto recentemente le ricerche sopra l'isomorfismo dei biossidi del 4° gruppo furono nuovamente riprese, essendo di prezioso ausilio un mezzo nuovo di indagine, e cioè l'analisi della struttura cristallina coi raggi X

(1) Pervenuta all'Accademia il 13 luglio 1925.

(2) «Z. anorg. allgem. chem.», III, (1892), 249.

(3) «Amer. chem. J.», 14, 1-9 (1892).

secondo Debby e Scherrer. Con tale mezzo Goldschmidt e Thomassen⁽¹⁾ esaminarono gli ossidi $\text{CeO}_2 - \text{ThO}_2 - \text{UO}_2$ e dimostrarono essere isomorfi. L'isomorfismo del Cerio^{IV} col Torio fu in seguito confermato da V. Cuttica e da A. Tocchi⁽²⁾, i quali riuscirono a preparare soluzioni solide dei solfati e dei nitrati doppi con l'ammonio e col nichel.

Una conferma analoga non si può avere in riguardo al Ce e all'Uranio, perchè essendo l'uno nella sua valenza massima e l'altro in quella minima, avremmo una reciproca ossidazione e riduzione.

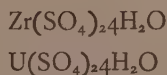
L'esame però delle relazioni isomorfiche non è stato esteso ad un altro elemento raro del 4° gruppo e cioè allo Zirconio.

Questo si può forse spiegare col fatto che l'ossido di Zirconio cristallizza in modo diverso dagli altri ossidi di cui si è parlato. Nordenskiöld⁽³⁾ descrive una modificazione tetragonale di ZrO_2 cristallizzato, tali cristalli sono però pseudocubici e sembra che non esista isomorfismo tra il ZrO_2 e la SiO_2 . Altri autori hanno invece ottenuto con trattamenti diversi zirconio cristallizzato diversamente. Il Groth⁽⁴⁾ dice che sono necessarie ulteriori ricerche per determinare le modificazioni polimorre del biossido di Zirconio. Tali modificazioni sembravano dare una spiegazione ai valori diversi di densità che si ottenevano sopra ZrO_2 ottenuto con metodi diversi. Recentissime ricerche eseguite mediante l'analisi di tali preparati col metodo di Debye e Scherrer hanno invece dimostrato esistere una sola forma di ZrO_2 ed essere i diversi valori di densità dovuti ad inclusioni gassose.

Se l'ossido di Zirconio sembra in certo qual modo discostarsi dagli altri ossidi per la sua diversa forma cristallina, non possiamo dire lo stesso per i suoi sali; in particolare pei solfati.

In una mia nota precedente⁽⁵⁾ ho preso in considerazione l'isomorfismo del solfato di Zirconio col solfato di Cerio^{IV} ed ho dimostrato come questi sali siano completamente miscibili allo stato solido.

Nella presente nota ho studiato invece le condizioni isomorfiche che passano tra i due solfati



i quali cristallizzano nel sistema rombico come i corrispondenti sali di Cerio e di Torio.

Come avrò poi occasione di dire in modo più dettagliato, tali composti sono capaci di dare soluzioni solide in limite relativamente vasto.

(1) « I. chem. Soc. », (A), II; 644 (1923).

(2) « Gazz. Chim. Ital. », 54, 628 (1924).

(3) POGGENDORF, « Ann. d. Phys. », 1861, 114, 625.

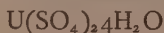
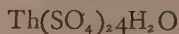
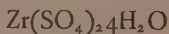
(4) GROTH, « Chemische Kristallographie », I, p. 82.

(5) « Gazz. Chim. Ital. », 55, 290 (1925).

Tale isomorfismo porta un contributo alla interpretazione di alcuni minerali e può dare una spiegazione sulla natura del contenuto di Uranio, qualche volta relativamente elevato, nei minerali di Zirconio.

Fra questi citerò il Malacone di Hitterö (Norvegia) che contiene 0.33 % di U_3O_8 , la Cystalite di Rockport (1.94) e la Naegite del Giappone che ne contiene il 2.69 %.

Con le ricerche di Hillebrand, di Cuttica e Tocchi, con la mia precedente e questa si viene così a definire la seguente serie isomorfa



A questi andrà con grande probabilità aggiunto il solfato di Afnio, e mi riprometto di studiare l'isomorfismo di tale composto con i composti sopra elencati non appena mi sarà possibile avere a disposizione un poco di questo prezioso materiale.

PARTE SPERIMENTALE.

Hillebrand e Melville, per ottenere soluzioni solide dei due solfati di Torio e di Uranio, introducevano in tubi di vetro spesso una soluzione di acido solforico e i biossidi di Torio e di Uranio in proporzioni diverse. I tubi venivano saldati alla fiamma e poi scaldati alla temperatura di 170° , per raffreddamento, si separavano dalla soluzione dei cristalli che venivano analizzati.

Alcune esperienze da me iniziate con lo stesso metodo furono dovute abbandonare, perchè si ottenevano dei prodotti non omogenei e inquinati da piccole quantità di ossidi indisciolti.

Ricorsi allora all'evaporazione in autoclave delle soluzioni dei due solfati precedentemente preparati a parte. I cristalli però ottenuti con questo metodo, forse a causa del violento riscaldamento e della evaporazione non uniforme, erano generalmente assai male formati e spesso polverizzati, e al microscopio non si poteva decidere sulla loro omogeneità. Inoltre dall'una all'altra cristallizzazione si avevano degli sbalzi bruschi ed irregolari di composizione.

Ricorsi allora ad un altro metodo, e cioè misi ad evaporare in essiccatore nel vuoto su acido solforico concentrato la soluzione dei due solfati.

Con questo metodo ottenni una evaporazione lenta e regolare, e una prima piccolissima cristallizzazione attentamente esaminata al microscopio risultò essere costituita da sottili ma nitidissimi cristallini prismatici (rombici) colorati debolmente in verde.

Questo metodo difettava però nella estrema lentezza delle evaporazioni, a causa forse della temperatura assai fredda e dell'acido solforico contenuto in quantità relativamente elevata nella soluzione, in due mesi fu ottenuta una frazione costituita da meno di 0.8 grammi di cristalli. Per accelerare allora la cristallizzazione introdussi l'essiccatore in un termostato alla temperatura di 30°, in questo modo, che veniva ad essere più rigoroso data la costanza della temperatura, l'evaporazione fu assai più rapida e riuscii ad ottenere 9 frazioni; nelle prime 5 frazioni si verificava un aumento graduale nella percentuale di questo elemento, percentuale compresa tra lo 0.8 ed il 10.4 %. Dopo la terza frazione se ne ottenne un'altra che aveva il 50 % di solfato di Uranio e tale percentuale andava man mano aumentando nelle frazioni successive fino a raggiungere la percentuale del 65 %; una concentrazione maggiore non fu possibile ottenerla, perchè il solfato di Uranio subiva una lenta ossidazione, e quindi la concentrazione di U^{+++} nelle frazioni dei solfati diminuiva invece di aumentare.

Tale ossidazione era dovuta per la massima parte alla concentrazione dell'acido solforico andata facendosi sempre maggiore.

Per ottenere allora frazioni un poco più ricche di Uranio, la soluzione contenente i due solfati e quello di Uranio in prevalenza, veniva addizionata di un poco di alcool etilico, in quantità assai piccole per non provocare la precipitazione dell'acido zirconsolforico.

La soluzione veniva quindi introdotta nel solito essiccatore a vuoto ed esposta all'azione dei raggi solari. A causa del riscaldamento da essi prodotto l'evaporazione era assai rapida ed inoltre per l'azione fotochimica dei raggi stessi l'Uranio veniva ridotto dall'alcool in maniera che la concentrazione dell' U^{+++} veniva ad aumentare in soluzione invece che diminuire; ottenni così altre 2 frazioni nelle quali la percentuale del solfato uranoso arrivava sino alla concentrazione del 90 %.

Il colore dei cristalli va crescendo dal verde chiaro al verde sempre più carico in quelli più ricchi di Uranio. La composizione dei cristalli fu determinata nel modo seguente: un campione veniva trattato all'ebollizione con acido nitrico in modo da ossidare completamente il sale di Uranio a sale di Uranile, per aggiunta di NH_3 veniva poi precipitata la somma degli idrati che calcinati in corrente di H dava luogo ai due ossidi $UO_2 + ZrO_2$.

Nella soluzione preventivamente acidificata con HCl veniva dosato l' SO_4 per precipitazione con $BaCl_2$. Un altro campione veniva trattato con permanganato potassico $n/10$ in soluzione solforica e poi con ossalato sodico si determinava l'eccesso di permanganato. Calcolata così dalla quantità di permanganato potassico la percentuale di Uranio si otteneva per differenza la quantità di Zirconio.

L'acqua veniva determinata sopra un campione a parte riscaldando il sale a 300° in corrente di H .

Dai risultati analitici che sono riportati nella seguente tabella, risulta,

come ho già accennato, che i due solfati sono miscibili allo stato solido in limite sufficientemente elevato.

Frazione	% UO_2	% ZrO_2	% SO_3	% H_2O	% $\text{U}(\text{SO}_4)_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$	% $\text{Zr}(\text{SO}_4)_2$
1	0.46	34.27	45.02	20.25	0.86	99.14
2	1.19	33.79	44.82	20.20	2.23	97.77
3	1.82	33.39	44.68	20.01	3.4	96.60
4	5.38	31.11	43.80	19.71	10.0	90.0
5	5.59	31.07	43.76	19.58	10.4	89.6
6	27.05	17.25	38.49	17.21	50.1	49.9
7	32.60	13.62	37.10	16.68	60.6	39.4
8	33.30	13.17	36.93	16.60	61.90	38.1
9	35.29	11.89	36.44	16.38	65.6	34.4
10	42.98	6.98	34.54	15.50	79.9	20.1
11	48.25	3.56	33.23	14.96	89.7	10.3

Ringrazio il laureando Gonfiantini che mi ha validamente aiutato nella determinazione di alcuni dati analitici.

Chimica. — *La struttura cristallina del biossido di piombo esaminata coi raggi X.* Nota ⁽¹⁾ di A. FERRARI presentata ⁽²⁾ dal socio G. BRUNI.

In un lavoro recentemente pubblicato su questi Rendiconti ⁽³⁾ mi sono occupato del fluoruro di magnesio pel quale ho dimostrata una struttura tetragonale tipo « rutilo ». Una sostanza che i dati cristallografici facevano ritenere analoga al fluoruro di magnesio e di conseguenza al rutilo e alla cassiterite è il biossido di piombo. Questo afferma anche Huggins ⁽⁴⁾.

Dette sostanze infatti, tutte tetragonali, hanno un rapporto assiale assai vicino come si vede nella tabella 1.

Ho studiata questa sostanza eseguendo un fotogramma di Debye con biossido di piombo puro di Merck posto in un cilindretto di 1 mm. di

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica Generale del Politecnico di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 25 luglio 1925.

(3) Questi « Rendiconti » (6) I (1925) p. 665.

(4) « Phys. Rew. », 21 (1923) p. 719.

diametro, impiegando un anticatodo di rame. La struttura dedotta da questo fotogramma conferma il previsto tipo « rutilo ».

La cella elementare contenente due molecole è rappresentata nella fig. 1, dove i cerchi neri stanno a indicare gli atomi di piombo, i bianchi quelli di ossigeno; le coordinate sono:

$$P_b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad O \begin{pmatrix} x & -x & 0 & -x & x & 0 \\ \frac{1}{2} + x & \frac{1}{2} & +x & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -x & \frac{1}{2} & -x & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

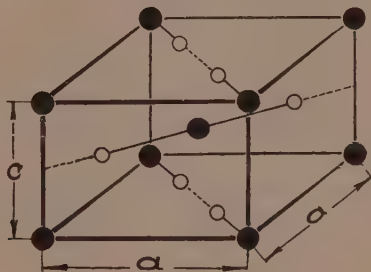


fig. 1.

Il parametro x non è valutabile con precisione essendo piccola l'influenza dell'ossigeno sulla intensità della riflessione⁽¹⁾. Considerando i diametri atomici di Bragg ho assunto nel calcolo $x = 0.35$. Nella tabella i simboli hanno il solito significato, gli angoli δ sono corretti colla formula di Pauli che tien conto del diametro del preparato, del quale diametro è funzione lo spostamento delle linee⁽²⁾. Le intensità delle linee sono calcolate di confronto colle due formule (1) e (2) come è detto nel mio sopra-

(1) La massa dell'atomo di ossigeno produce un effetto assai piccolo rispetto a quello del piombo essendo le costanti di riflessione degli atomi $A_O = 10$ e $A_{P_b} = 78$ per l'ione piombo tetravalente. Da questo deriva che tutte le faccie, la cui somma degli indici è dispari, danno delle immagini tanto deboli che praticamente non appaiono. In tutte queste i due atomi di piombo della cella si trovano in opposizione di fase per cui il loro contributo alla riflessione è nullo, ed essendo sempre piccolo l'effetto degli atomi di ossigeno le dette linee non compaiono. Solo due linee a somma di indici dispari (la 11^a debole e la 29^a media) si osservano, la prima per il numero grande delle faccie, la seconda per la coincidenza in essa dell'effetto dovuto a due faccie (quest'ultima interpretazione è incerta). Un'altra conseguenza della grande massa del piombo rispetto all'ossigeno è la grandezza poco diversa dei fattori di struttura delle varie faccie aventi somma di indici pari, per cui nella intensità delle linee viene ad avere un effetto preponderante il numero dei piani cooperanti come si vede nella tabella 2.

(2) La correzione è espressa dalla formula: $\delta' = \delta - \frac{r}{2} \left(1 + \cos \frac{\delta}{2} \right)$ dove δ è l'angolo misurato, δ' quello corretto, r il raggio del cilindretto impiegato come preparato. (« Zeitsch. f. Krystall. » 56, 604).

citato lavoro; in questo però ho introdotto la correzione per il forte assorbimento che dà il preparato in questo caso; tale coefficiente di correzione è funzione dell'angolo δ poichè per piccoli valori di esso i raggi attraversano un maggior spessore della sostanza e quindi risultano più indeboliti; il coefficiente perciò aumenta col crescere dell'angolo δ fino a mantenersi costante dopo aver raggiunto un valore di δ prossimo a 90° . La scelta del coefficiente è incerta; ho assunto i valori dati da Debye e Scherrer ⁽¹⁾ per quanto li ritenga insufficienti; in ogni caso le intensità calcolate e osservate appaiono dal confronto concordanti. Le distanze reticolari d e la costante a sono calcolate con le solite formule:

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\delta}{2}} \quad a = d \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \frac{a^2}{c^2} h_3^2}.$$

Nell'ultima formula ho posto per c/a il valore 0.682 che si presta meglio di quello dato dalla cristallografia (0.6764) all'ordinamento delle linee.

Questo valore meglio si accorda anche colla relazione posta in evidenza nella tabella I, dalla quale si vede come il rapporto $\frac{c}{a}$ cresca col crescere delle dimensioni della cella, le quali a loro volta risentono l'influenza dei diametri atomici dei componenti ⁽²⁾.

TABELLA I.

	a	c	c/a	diámetro atomico metallico	diámetro atomico metalloide
TiO ₂	4.52	2.92	0.645	2.80	1.30
MgF ₂	4.64	3.06	0.660	2.85	1.35
SnO ₂	4.67	3.14	0.673	2.80	1.30
PbO ₂	4.98	3.40	0.682	3.80	1.30

(1) «Physik. Zeitsch.» 19, 481 (1918).

(2) L'isomorfismo fra composti fluorurati e ossigenati è ben noto. Vedi ZAMBONINI, «Zeitsch. Kryst.», 41, 60 (1905), «Rend. Acc. Lincei», 31, 2° sem., 67 (1922). L'importanza fondamentale dei diametri atomici nei fenomeni di isomorfismo è stata riconosciuta pel primo dal medesimo autore. «Rend. Acc. Lincei», 31, 1° sem., 295 (1922).

TABELLA II.

N. d'ordine	δ	sen $\frac{\delta}{2}$ corr.	d	$h_1 \ h_2 \ h_3$	a	N. dei piani	Intensità		osservate
							calcolate colla		
							formola (1)	formola (2)	
1	26.3	0.219	3.515	110	4.972	2	29.2	24.8	mf
2	30.2	—	—	—	—	—	—	—	md
3	32.7	0.274	2.807	101	4.987	4	22.7	25.0	mf
4	37.0	0.310	2.485	200	4.970	2	10.5	10.8	md
5	49.6	0.413	1.865	121	4.986	8	28.5	28.5	ff
6	52.7	0.437	1.760	220	4.980	2	6.1	6.2	d
7	54.4	0.452	1.703	002	4.997	1	4.3	3.6	d
8	59.3	0.489	1.575	310	4.982	4	7.0	9.0	m
9	61.2	0.504	1.527	112	4.982	4	10.8	10.2	m
10	62.9	0.516	1.492	301	4.987	4	12.4	10.9	m
11	66.0	0.540	1.427	311	4.980	8	3.1	2.4	d
12	67.2	0.548	1.405	202	4.990	4	6.5	7.9	md
13	74.6	0.602	1.278	321	4.980	8	12.4	16.4	f
14	78.6	0.629	1.223	222	4.987	4	7.4	6.9	md
15	84.1	0.666	1.155	312	4.984	8	9.0	10.3	mf
16	85.8	0.678	1.136	411	4.974	8	15.5	14.3	mf
17	88.0	0.692	1.112	240	4.974	4	6.6	5.4	d
18	89.0	0.698	1.102	103	4.974	4	3.5	4.5	d
19	100.0	0.764	1.008	213	4.972	8	15.5	15.9	f
				402	5.000	4			
20	106.6	0.800	0.964	332	4.972	4	8.5	7.2	d
21	108.2	0.808	0.953	501	4.973	4	13.9	16.0	f
				341	4.973	8			
22	111.0	0.823	0.936	303	4.976	4	23.8	22.0	ff
23	112.5	0.830	0.928	242	4.970	8			
24	120.1	0.865	0.891	521	4.975	8	13.7	14.4	f
25	123.2	0.879	0.876	323	4.975	8	12.2	13.4	mf
26	132.0	0.913	0.845	152	4.970	8	17.3	17.7	mf
27	137.2	0.931	0.827	114	4.977	4	34.6	32.6	ff
				143	4.975	8			
28	147.7	0.959	0.804	204	4.972	4	11.7	12.5	md
29	152.0	0.970	0.794	124	4.975	8	2.0	3.4	m
				243	4.970	8			
30	161.0	0.986	0.781	442	4.970	4	33.0	26.0	mf

La linea 2 non è stata ordinata. La formola (2) di Ewald come si vede porta ad un miglior accordo fra le intensità calcolate e le osservate.

Da questa tabella si ricava come valore medio della costante a , 4.98 Å e conseguentemente, ritenendo il rapporto assiale 0.682, $c = 3.397$ Å il volume della cella è 84.30 Å. Da questi valori si ricava per il peso specifico:

$$\frac{2 \cdot 1.66 \cdot 239.07}{84.30} = 9.42.$$

Le determinazioni sperimentali precedenti danno per il prodotto naturale da 9.39 a 9.44, per quello artificiale da 8.90 a 9.36⁽¹⁾. Il valore calcolato è in buonissimo accordo col più alto trovato come logicamente deve verificarsi.

Nella letteratura cristallografica si trovano indicate per il biossido di piombo due forme⁽²⁾: una tetragonale⁽³⁾ che si riscontra in natura come minerale Plattnerite ed una esagonale. La prima perfettamente individuata con rapporto assiale c/a 0.6764 (Ayers), coincide esattamente con quella da me studiata. Per la forma esagonale non si hanno dati precisi e l'affermazione è basata soprattutto su misure di Lüdecke eseguite sopra prodotti artificiali ottenuti da Geuther⁽⁴⁾.

L'esame röntgenografico di prodotti ottenuti anche per vie diverse mi ha sempre dato la stessa forma tetragonale.

D'altronde l'esistenza della forma esagonale appare dubbia anche dall'esame del lavoro di Geuther. In esso infatti non si trova una affermazione precisa che i prodotti in questione siano biossido di piombo, anzi il contenuto sempre rilevante di ossido di potassio (per es. 21.9% di K_2O) lascia pensare che si trattasse di piombato il quale dalle misure di Zambonini⁽⁵⁾ risulta romboedrico e si presenta sotto forma di lamine basali simili a quelle di cui si parla nel lavoro di Geuther.

Tuttavia si poteva da qualche accenno ritenere che il biossido esagonale si ottenesse per idrolisi del piombato. Ho quindi eseguita la sua preparazione attraverso questa via.

Fusi in crogiuolo d'argento 100 gr. di potassa alla quale avevo aggiunto 30 gr. d'acqua e vi aggiunsi lentamente del biossido di piombo spappolato in acqua. La soluzione del biossido fu incompleta. Separai il piombato dal PbO_2 rimasto inalterato mediante filtrazione su amianto. Al liquido filtrato aggiunsi da tre a quattro volte il suo volume d'acqua e lasciai avvenire l'idrolisi per ventiquattro ore. Ho lavato il prodotto bruno scuro così ottenuto con acido nitrico all'1%, e lo ho poi seccato nel vuoto su potassa.

(1) GMLIN-KRAUT, « Anorg. Chem. », 1924, 4, 2°, 219.

(2) GROTH, « Chem. Krystall », 1906, 1, 86, Dölter 1918, 3, 1°, 209.

(3) GROTH, loc. cit., 98.

(4) GEUTHER, « Lieb. Ann. », 219 (1883) 56 « Zeitsch. f. Kristall. », 11, 107. LÜ-
DECKE, « Zeitsch. f. Kryst. » (1883) 82.

(5) « Gazz. chim. it. », 35 (1905) 2, 514.

Il fotogramma ottenuto con questo prodotto coincide esattamente con quello della forma tetragonale. Un altro prodotto che all'esame röntgenografico risultò possedere la medesima struttura dei precedenti fu un biossido di piombo puro di Kahlbaum, d'aspetto quasi nero. I fatti esposti portano ad escludere la forma esagonale.

Riassumendo:

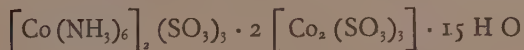
a) Si dimostra per il biossido di piombo una struttura tetragonale tipo « rutilo ». Le dimensioni della cella elementare, che contiene due molecole PbO_2 , sono $a = 4.98 \text{ \AA}$ $c = 3.40 \text{ \AA}$.

Il rapporto assiale $c/a = 0.682$ differisce leggermente da quello determinato dai cristallografi. Il peso specifico, dedotto dalle dimensioni della detta cella è 9.42, in ottimo accordo con quelli trovati direttamente.

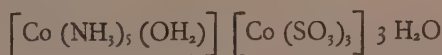
b) Tutti i preparati ottenuti anche per vie diverse hanno dimostrato la stessa forma tetragonale. Si ritiene non esistente la pretesa modificazione esagonale di Geuther e Lüdecke.

Chimica. — *Prodotti di ossidazione di solfiti complessi del cobalto trivalente.* Nota ⁽¹⁾ di SCAGLIARINI G. e TARTARINI G. presentata dal Corrisp. MARIO GIACOMO LEVI ⁽²⁾.

Si conoscono molti solfati e solfiti in cui il cobalto trivalente entra a far parte di cationi o anioni complessi. Non molti invece sono quelli in cui il cobalto entra a far parte sia dell'anione che del catione. Così ad es.



studiati dal Künzel ⁽³⁾ e dal Geuther ⁽⁴⁾;



(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Bologna.

(2) Pervenuta all'Accademia il 25 luglio 1925.

(3) « Journ. f. prakt. chem. », 72 (1857), p. 209.

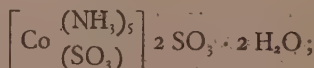
(4) « Ann. », 128 (1863), p. 161.

ottenuto dal Künzel (l. c.) da Vortmann e Magdeburg ⁽¹⁾, dal Geuther (l. c.). Non è confermato però che si tratti realmente di un sale acquopentaminico;

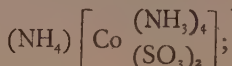


ottenuto dal Frémy ⁽²⁾ e dal Jörgensen ⁽³⁾.

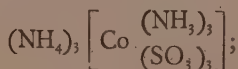
Recentemente il Riesenfeld ⁽⁴⁾ interpretò una serie di sali complessi mono- bi- tri- solfitici già ottenuti da altri autori, fra cui ricorderemo il solfito di cobalti-pentamino-solfito



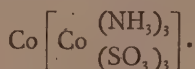
il sale di ammonio del tetramincobaltidisolfito



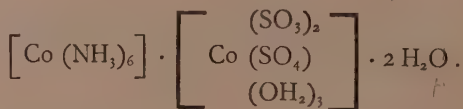
quello pure d'ammonio del triamincobaltitrisolfito



e quello cobaltico del triamincobaltitrisolfito



Scopo delle nostre ricerche fu di ottenere prodotti di ossidazione di solfiti di cobaltiamine. Così compiendo l'ossidazione all'aria di un solfito complesso preparato aggiungendo a solfito di cobalto del solfito d'ammonio, ottenemmo in condizioni speciali d'esperienza, come sarà descritto nella parte sperimentale, il seguente sale:



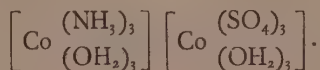
(1) « Ber. », 22 (1889), p. 2630.

(2) « Ann. de Chem. Phys. » (1852), p. 298.

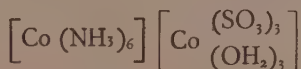
(3) « J. prak. Chem. » (2), 31 (1885), p. 68.

(4) « Z. anorg. Chem. », 132 (1924), p. 99.

Facilitando invece l'ossidazione con una corrente d'aria e agendo in soluzione concentrata ottenemmo per successive cristallizzazioni dalle rispettive acque madri una serie di sali di diverso colore dal rosso al giallo. Come lo provarono i risultati sia delle reazioni analitiche, che delle analisi quantitative i primi prodotti di ossidazione contengono ancora cobalto bivalente gli ultimi non più, non solo, ma gradatamente i gruppi SO_3 si ossidano ad SO_4 , in modo che gli ultimi prodotti di ossidazione contengono solamente residui SO_4 . Per cristallizzazione frazionata trascurando i primi prodotti costituiti da miscele di composti di diversi gradi di ossidazione ottenemmo infatti un sale a cui spetterebbe la seguente formula:



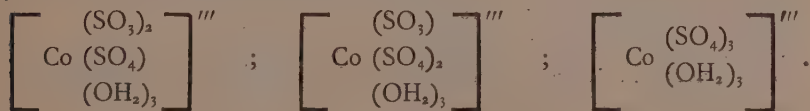
È dunque logico ritenere che si formi in un primo tempo il complesso:



assai simile al sale di Künzel già citato:



e che per successive ossidazioni si formino i complessi mono- di- e trisolfati contenenti quindi i seguenti anioni:



Le difficoltà sperimentali maggiori si incontrano nel modo di ottenere i prodotti corrispondenti a queste successive ossidazioni.

Per completare la serie mancherebbe il disolfato.

Data la insolubilità in acqua di questi sali complessi non ci fu possibile ottenere per doppio scambio sali che invece del catione cobaltaminico contenessero altri metalli. Perciò le formule di costituzione restano ancora arbitrarie.

COBALTI-ACQUO-DISOLFITO MONOSOLFATO DI ESAMIN-COBALTO.

Si prepara facendo passare un eccesso di anidride solforosa in acqua contenente in sospensione carbonato di cobalto. Alla soluzione così ottenuta si aggiunge carbonato d'ammonio in lieve eccesso in modo da neutralizzare completamente l'acido solforoso. Dalla soluzione di un color giallo-bruno, opportunamente diluita ed esposta alla luce e all'aria per una diecina di giorni circa, cristallizza il sale in bei cristalli giallo-oro. Questi cristalli filtrati alla pompa e lavati con alcool vennero seccati fra carta da filtro. Il sale è stabile all'aria.

Trov. %	Co	N	S (SO ₄)	S (totale)	H ₂ O
	20.58	14.40	5.73	17.53	6.04

per $\text{Co}(\text{NH}_3)_6 \text{Co}(\text{SO}_3)_2 (\text{SO}_4)(\text{OH}_2)_3 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$

Calc. %	Co	N	S (SO ₄)	S (totale)	H ₂ O
	20.82	14.84	5.66	16.99	6.36

L'acqua fu determinata dalla perdita in peso subita dal sale tenuto nel vuoto su acido solforico.

COBALTI-ACQUO-TRISOLFATO DI ACQUO-TRIAMIN-COBALTO.

Fu ottenuto facendo passare in una soluzione ottenuta analogamente alla precedente, ma assai più concentrata, una corrente d'aria e trascurando i prodotti delle prime cinque cristallizzazioni.

Si presenta in cristalli omogenei al microscopio di color giallo un po' scuro insolubili in acqua, alcool ed etere. Filtrati alla pompa e lavati con alcool furono seccati tra carta da filtro.

I risultati analitici sono i seguenti:

$$\text{Trov. \% Co} = 20.86. \text{ N} = 6.81. \text{ S} = 17.76$$

$$\text{per } [\text{Co}(\text{NH}_3)_3(\text{OH}_2)_3] \cdot [\text{Co}(\text{SO}_4)_3(\text{OH}_2)_3]$$

$$\text{Calc. \% Co} = 20.86. \text{ N} = 7.43. \text{ S} = 17.02.$$

È assai laborioso ottenere questo sale allo stato di sufficiente purezza, perchè quasi sempre è inquinato di prodotti di ossidazione meno avanzata.

Chimica. — *Il comportamento del piombo contenente Ra G nella formazione dell'aldeide formica secondo Thunberg.* Nota ⁽¹⁾ della dott. ADRIANA STOLFI presentata dal Socio F. ZAMBONINI ⁽²⁾.

Com'è noto, di recente T. Thunberg ha fatto conoscere delle esperienze assai interessanti per la teoria dell'assimilazione del biossido di carbonio ⁽³⁾. Il concetto fondamentale dello studioso tedesco è che, mediante un processo fotochimico, l'acqua dà origine a perossido d'idrogeno e libera idrogeno:



L'idrogeno messo in libertà e quello dell'acqua ossigenata si aggiungono al biossido di carbonio, con formazione di idrato di formaldeide (glicolmetilenico).



L'idrato di formaldeide elimina, infine, acqua dando aldeide formica:



Le idee del Thunberg hanno dato luogo a discussioni, per esempio, da parte del Weigert ⁽⁴⁾, ma, quale che possa essere il risultato finale delle indagini intorno alla precisa natura del processo fotochimico che si verifica, è certo che il Thunberg è riuscito a ridurre a formaldeide l'acido carbonico del carbonato basico di piombo. La formazione dell'aldeide formica fu posta fuori di dubbio mediante il reattivo di Schiff, usato come consigliano Willstätter e Stoll ⁽⁵⁾, e con quello di Rimini-Schryver ⁽⁶⁾.

Mi è sembrato non privo d'interesse indagare se si manifestasse una qualche differenza nelle quantità di formaldeide formatesi, operando con un carbonato basico di un miscuglio di piombo comune e di Ra G anzichè con quello non radioattivo. Infatti, per quanto le ricerche finora note abbiano condotto ad ammettere una perfetta coincidenza nelle proprietà chimiche

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale della R. Università di Napoli.

(2) Pervenuta all'Accademia il 4 agosto 1925.

(3) «Zeitschr. phys. Chem.», 1923, CVI, 305.

(4) Ibidem, p. 313.

(5) *Untersuchungen über die Assimilation der Kohlensäure*, Berlin 1918, p. 387.

(6) Cfr. WILLSTÄTTER e STOLL, p. 390.

degli isotopi appartenenti ad una medesima pleiade, non può escludersi *a priori* una influenza specifica dei singoli isotopi sulla velocità o sul rendimento di particolari reazioni.

L'interesse era reso maggiore dalle recenti esperienze di Dillon, Clarke e Hinchy ⁽¹⁾, i quali avevano creduto che fosse possibile separare gli isotopi del piombo facendo agire lo ioduro di etilmagnesio sul cloruro di piombo.

Mentre, però, io eseguivo le mie ricerche, H. Brennen ⁽²⁾ ha dimostrato che la conclusione degli autori citati non era esatta.

Come piombo radioattivo, io ho impiegato quello della cotunnite (Pb Cl_2) delle fumarole vesuviane. Il prof. F. Zambonini ⁽³⁾, nel 1906, ha scoperto la forte radioattività di quel minerale, e P. Rossi ⁽⁴⁾ ha mostrato che essa era dovuta al radio-piombo. Recentemente, poi, il prof. A. Piutti ⁽⁵⁾, insieme al dott. D. Migliacci, ha determinato il peso di combinazione del miscuglio di isotopi del piombo contenuti nella cotunnite, ed ha trovato il valore di 207.05, nettamente inferiore al peso atomico del piombo comune, non radioattivo.

Per il mio studio, mi sono servita di alcuni grammi di cotunnite, gentilmente donatimi dal prof. Scacchi.

Naturalmente, per potere stabilire un confronto, occorreva servirsi di un carbonato basico, dotato della stessa composizione, stato fisico, ecc., sia nel caso di piombo comune, sia per quello contenente Ra G ⁽⁶⁾. Perciò, invece di partire dal carbonato di piombo basico di Kahlbaum usato dal Thunberg, mi sono servita di cloruro di piombo purissimo. Sciolti in acqua bollente sia il cloruro di piombo comune che la cotunnite, ho precipitato alla ebollizione con carbonato ammonico in presenza di ammoniaca. I carbonati basici così ottenuti sono stati filtrati alla pompa, lavati ripetutamente con acqua, seccati in stufa a 60°, e tenuti per due giorni in essiccatore a Ca Cl_2 .

Dopo di che, prelevati due campioni dei carbonati, di 5 gr. precisi, ho proceduto alla distillazione con acqua ossigenata, seguendo esattamente le istruzioni del Thunberg.

Quest'ultimo indica due metodi per eseguire l'esperienza: nel primo, in un pallone a distillazione, si aggiungono al carbonato basico di piombo 100 cc. di acqua distillata, e mediante un imbuto a rubinetto si lasciano cadere nel pallone 50 cc. di una soluzione al 6% di acqua ossigenata, ottenuta per diluizione del peridrola di Merck. L'acqua ossigenata viene lasciata scorrere in modo da compensare in ogni istante le quantità che distillano.

(1) «Scient. Proc. Roy. Soc.», Dublin 1922, XVII, 53.

(2) «Compt. Rend.», 1925, CLXXX, 282.

(3) «Rend. R. Accad. Lincei», (5*), 1907, XVI, 1° sem., 975.

(4) Ibidem, p. 630.

(5) «Rendiconti R. Accad. Scienze Fis. e Mat. di Napoli», 1922.

(6) Apposite esperienze eseguite con carbonati basici di piombo non radioattivo di diversa provenienza hanno, appunto, mostrato l'influenza *quantitativa* esercitata da differenze anche piccole nella composizione e, sopra tutto, nello stato fisico.

Col secondo metodo, si aggiungono alla stessa quantità di carbonato 60 cc. di acqua distillata, 30 cc. di una soluzione al 3 % di acido borico, e 10 cc. di peridrolo puro di Merck. Si usa l'acido borico per evitare la formazione di una schiuma fastidiosa che spesso si produce.

Mi sono servita del secondo di questi metodi, naturalmente dopo essermi assicurata che le sostanze da me usate non davano separatamente la reazione della formaldeide.

Le esperienze sono state eseguite contemporaneamente per i due carbonati, nelle identiche condizioni sperimentali. Del distillato si sono prelevati in appositi cilindri 50 cc. ai quali si è aggiunto 1 cc. del reattivo di Schiff. La stessa quantità di reattivo si aggiungeva contemporaneamente in altri cilindri simili ai primi, contenenti rispettivamente 15 cc., 18 cc., 20 cc., 25 cc., di una soluzione titolata di aldeide formica, diluiti a 50 cc.

In queste condizioni, la reazione è sufficientemente rapida, e la colorazione va man mano intensificandosi. La stabilizzazione del colore si ottiene dopo parecchie ore, e il confronto viene, per maggior sicurezza, stabilito dopo un giorno. I due distillati danno colorazioni dello stesso ordine di grandezze, e eguali a quella del cilindro contenente 20 cc. della soluzione campione.

Quest'ultima è stata preparata partendo da una soluzione di aldeide formica a titolo empirico, determinato col metodo di Blanck e Finkenheiner.

Della soluzione così titolata (1 cc. = 0.02508 gr. di CH_2O), si sono prelevati 10 cc., che si sono diluiti a 500 cc. Siccome però la concentrazione della nuova soluzione era ancora molto più elevata di quanto non fosse richiesto per il mio dosaggio colorimetrico, così se ne sono prelevati 5 cc. che si sono diluiti ulteriormente a 250 cc. Un centimetro cubico di questa nuova soluzione contiene gr. 0,00001003 di CH_2O . La concentrazione in CH_2O osservata nei due distillati risulta perciò uguale a gr. 0.00002006 per 50 cc.

Sarebbe, forse, stato più opportuno servirsi del reattivo di Rimini, ma trattandosi qui di una ricerca eseguita nelle stesse condizioni di una precedente indagine, mi sono dovuta riportare a quelle indicate dallo sperimentatore.

Dalla mia esperienza risulta, ad ogni modo, che nessuna influenza apprezzabile esercita la presenza del Ra G sulla formazione di CH_2O .

Fisica terrestre. — *Teoria della propagazione dell'energia rag-
giante nell'acqua.* Nota di FRANCESCO VERCELLI, presentata dal
Socio VOLTERRA ⁽¹⁾.

Recenti lavori del Mecke ⁽²⁾ e del Dietzius ⁽³⁾ su la riflessione e l'as-
sorbimento delle radiazioni nelle nubi e nelle nebbie offrono la base per lo
sviluppo di una teoria sulla propagazione delle radiazioni nell'acqua e nei
liquidi in generale.

Finora si è generalmente ammesso che l'estinzione delle radiazioni
attraversanti un mezzo sia correttamente rappresentata da una delle relazioni

$$(1) \quad I = I_0 q^x \quad (\text{formola del Bouguer})$$

$$(2) \quad I = I_0 e^{-\alpha x} \quad (\text{formola del Lambert})$$

ove I_0 indica l'intensità del flusso di radiazioni omogenee incidenti, I l'in-
tensità del flusso dopo attraversato lo strato di spessore x , q e α sono funzioni
della sola lunghezza d'onda λ delle radiazioni e delle proprietà ottiche del
mezzo, e sono quindi costanti per un dato mezzo e una data radiazione.
La q è detta *coefficiente di trasmissione*; la α *coefficiente di assorbimento* o meglio
di estinzione; i due coefficienti sono legati dalla relazione $q = e^{-\alpha}$.

La (2) deriva dalla relazione differenziale

$$(3) \quad dI = -\alpha I dx$$

integrata colla condizione che sia $I = I_0$ per $x = 0$.

Le relazioni (1) (3) traggono origine dal campo atmosferico, ove sono
usate per figurare la propagazione delle radiazioni nell'aria. Le accurate
esperienze di Abbot e Fowle giustificano pienamente la validità di tali rela-
zioni, limitatamente però all'aria secca e pura delle alte montagne ⁽⁴⁾. In
questo caso l'estinzione delle radiazioni deriva quasi esclusivamente da rifles-
sione diffusa molecolare, e i coefficienti di estinzione relativi a diverse regioni

(1) Pervenuta all'Accademia il 3 agosto 1925.

(2) *Ueber Zerstreuung und Beugung des Lichtes durch Nebel und Wolken.* « Ann. der
Physik », 1921.

(3) *Die Absorption des Lichtes in trüben Medien, insbesondere Nebel und Wolken.*
« Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre ». Bd XI, Heft 2, 1923.

(4) « Ann. of the Astrophys. Obs., Smiths. Instit. », I, II, III.

dello spettro soddisfano alla nota legge di Rayleigh, sono cioè inversamente proporzionali alle quarte potenze delle corrispondenti lunghezze d'onda ⁽¹⁾.

Le formole Bouguer-Lambert cessano di valere quando l'aria è umida e torbida; volendo figurare il fenomeno ancora con semplice formola esponenziale si deve allora mutare il significato dei coefficienti, i quali cessano di essere costanti fisiche del mezzo, e diventano funzioni della torbidità, dell'umidità e dello spessore χ dello strato aereo considerato ⁽²⁾. Le formole sono in difetto, in questi casi, perchè all'azione di estinzione dovuta alla riflessione diffusa si aggiunge quella derivante dall'assorbimento e dalle complesse azioni di riflessione, diffusione, ecc. esercitate dalle particelle estranee.

Per analogia coll'aria le formole Bouguer-Lambert vennero estese all'acqua e in generale a tutti i liquidi; con esperienze di laboratorio, operando su piccoli campioni, vennero determinati i relativi coefficienti. Quando si tentò di valutare questi coefficienti operando sulle grandi masse d'acqua lacuali e marine, si trovò che i coefficienti relativi a quote diverse risultavano disuguali. Il fatto fu imputato a torbidità del mezzo e si continuò a ritenere valide le formole Bouguer-Lambert. La torbidità complica e altera il fenomeno in modo più o meno grave e talora anche con forme estreme. Ma il disaccordo tra dette formole, che suppongono costanti i coefficienti, e le osservazioni, che indicano invece una variabilità di essi, non deriva solo dalla torbidità; esso è conseguenza necessaria del fatto che l'estinzione delle radiazioni nei liquidi, anche se limpidi e puri, deriva da due distinti fattori: assorbimento molecolare (trasformazione in energia termica) e riflessione diffusa. La relazione differenziale (3) risulta incompleta; le formole (1) (2) non possono essere corrette.

Questa conclusione è avvalorata in modo decisivo dai risultati di recenti serie di osservazioni spettrofotometriche, tra le quali figurano anche ricerche personali compiute durante la crociera della R. Nave *Magnaghi* nelle acque del Mar Rosso, ove si potè operare in condizioni ideali di luce, col sole allo zenit. I dati di queste ricerche sono incompatibili colle classiche formole sulla propagazione dell'energia raggiante.

La base per lo sviluppo di una nuova teoria si trova, come abbiamo ricordato, nelle recenti trattazioni del Mecke e del Dietzius relative all'aria torbida; e consiste in questo: si distingue l'estinzione derivante da assorbimento propriamente detto, da quella dovuta a riflessione diffusa, rappresentando le due azioni con distinti coefficienti; accanto alle radiazioni penetranti si considerano quelle riflesse e si valuta l'assorbimento e le riflessioni che a loro volta esse vengono a subire. Si perviene così a sostituire alla relazione incompleta (3) un sistema di due equazioni differenziali, che si presta

(1) «Philos. Mag.», 47, 1899, p. 375 e seg.

(2) FRANZ LINKE, *Transmissions-Koeffizient und Trübungsfaktor*. «Beiträge zur Physik der freien Atm.», Bd X, Heft 2-3, 1922.

a facili soluzioni e applicazioni. Il problema così posto venne trattato in casi particolari dal Mecke e nel caso generale dal Dietzius, con speciale riguardo alle nubi e alle nebbie. Volendo sviluppare una teoria analoga per l'acqua, e in particolare per le grandi masse d'acqua dei laghi e dei mari, si ottiene un sistema di equazioni differenziali formalmente identico. Le soluzioni possono però essere sviluppate convenientemente in forma diversa; si perviene così a formole più semplici e di facile applicazione nella trattazione delle questioni che si presentano in questo genere di ricerche.

Ci riferiamo sempre al caso di radiazioni omogenee di data lunghezza d'onda; e indichiamo con: I_0 l'intensità delle radiazioni penetranti verticalmente in superficie; I l'intensità di esse dopo attraversato uno strato di spessore z , contato verticalmente verso il basso; J l'intensità del flusso diffuso verso l'alto alla quota z ; α e β i coefficienti di assorbimento e di riflessione diffusa corrispondenti all'azione globale esercitata da uno strato unitario dell'acqua, limpida o torbida, che si considera e che si suppone otticamente omogenea; h la profondità del piano che delimita inferiormente lo strato considerato e che può corrispondere (ma non necessariamente) al fondo del bacino acqueo.

Tutte le quantità ora indicate sono positive; inoltre $\alpha < 1$; $\beta < 1$; $\alpha + \beta < 1$.

Il flusso I nell'attraversare uno strato successivo dz subisce questi incrementi:

- $\alpha I dz$, per assorbimento molecolare (trasformazione in energia termica;
- $\beta I dz$, per riflessione diffusa in alto;
- + $\beta J dz$, per diffusione in basso del flusso riflesso J .

Analoghi incrementi si possono valutare per il flusso J e si ha in definitiva il sistema di equazioni differenziali:

$$(4) \quad \begin{cases} dI/dz = -\alpha I - \beta(I - J) \\ dJ/dz = \alpha J - \beta(I - J) \end{cases}$$

Se fosse $\beta = 0$, se cioè non vi fosse riflessione ma solo assorbimento, la prima di queste equazioni coinciderebbe colla (3).

Poniamo:

$$(5) \quad \gamma^2 = \alpha(\alpha + 2\beta)$$

$$(6) \quad \delta^2 = \alpha/(\alpha + 2\beta) = 1/(1 + 2\beta/\alpha)$$

La soluzione del sistema (4) assume la forma:

$$(7) \quad \begin{cases} I = P e^{\gamma z}(1 - \delta) + Q e^{-\gamma z}(1 + \delta) \\ J = P e^{\gamma z}(1 + \delta) + Q e^{-\gamma z}(1 - \delta) \end{cases}$$

Poniamo queste condizioni ai limiti;

$$\text{per } x = 0, \quad I = I_0 \quad ; \quad \text{per } x = h, \quad J = \mu I$$

ove μ indica la frazione di flusso I diffusa in alto dalle acque o dal fondo sottostante allo strato di spessore h , indica cioè l'albedo di tali acque o di tale fondo, ed è $0 \leq \mu < 1$. Con queste condizioni P e Q risultano determinate.

Poniamo inoltre:

$$(8) \quad \varepsilon = (1 + \delta)/(1 - \delta)$$

$$(9) \quad \theta = (\varepsilon^{-1} - \mu)/(\varepsilon - \mu).$$

Le quantità così introdotte ε e θ sono funzioni di δ , e quindi dei coefficienti ottici del mezzo α e β , e dell'albedo μ ; e soddisfano alle relazioni:

$$0 \leq \gamma \leq 1 \quad ; \quad 0 \leq \delta \leq 1 \quad ; \quad \varepsilon \geq 1.$$

Per i valori di μ che si hanno in natura (si veda la formola (19) seguente) cioè per $\varepsilon^{-1} \geq \mu \geq 0$, si ha pure:

$$(10) \quad 0 \leq \theta \leq \varepsilon^{-2}.$$

Con le sostituzioni indicate, le soluzioni (7) assumono la forma:

$$(11) \quad I/I_0 = e^{-\gamma x} (1 - \theta e^{-2\gamma(b-x)}) / (1 - \theta e^{-2\gamma b})$$

$$(12) \quad J/I_0 = e^{-\gamma x} (\varepsilon^{-1} - \varepsilon \theta e^{-2\gamma(b-x)}) / (1 - \theta e^{-2\gamma b}).$$

Per le applicazioni alle acque profonde è opportuno modificare queste relazioni. Ponendo $x = h$ la (11) diventa:

$$(13) \quad I/I_0 = (1 - \theta) e^{-\gamma h} / (1 - \theta e^{-2\gamma b}).$$

Quando si possa ritenere μ costante e quindi anche θ costante (e ciò è generalmente lecito a quote profonde o per limitate variazioni di h), dalla (13), considerando la I funzione del solo parametro h , si deduce:

$$(14) \quad dI = -\gamma I \varphi(h)$$

ove si è posto:

$$(15) \quad \varphi(h) = (1 + \theta e^{-2\gamma b}) / (1 - \theta e^{-2\gamma b}).$$

Se fosse $\beta = 0$ (assorbimento senza riflessione) sarebbe $\gamma = \alpha$, $\delta = 1$, $\theta = 0$, $\varphi = 1$; e la (15) si ridurrebbe alla relazione (3); si ricadrebbe quindi nelle formole Bouguer-Lambert.

Se $\beta \neq 0$ la (14) differisce dalla (3) per la sostituzione di $\gamma \varphi(h)$ alla costante α . La $\varphi(h)$ è funzione decrescente di h , ha per limite inferiore 1 quando h cresce indefinitamente, mentre tende al limite superiore $(1 + \theta)/(1 - \theta)$ quando h si rende evanescente. Perciò è pure $\gamma \varphi(h)$ funzione decrescente di h . Ciò significa che volendo adottare semplici formole esponenziali tipo Bouguer-Lambert si dovrebbero sostituire, ai coefficienti costanti, quantità variabili colla quota h . E precisamente il coefficiente di assorbimento α dovrebbe diminuire e il coefficiente di trasmissione q dovrebbe crescere al crescere di h , in esatto accordo coi risultati delle esperienze.

Indichiamo con I_1, I_2 ; θ_1, θ_2 i valori di I e di θ corrispondenti a distinte quote h_1 e h_2 , e riteniamo $h_2 > h_1$. Dalla (13) si deduce:

$$(16) \quad \gamma' - \gamma = \log_e \{ (1 - \theta_1) (1 - \theta_2)^{-1} (1 - \theta_2 e^{-2\gamma h_2}) (1 - \theta_1 e^{-2\gamma h_1})^{-1} \} / (h_2 - h_1)$$

ove si è posto:

$$(17) \quad \gamma' = (\log_e I_2 / I_1) / (h_2 - h_1).$$

Per valori sufficientemente grandi di h (per l'acqua bastano valori di m. 50 nel caso di radiazioni rosse e di 500 m. per radiazioni azzurre) risulta $\gamma' = \gamma$; la costante ausiliaria γ può allora essere calcolata colla (17) noto il rapporto I_1 / I_2 ; essa risulta indipendente da θ e quindi dall'albedo μ del fondo e degli strati acquei interni.

La differenza $\gamma' - \gamma$ non ha segno definito; per gli usuali valori che si hanno in natura (limitate variazioni di μ al variare di h) risulta normalmente $\gamma' > \gamma$.

Nota la costante γ , la (16) può servire per il calcolo di θ e quindi di δ e infine dei coefficienti α e β . Difficilmente però i dati sperimentali hanno l'esattezza richiesta per l'applicazione della (16); il valore che si può attribuire a μ è alquanto incerto. Si dovrà usualmente limitare il calcolo alla sola γ , deducendo le altre costanti dalle relazioni seguenti.

Ponendo $\chi = 0$ nella (12) si ha il rapporto fra radiazione diffusa e incidente in superficie, cioè l'albedo superficiale $a = J/I_0$; ed è:

$$(18) \quad a = (\epsilon^{-1} - \epsilon \theta e^{-2\gamma h}) / (1 - \theta e^{-2\gamma h}).$$

L'albedo a è dunque funzione crescente di h ; per $h \neq 0$, si ha $a = \mu$, cioè per acque di lieve spessore il potere diffusivo in superficie tende a identificarsi con quello del fondo; per h indefinitamente crescente, a tende a un limite superiore, che indicheremo con A , ed è:

$$(19) \quad A = \epsilon^{-1} = (1 - \delta) / (1 + \delta).$$

L'albedo superficiale A in acque profonde risulta indipendente dall'albedo μ del fondo; la radiazione riflessa dal fondo, per h sempre crescenti, finisce infatti per essere senza influenza su l'albedo superficiale. Dalla (19) si deduce, tenendo presente la (6):

$$(20) \quad \delta = (1 - A)/(1 + A)$$

$$(21) \quad \beta/\alpha = 2A/(1 - A)^2.$$

Per valori crescenti di β/α , A tende ad 1; per valori decrescenti a zero si può porre:

$$A = \beta/2\alpha \quad ; \quad \beta/\alpha = 2A.$$

Nota sperimentalmente A resta dunque determinato il rapporto β/α ; quest'ultimo valore, unitamente a quello di γ , determinato colla (17), dà i valori dei coefficienti ottici α e β .

Per le (18), (19) e (13) la differenza:

$$(22) \quad A - a = \theta e^{-2\gamma h} (\epsilon - \epsilon^{-1}) / (1 - \theta e^{-2\gamma h}) = (\epsilon^{-1} - \mu) I/I_0.$$

pei valori ordinari di μ è sempre positiva, cresce al diminuire di h , e ha per limite superiore $\epsilon^{-1} - \mu$, se h tende a zero. Queste osservazioni possono essere estese anche alle riflessioni esercitate dagli strati interni alla massa liquida; tali riflessioni hanno valori che si approssimano all'albedo μ del fondo, se si tratta di strati prossimi al fondo; e crescono sino a raggiungere il valore $A = \epsilon^{-1}$ presso la superficie esterna, se si tratta di acque profonde, e sino al valore a se lo spessore è limitato.

L'energia termica derivante da irraggiamento diretto si può valutare noti gli equivalenti termici dei singoli gruppi di radiazioni incidenti I_0 , osservando che uno strato liquido di spessore h assorbe la quantità T di radiazioni data dalla relazione $T = I_0 (1 - a) - I(1 - \mu)$.

Per le (13) e (18) si ha:

$$(23) \quad T/I_0 = [(1 - \epsilon^{-1})(1 + \epsilon\theta e^{-2\gamma h}) - (1 - \theta)(1 - \mu)e^{-\gamma h}] / (1 - \theta e^{-2\gamma h}).$$

Il secondo membro della (23) è funzione crescente di h ; ed ha per limite superiore, quando h sia abbastanza grande,

$$(24) \quad \max T/I_0 = 1 - \epsilon^{-1} = 1 - A = 2\delta/(1 - \delta)$$

formole di facile valutazione. La differenza tra questo valore massimo di T e la radiazione incidente I_0 corrisponde alla radiazione diffusa verso l'esterno.

Le formole sinora sviluppate si riferiscono a radiazioni di data lunghezza d'onda; ove si consideri la totale radiazione solare le quantità che

figurano nelle formole stesse devono essere considerate come funzioni delle corrispondenti lunghezze d'onda λ ; con semplice integrazione estesa al campo di variazione di λ si ottengono i valori globali della radiazione penetrante, o diffusa, o assorbita.

La teoria ora svolta, mentre sembra essere adeguata alla natura del fenomeno in modo ben più completo che non le semplici formule esponenziali sinora usate, traccia anche l'indirizzo che si deve seguire nelle ricerche sperimentali, in quanto precisa quali siano le quantità che interessa determinare coll'osservazione, per poter procedere alla valutazione delle costanti ottiche che caratterizzano le acque del bacino considerato.

Il caso generale di incidenza obliqua sarà trattato in una nota successiva.

Mineralogia. — *Sulla epsomite della miniera Nord-Ovest inferiore di Idria*⁽¹⁾. Nota del Dott. E. ONORATO presentata dal Socio F. MILLOSEVICH.

Il prof. Millosevich, in una visita alla miniera di Idria, ebbe in dono diversi campioni di epsomite che mi affidò per lo studio. Il minerale non si presta a ricerche cristallografiche, sia per la piccolezza dei cristalli, sia per l'azione dell'umidità che ha incurvato gli spigoli e le facce di quelli più grossi. L'abbondanza e la varietà del materiale raccolto mi ha permesso invece distinguere i campioni secondo la loro composizione chimica e nella presente nota riferisco i risultati delle analisi eseguite.

Secondo le notizie ricevute dall'ing. Pellis⁽²⁾, vice-direttore della miniera di Idria, e quelle rilevate dal Kropáč⁽³⁾, l'epsomite si è mostrata finora soltanto nelle dolomie tenere ed in quelle dure ma fessurate, triturate o caver-nose, quasi del tutto prive di cinabro. Manca invece oppure si ritrova, in quantità molto trascurabile, nella dolomia compatta e nella breccia dolomitica, anche se molto triturata.

Nella dolomia molto triturata e con tracce di cinabro dell'XI livello (— 270 m.)⁽⁴⁾ è stato raccolto il campione formato da lunghe fibrille sericee e bianche, isolate e riunite in fascetti. È questa la varietà più nota dell'epsomite di Idria e viene ricordata anche dallo Schrauf⁽⁵⁾. Al microscopio polarizzatore, con l'aiuto della lente di Bertrand, alcune di queste fibrille

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Roma; pervenuto all'Accademia il 19 agosto 1925.

(2) Colgo l'occasione per ringraziare ancora una volta l'ing. Pellis per le informazioni fornitemi al riguardo.

(3) KROPÁČ J., *Die Lagerstättenverhältnisse des Bergbaugebietes Idria*. Wien, 1912, p. 49.

(4) (— m) indica la profondità del livello dall'orifizio del pozzo Francesco.

(5) « Neues Jahrbuch für min. geol. und pal. », 1893, I, p. 464.

lasciano vedere l'uscita di uno degli assi ottici il cui piano risulta normale alla direzione di allungamento. L'indice di rifrazione, nella stessa direzione, è inferiore a 1.462 del tetracloruro di carbonio ed è superiore a quello di una miscela di tetracloruro di carbonio ed alcool assoluto, il cui valore, determinato con il totalrifrattometro, risultò uguale a 1.448. Si può concludere senz'altro che l'allungamento delle fibrille, cosa del resto generale per i cristalli di epsomite, è parallelo all'asse α . Quest'asse coincide infatti con la normale ottica ed ha $\beta = 1.4554$, secondo le determinazioni di Christiansen ⁽¹⁾.

Le fibrille, ben separate da poche particelle brunastre di dolomia, diedero la seguente composizione:

	<i>Trovato</i>	<i>Teorico</i>
MgO	16.44	16.36
CaO	tr.	—
SO ₃	32.67	32.50
H ₂ O (a 205° c.)	50.75	51.14
	<hr/> 99.86	<hr/> 100.00

P. sp. 1.677.

La purezza delle fibrille è confermata dal valore del peso specifico, identico a quello dato dal Retgers ⁽²⁾ per la fase rombica del solfato di magnesio eptaidrato.

Al VII livello (— 184 m.), nelle larghe fessure della dolomia tenera e del tutto sterile, fu raccolto un campione fibroso-compatto. Il colore è grigiastro per molte particelle di dolomia bituminosa. Le fibre isolate si rassomigliano per i caratteri ottici e per la composizione chimica a quelle dell'XI livello, ma se ne distinguono perchè corte ed incurvate. Nel campione, perpendicolarmente alle fibre, si vedono interruzioni stratificate.

Dai visitatori delle gallerie di Idria è anche conosciuta la formazione stalattitica a grossi bernoccoli che taluni distinguono come formazione reniforme. Fu raccolta al VI livello (— 174 m.), nella dolomia più dura del VII ed XI, del tutto sterile, fessurata e con stillicidio d'acqua dalla volta. La parte prevalente del campione è di forma grossolanamente conica, bianca e con splendore tra il grasso ed il vitreo. Essa è formata di sottili strati sovrapposti, per cui facilmente si sfalda. La stalattite nasconde sotto alcuni bernoccoli basali qualche formazione mammellonare che, per la posizione, riesce difficile isolare dalla massa rimanente. I mammelloni sono formati da un fitto intreccio di piccolissimi cristalli bianchi e lucenti che, per un piccolo strato periferico, diventano giallicci e con disposizione raggiata distinta.

(1) DANA, *System of Miner.* 1892, p. 938.

(2) RETGERS J. W., *Das specifische Gewicht isomorpher Mischungen*, « Groth Zeitschrift », XIX, 626.

Sul bernoccolo conico, specialmente alla base, si trovano sparsi tubi cilindrici di epsomite.

Rompendone alcuni ho potuto constatare che essi sono formati dall'associazione parallela di cristalli, talvolta anche molto lunghi, e compenetrati in modo che non si riesce ad isolarli che in frammenti. Dalle misure fatte al goniometro risultano presenti le facce di {110} e quelle di {010}.

Per analogia a quanto ho potuto osservare in altro campione, è da ritenere che in origine questi tubi presentassero anche internamente dei cristalli associati, però molto discosti tra loro, a differenza della zona periferica. Per tale condizione di struttura si spiega facilmente come l'aria umida, localizzando la sua azione dissolvvente sulla superficie esterna ed interna dell'aggregato, l'abbia foggato a tubo.

La composizione chimica della stalattite stratificata è data dai seguenti risultati dell'analisi chimica:

MgO	15.89
CaO	—
FeO	0.60
SO ₃	31.77
H ₂ O (a 224° c.)	51.18
	<hr/>
	99.44

P. sp. 1.675 e 1.678.

La quantità d'acqua riportata nell'analisi è la media di parecchie determinazioni. Faccio questo rilievo perchè i campioni scelti per la determinazione dell'acqua, pur tenuti avvolti tutti, prima dell'analisi, per uno stesso numero di ore in carta da filtro, hanno dato una percentuale molto differente: essa oscilla da 50.65 a 51.38. Evidentemente si tratta di un eccesso d'acqua d'assorbimento da cui dipenderebbero i differenti valori del peso specifico.

La parte tubulare non presenta che leggerissime tracce di ferro ed il peso specifico è risultato uguale a 1.665 in una determinazione e 1.668 in un'altra. Secondo me credo che possa ripetersi in questo caso quanto ho detto già sopra.

I cristallini bianchi delle masserelle mammellari sono invece più ricche in ferro. Dall'analisi risulta una percentuale di 1.58 % di FeO, la loro composizione sarebbe dunque quella di una miscela contenente il 93.89 % di $\text{MgSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$. Il peso specifico trovato è 1.693, quello calcolato 1.688. Per il peso specifico di $\text{FeSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$ ho preso il valore 1.875 dato dal Retgers⁽¹⁾ per la fase rombica di questo sale. Disaccordi nelle varie deter-

(1) Loc. cit.

minazioni di p. sp. non vi sono stati in questi cristalli, essi infatti sono, come ho detto, protetti da uno strato di cristalli giallognoli.

Il bernoccolo conico invece ed i tubi, sono completamente esposti all'umidità della galleria (77°) ed allo stillicidio d'acqua.

Nei VI livello, anche con stillicidio d'acqua dalla volta, furono raccolti altri due campioni, molto differenti però dall'ultimo descritto. Si tratta di una formazione caratteristica che non mi risulta ricordata nè per Idria, nè per altre località: sono piccole sferule, non più grosse di una goccia d'acqua, formate da microscopici cristallini lucentissimi, vitrei e con disposizione sferico-raggiata.

Le sferulette talvolta ricoprono e si confondono con una più grande, più spesso si riuniscono irregolarmente così da risultarne un aggregato dendritico, ramificatissimo e con parecchie concamerazioni. Ad uno sguardo generale essi ricordano i fiori di cavolo.

I due campioni, identici per la struttura d'aggregato, si distinguono perché, mentre l'uno è ricoperto da una crosticina bianca, terrosa e con leggeri riflessi giallognoli, dovuta a sfiorimento del minerale, l'altro è di color verde-erba oscuro per una crosticina terrosa, che non si riesce a separar bene dai lucenti e bianchi cristallini d'epsomite che ricopre. Tra le ramificazioni del campione verde si nasconde, nella parte basale, qualche grosso aggregato sferico-raggiato: esso però è quasi completamente libero da incrostazione verde. Sono riuscito ad isolare qualche cristallo più grande, terminato da facce anche ad un estremo dell'asse z . Misure goniometriche sono state possibili soltanto per la zona verticale di un cristallo ed ho ritrovato le forme 110 e 010 con i seguenti angoli:

	<i>Trovato</i>	<i>Calcolato</i> ⁽¹⁾
$110 \wedge \bar{1}\bar{1}0 =$	$89^\circ 22'$	$89^\circ 26'$
$010 \wedge 110 =$	$45^\circ 12'$	$45^\circ 17'$

Le facce terminali dello stesso cristallo danno immagini multiple ed indistinte, si riconosce però la combinazione di due sfenoidi con un prisma della forma 011 . Una faccia di sfenoide, anche nei piccoli cristalli osservati al microscopio, assumendo spesso un grande sviluppo rispetto alle altre, dà ai cristalli un abito pseudo-monoclinico.

La composizione chimica della dendritica bianca e della verde è molto differente. La crosticina verde è insolubile in acqua, ma si scioglie subito per aggiunta di acido solforico e la soluzione dà, oltre la reazione del ferro, anche quella del magnesio. Essa non è che l'alterazione di FeSO_4 in $\text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3$.

(1) DANA, *System of Miner.*, 1892, p. 938.

Nell'analisi I sono riportate le percentuali ottenute per i cristalli della varietà bianca.

Per l'altra varietà ho creduto opportuno eseguire due analisi, una (anal. II) sui cristalli sottostanti alla crosta di solfato basico di ferro, l'altra (anal. III) sui cristalli delle sferule grosse, esenti da tale alterazione. La difficoltà di procacciarmi una certa quantità di materiale per l'analisi, mi ha costretto a limitarmi, nella seconda, a determinare soltanto la percentuale delle basi:

	I	II	III	
			<i>Trovato</i>	<i>Calcolato</i> ⁽¹⁾
MgO	16.33	13.44	14.06	—
CaO	0.30	—	—	—
FeO	0.36	4.68	4.42	—
SO ₃	32.43	31.91 (calc.)	31.80	32.37
H ₂ O	50.65	50.21 (»)	49.49	50.84
	100.07	100.24	99.77	
P. sp.	1.678	p. sp. 1.713	p. sp. 1.681	

Dai risultati delle analisi II e III si ha che i cristalli sono composti della seguente miscela isomorfa:

	II	III
FeSO ₄ · 7 H ₂ O	18.07	17.33
MgSO ₄ · 7 H ₂ O	81.93	82.67
	100.00	100.00

Riporto i valori del peso specifico calcolato per queste due miscele, messo in confronto con quello determinato:

	<i>Trovato</i>	<i>Calcolato</i>	<i>Differenza</i>
II	1.713	1.710	+ 0.003
III	1.681	1.696	— 0.015

Il calcolo del peso specifico per i cristalli della II, conferma che essi sono una miscela isomorfa dei due solfati nelle proporzioni ricavate dall'analisi chimica. Per la III invece la differenza in meno di $\frac{15}{1000}$ non è tale da

(1) Il calcolo è stato fatto rispetto ai valori trovati delle basi.

farla rientrare nel limite degli errori sperimentali, ritengo perciò che vi sia un piccolo eccesso in FeO. Evidentemente, per quanto abbia sacrificato molto materiale e messo molta cura nella scelta della parte da analizzare, sarà sfuggito, date le difficoltà di separazione meccanica, qualche cristallino non ossidato di solfato ferroso, esistente sotto l'incrostazione verde.

Comparando le analisi dei singoli campioni si vede come il minerale è molto puro nei livelli più bassi e che in una stessa formazione stalattitica la composizione chimica e la struttura d'aggregato può essere differente.

La galleria dell'XI livello in cui sono state raccolte le fibre setacee, non ha stillicidio d'acqua e la temperatura arriva appena a 16°, notevole è invece l'umidità dell'aria (85%). Secondo le informazioni avute le fibrille setacee si formano, in periodo di tempo relativamente breve, man mano che si procede nei lavori di escavazione della galleria. Credo perciò che il minerale si sia formato, almeno in parte, già prima dello scavo e che l'umidità ne abbia favorito la cristallizzazione in lunghe fibre, pendenti dal tetto della galleria.

Non credo si possa venire alla stessa conclusione per la varietà fibroso-compatta del VII livello, malgrado le condizioni della galleria siano quasi le stesse di quella del XI. Infatti l'umidità è dell'83 %, la temperatura invece è più alta (20° 1/2), mancano però notizie per ritenerla di formazione antecedente o posteriore allo scavo. La compattezza dell'associazione fibrosa rende probabile la prima ipotesi, la curvatura delle fibre e le interruzioni statificate sembra infatti un fenomeno posteriore alla formazione del minerale. Inoltre credo che da formazioni simili si possano formare, nelle miniere sempre umide come quella dell'XI livello, le lunghe fibrille.

Le formazioni raccolte nel VII livello certamente derivano dall'evaporazione di soluzioni sature di solfato di magnesio, si ha infatti stillicidio d'acqua ed una temperatura favorevole (23° circa). Per la viscosità della soluzione, un piccolo insetto dalle elitre rosso-sangue è rimasto imprigionato negli ultimi strati della formazione a bernoccoli.

La presenza dell'epsomite nella dolomia triassica di Idria è poi dovuta ad una reazione tra il carbonato di magnesio ed il solfato di ferro prodotti dall'alterazione della pirite. Questo minerale infatti impregna anche le dolomie sterili della miniera di Nord-Ovest. Una spiegazione simile è data dal Küss⁽¹⁾ per l'epsomite presente negli scisti dolomitici del Lias Inferiore del Peychagnard (Isère).

(1) Küss H., *Epsomit von Peychagnard*, « Groth Zeitschrift » XI, 206.

Paleontologia. — *Sugli Echinidi cenozoici della Cirenaica raccolti dall'ing. Camillo Crema.* Nota di G. CHECCHIA-RISPOLI, presentata dal Socio C. F. PARONA ⁽¹⁾.

L'ing. Camillo Crema del R. Ufficio Geologico, nel suo ultimo viaggio in Cirenaica (1920-21), durante una missione di studio affidatagli dal Ministero delle Colonie e da quel Governo coloniale, ha raccolto, tra l'altro, un ricco e svariato materiale paleontologico di notevole interesse; del quale solamente una piccola parte è stata finora descritta ⁽²⁾, mentre l'altra è tuttora in corso di studio. La conoscenza di tutto il materiale, che si trova depositato presso il R. Ufficio Geologico, quando ne sarà ultimata la illustrazione, è destinata a colmare molte lacune che si hanno su quelle faune terziarie ed a rettificare meglio la posizione stratigrafica di talune specie, per le numerose osservazioni sul terreno, con le quali l'ing. Crema ha corredato le sue raccolte.

Egli ha voluto molto liberalmente affidare a me lo studio dei Foraminiferi e degli Echinidi, del che io gli sono grato. La collezione degli Echinidi poi, per il numero e la varietà delle forme e per la conservazione degli esemplari, in certi casi ottima, è importante perchè accresce di molto le nostre conoscenze sull'Echinofauna terziaria di quella nostra Colonia. Ed invero queste erano finora molto limitate e non tutte le specie citate ci sono completamente e sicuramente note, a causa della cattiva conservazione del materiale finora raccolto. Brevemente ricordo che il primo a descrivere un certo numero di echinidi, una diecina circa, è stato il Gregory ⁽³⁾. In seguito, grazie al materiale portato dal cav. I. Sanfilippo, io ho potuto riprendere lo studio di taluni di questi, completandone la diagnosi e chiarendone anche la posizione stratigrafica ⁽⁴⁾. Di recente il prof. G. Stefanini, in una importante Monografia sui fossili terziari della Cirenaica, ha aggiunto ancora qualche altra forma ⁽⁵⁾ ed infine ultimamente ho potuto dare, in due miei

(1) Lavoro eseguito nel R. Ufficio Geologico in Roma; pervenuto il 5 agosto 1925.

(2) CREMA C., *Il Maestrichtiano in Cirenaica*. « Rend. R. Acc. dei Lincei », seduta 5 febbraio 1922; RAINERI R., *Alge fossili mioceniche di Cirenaica raccolte dall'ing. Crema*, « Nuova Notarisia », 1923; ZUFFARDI-COMERCI R., *Subtilicyathus, nuovo genere di corallario*, « Boll. R. Uff. Geologico d'Italia », vol. 49°, 1924; id., *Coralli cenozoici della Cirenaica*, « Boll. R. Uff. Geol. d'Italia », vol. L, 1925.

(3) GREGORY J. W. and OTHERS, *Contributions to the geology of Cyrenaica*. « Quart. Journ. Geol. Soc. », vol. XVII, 1911.

(4) CHECCHIA-RISPOLI G., *Sopra alcuni Echinidi Oligocenici della Cirenaica*. « Giornale di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo », vol. XXX, 1913.

(5) STEFANINI G., *Fossili terziari della Cirenaica*. « Palaeontographia Italica », volume XXVII, 1921.

lavori, qualche notizia su taluni clipeastri dell'Oligocene e del Miocene di quella regione: riguardo a questi ultimi mancava finora qualsiasi indicazione (1).

*
* *

Lo studio del materiale raccolto dall'ing. Crema, ultimato per ciò che riguarda la parte descrittiva, ha permesso di distinguere ben ventisette specie di Echinidi e di constatare inoltre la presenza di varie altre, la cui determinazione purtroppo è dubbia per il loro stato frammentario, o perchè gli esemplari sono troppo logori.

Le specie determinate, di cui parecchie sono nuove, vengono distribuite parte nell'Eocene, ove gli Echinidi sono molto scarsi, nell'Oligocene e nel Miocene, ove sono più abbondanti. Appartengono all'Eocene: *Porocidaris Schmideli* Münster, *Phymosoma Almerai* Lambert, *Schizaster Batheri* Fourtau.

Appartengono all'Oligocene: *Tretodiscus Duffi* Gregory, *Fibularia piriformis* Ag., *Fib. Franchii* sp. n., *Scutella* cfr. *Agassizi* Opponh., *Stolonoclypeus biarrizensis* Cotteau, *Stol. biarrizensis*, var. *Trotteri* Gregory, *Stol. libycus* sp. n., *Echinolampas chercherensis* Gauthier, *Brissoides Zuffardii* sp. n., *Vasconaster Lamberti* Gregory.

Appartengono al Miocene: *Scutella* cfr. *sardica* Lambert, *Stolonoclypeus isthmicus* Fuchs, *Clypeaster Priemi* Gauthier, *Clyp. Cremai* (2) Checchia-Rispoli, *Clyp. latirostris* Agassiz, var. *pedemontana* Lambert, *Clyp. Scillae* Desmoulins, *Hypsoclypeus plagiosomus* Ag. *Echinolampas giganteus* sp. n., *Ech. curtus* Pomel., *Brissoides Paronai* sp. n., *Brissus oblongus* Forbes, *Brissopsis crescentinus* Agassiz, *Schizaster eurynotus* Agassiz, *Opissaster Cerullii* sp. n., *Lovenia Loveni* sp. n.

Se a questo elenco aggiungiamo le specie indicate dal Gregory e dallo Stefanini, ma da noi non rinvenute, cioè: *Fibularia Luciani* de Loriol, *Scutella tenera* Laube, *Echinolampas discus* Desor, *Hypsoclypeus hemisphaericus* Greg., *Hemiaster Scillae* Wright, *Schizaster ederi* Greg., *Echinodiscus nummulus* Stef., *Schizaster sardiniensis* Cotteau, abbiamo un complesso di 36 specie per tutti i terreni terziari della Cirenaica. Questo numero è certamente modesto se paragonato specialmente con quello di altre regioni dell'Africa settentrionale, ma è tale da permettere di stabilire già qualche relazione tra la Echinofauna terziaria della Cirenaica e quelle coeve di altre località del bacino mediterraneo occidentale, come sarà più particolarmente detto nel lavoro in corso di preparazione.

(1) CHECCHIA-RISPOLI G., *Osservazioni sulla morfologia interna dei Clipeastri e loro classificazione*, «Palaeont. Ital.», vol. XXVI, 1920; e *Nuove osservazioni sulla morfologia interna dei Clipeastri*, «Palaeont. Italica», vol. XXIX, 1923.

(2) Questo nuovo clipeastro è stato descritto e figurato nel mio citato lavoro: *Nuove osservazioni sulla morfologia interna dei Clipeastri*.

Botanica. — *Contribuzione allo studio della sistematica del gen. « Cuscuta » (Sezione « Chlistogrammica » Englm.).* Nota della dott. G. CAMPANILE presentata dal Socio R. PIROTTA ⁽¹⁾.

Gli studiosi non si sono ancora messi di accordo circa la presenza o meno di cuscute americane in Italia o per lo meno circa la determinazione della specie o delle specie introdotte.

Per stare agli ultimi risultati delle ricerche, secondo lo studio fatto da me in collaborazione col prof. Traverso, l'unica specie di cuscute grossa parassita delle colture di medica e del trifoglio in Italia è la *C. pentagona* Englm., risultato degno di ogni considerazione avendo confrontato detta cuscute con campioni di *C. pentagona* Englm. nata da semi gentilmente inviatici dall'America dal prof. Yuncker.

Secondo il D'Ippolito invece, il quale si fonda esclusivamente sui caratteri dei semi, l'unica specie americana introdottasi in Italia, sarebbe la *C. suaveolens*, Ser. (*C. racemosa*, var. *Chiliana* Englm.).

Il Fiori ed il Beguinot hanno poi da qualche anno emesso l'ipotesi che la *C. pentagona* Englm., sia da identificarsi con la *C. obtusiflora* var. *cesatiana*, e per conseguenza, secondo i detti autori, non si dovrebbe più parlare di importazione in Italia di cuscute americane.

L'argomento della determinazione di queste e di altre specie di cuscute ha potuto durante il periodo che va dal 1921 ad oggi essere da me abbastanza studiato, da poterne riferire in una più dettagliata memoria che andrà in stampa tra giorni, e qui essere riassunto.

Intanto mi piace ricordare con viva gratitudine la cortesia del prof. Pirotta, il quale ha messo a mia disposizione l'Erbario Cesatiano, conservato presso l'Istituto botanico, il cui studio mi è stato di grande giovamento.

Riferisco sommariamente le conclusioni cui sono giunta:

I. — Le due sottosezioni *Platicarpae* ed *Oxycarpae* della sezione *Clistogrammica* debbono essere fuse in una unica sottosezione. Il principale carattere sul quale l'Engelmann si fonda per distinguere le *Platicarpae* dalle *Oxycarpae* consisterebbe nella differente struttura della parete dell'ovario e quindi della capsula. Secondo Engelmann infatti nella prima sottosezione la capsula avrebbe la parete tutta di eguale spessore; nella seconda sottosezione invece la parete della capsula sarebbe più spessa nella parte alta di essa, verso l'apice.

(1) Pervenuta all'Accademia il 16 luglio 1925.

Dall'esame di una gran quantità di cuscute della sezione *Clistogrammica* e dall'esame proprio di campioni di *C. Clorocarpa* Englm. e di *C. Gronovii* Wild dell'erbario di Engelmann (e secondo questi appartenenti l'una alla prima sottosezione, l'altra alla seconda) mi risulta che in tutte le cuscute di detta sezione la parete della capsula ha uno spessore maggiore nella parte superiore di essa.

Venendo a mancare questo carattere differenziale, le due sottosezioni non hanno in verità oramai ragione di esistere separate, e debbono quindi essere fuse in un'unica sottosezione.

Anche lo Yunker non deve aver trovata opportuna la distinzione tra *Platicarpae* ed *Oxycarpae* perchè, pur senza fare alcuna discussione al riguardo, e quindi senza dirne la ragione, comprende nella sottosezione *Platicarpae* anche le *Oxycarpae*, dividendo la sezione *Clistogrammica* in *Platicarpae* ed *Lepidanche*.

A questa unica sottosezione (*Platicarpae*) vengono dunque ad appartenere le specie *C. obtusiflora* H. B. K. con le sue diverse varietà, la *C. chlorocarpa* Englm., la *C. pentagona* Englm, la *C. racemosa* Mart., e la *C. Gronovii* Wild, per nominare quelle che a noi interessano maggiormente, anche per le controversie sorte sulla loro classificazione.

Queste specie sono dunque più vicine di quello che a prima vista poteva sembrare.

II. - L'asserzione che l'unica cuscuta grossa introdottasi fino ad ora in Italia dall'America sia la *Cuscuta arvensis* Beyr., da chiamarsi come già fu detto con più proprietà *C. pentagona* Englm., riceve piena conferma, da questo ulteriore studio.

III. - Delle quattro varietà della *C. pentagona*: *tipica*, *calicina*, *pubescens*, *verrucosa* le prime tre debbono essere fuse in un'unica varietà.

Infatti la principale differenza tra la *C. pentagona tipica* e la *C. pentagona calicina*, starebbe nella forma del calice a lobi sovrapposti nella prima, non sovrapposti nella seconda. Su questo carattere non si può fare grande affidamento: in una stessa pianta si trovano spesso fiori a calice con sepali sovrapposti, e fiori a calice con sepali non sovrapposti, e questo carattere è spesso in relazione con l'età del fiore, tendendo i sepali a star sovrapposti, quando il fiore è giovane e l'ovario quindi non ingrossato.

Dall'esame poi di numerosissimi esemplari di *C. pentagona*, provenienti da diverse località, mi risulta che il carattere della pubescenza esiste più o meno pronunziato in tutta la specie: non è possibile quindi distinguere una varietà fondandosi su questo carattere, che, secondo me, è anche in relazione con la natura dell'ospite, e le condizioni di ambiente in cui la cuscuta vive.

IV. - Le segnalazioni date in tempi diversi di comparse in Italia di altre cuscute quale la *C. Gronovii*, e la *C. racemosa* var. *Chiliana*, sono dovute ad errori di diagnosi.

Per quanto riguarda la *C. Gronovii* deduco ciò, oltre che dalle osservazioni che saranno esposte nel lavoro per esteso, principalmente dal fatto di avere ottenuta la germinazione di semi della cuscuta segnalata in Italia dal Peglion come *C. Gronovii*, nel 1908 e di altri semi pure classificati in tempi diversi da altri autori, come appartenenti a detta cuscuta. Dalla germinazione di detti semi ho costantemente ottenuto cuscute che non sono riferibili a *C. Gronovii* (come mi risulta dal confronto con campioni di *C. Gronovii* dell'erbario di Englm.), ma a *C. pentagona* Englm.

Dall'esame della *C. Gronovii* Wild dell'erbario di Englm. mi risulta poi che il carattere più evidente e costante per cui detta cuscuta differisce dalla *C. pentagona* Engelm è la forma della capsula: questa, infatti, nella *C. Gronovii* è sempre globosa appuntita, anche se vi matura più di un seme.

Nella *C. pentagona* non si verifica mai che nella capsula maturi un solo seme, e la capsula non è mai appuntita. Per quanto riguarda la *C. racemosa* var. *Chiliana* Englm. dall'esame di cuscute classificate in varie località di Europa come tale specie, e dall'esame di detta specie esistente nell'Erbario Cesatiano, mi risulta che tale specie non è stata mai introdotta in Italia.

Le cuscute classificate come *C. racemosa* var. *Chiliana*, appartengono ora a *C. obtusiflora* var. *Cesatiana*, ora a *C. pentagona*.

I semi poi di detta cuscuta sono gli unici che all'esame anatomico del tegumento seminale possono distinguersi da quelli di *C. obtusiflora*, *C. chlo-rocarpa*, *C. pentagona*, *C. Gronovii*, i quali non presentano caratteri tali da potersi distinguere con vera sicurezza gli uni dagli altri.

In una sezione di un seme di *C. racemosa* var. *Chiliana* si osserva che il perisperma è costituito da un abbondante strato di cellule amilacee, invece di essere costituito da elementi secchi e raggrinziti. A questo carattere, segnalato dal Guttemberg, il D'Ippolito, e prima il Karoly hanno negato il valore di carattere sistematico, osservando che in tutti i semi immaturi di cuscuta il perisperma è ricco di cellule amilacee.

Per quanto questa osservazione sia giusta, ed anche da me controllata, è da notare che i semi immaturi ben si distinguono dai maturi, anche al solo aspetto esterno, e che è quindi, per lo meno, molto difficile, che il Guttemberg sia incorso nell'errore di scambiare gli uni con gli altri.

L'asserzione del Guttemberg è ampiamente confermata dalle osservazioni da me condotte su di una gran quantità di materiale, dalle quali mi risulta essere realmente il perisperma dei semi di *C. suaveolens*, perfettamente maturi, costituito da un ricco strato di cellule amilacee, cellule, che non si riscontrano mai nel perisperma di semi perfettamente maturi, di *C. pentagona*.

La controversia sulla esistenza o meno di questo carattere distintivo tra i semi delle due specie di cuscuta, su nominate, è secondo me attribuibile

anche al fatto di avere alcuni autori considerati come semi di *C. racemosa* semi appartenenti a specie diversa.

Mentre poi i semi delle altre specie su nominate hanno l'ilo più o meno lungo, lineare, bianchiccio, in questa specie l'ilo è puntiforme, poco evidente.

V. — La *C. obtusiflora* var. *Cesatiana* per un complesso di caratteri di cui sarà detto più per esteso, non può identificarsi con la *C. pentagona* Engelm.

Detta cuscuto non si trova mai parassita in colture di medica o di trifoglio, ma sempre su piante spontanee, e principalmente, come è noto, sui *Polygonum*.

VI. — La *C. obtusiflora* var. *Cesatiana* corrisponde con tutta probabilità alla *C. obtusiflora* var. *glandulosa* Engelm. dell'America.

La principale differenza tra queste due cuscute dovrebbe consistere nella forma delle squame, bifide nell'una, spatolate nella seconda, e nella presenza di glandole nella prima. Circa le squame spesso si incontrano esemplari di *C. obtusiflora* var. *Cesatiana* con squame non tutte tipicamente bifide, e d'altra parte lo Yuncker descrivendo la *C. obtusiflora* var. *glandulosa* dice che le squame di essa sono leggermente bifide.

Circa la presenza di glandole nella *C. obtusiflora* var. *glandulosa*, è necessario soffermarci sul significato attribuito dall'Engelmann alla parola *glandola*; egli infatti nella parte generale del suo lavoro dice che «in parecchie specie di cuscuto il tessuto del calice e della corolla è cosparso di punti o cellule pellucide, (volgarmente chiamate glandole), nei campioni secchi e macerati distintissimi».

Ora di questi punti o zone pellucide è fornita anche la nostra *C. Cesatiana* (raffigurata spesso nei testi di illustrazione della flora italiana con calice e corolla cosparsi di macchioline) e più o meno ne sono fornite tutte le specie di cuscuto.

I caratteri dunque, per cui queste due cuscute dovrebbero essere distinte, vengono a mancare, debbono quindi essere identificate l'una con l'altra.

VII. — Altre due varietà della *C. obtusiflora* che debbono essere fuse sono la *australis*, e la *breviflora*.

Secondo Engelmann, queste due cuscute differirebbero per essere la prima glandulosa-puntata, ed a fiori costantemente pentameri, la seconda affatto o appena glandulosa, e spesso a fiori tetrameri.

Dall'esame di campioni di *C. breviflora* dell'erbario di Gussone, e dell'erbario di Bruni (menzionati dall'Engelmann, nella descrizione di queste specie) e dall'esame di *C. australis* proveniente da Sydnev, si constata l'esistenza di fiori tetrameri anche nella *C. australis*, e la presenza delle cosiddette *glandole* nella *C. breviflora*; gli altri caratteri collidono perfettamente: le due varietà debbono quindi essere fuse.

VIII. — Un'altra specie che merita particolare attenzione è la *C. polygonorum* Engelmann.

Come è noto l'Engelmann sostituì al primitivo nome di questa cuscuta l'altro di *C. chlorocarpa* dando molta importanza ai caratteri della capsula, tenue, membranacea, di colore giallo-verde, caratteri (secondo Engelmann) per i quali detta cuscuta a distanza si riconosce dalle altre cuscute.

Dall'esame di capsule di molte cuscute della sezione *Clistogrammica* e dei vari campioni di *C. chlorocarpa* Englm. dell'erbario di Engelmann, mi risulta che questo nome non è giustificato.

Le diverse varietà della *C. obtusiflora*, la *C. pentagona*, ecc. hanno anche esse talvolta la capsula tenue membranacea, e questo carattere è di solito in relazione con lo stato di secchezza in cui si trova il frutto al momento dell'esame; il colore poi è in relazione talvolta con le condizioni di ambiente in cui il parassita vive.

Questa osservazione è suffragata da una esperienza da me condotta. Una cuscuta inviatami nel 1922 da Boldeno, cresciuta su bietola, mentre per tutti i caratteri corrispondeva a *C. pentagona* Englm., lasciava quasi in dubbio sulla sua classificazione, perchè di un colore giallo-verde pallidissimo, anche nelle capsule mature; ricavatine i semi, e seminata l'anno seguente su medica, prese un intenso colore giallo-arancione.

La *C. polygonorum* viene quindi a differire dalle due varietà di *C. obtusiflora* (*australis* e *breviflora*) esclusivamente per la forma dei petali, in essa più acuti.

Non è questo, a mio parere, un carattere sufficiente per farne una specie diversa; la sua posizione sistematica deve quindi essere riveduta.

IX. — Non è sempre facile poter distinguere con sicurezza gli uni dagli altri i semi di *C. pentagona*, *C. Cesatiana*, *C. Gronovii*.

I semi della prima specie sono di solito distintamente trigoni, ma essi si allontanano talvolta dalla forma tipica e potrebbero essere confusi con quelli delle altre due specie, più globosi (in ispecie quelli di *C. Gronovii*) e di solito più grandi.

La struttura anatomica del tegumento seminale non presenta caratteri differenziali. Il D'Ippolito che per ultimo si è occupato dell'argomento, accenna alle differenti forme delle cellule epidermiche, piane o talvolta concave, nella prima specie, convesse nelle altre due, ed anche al colore dell'area ilare; ma su questi caratteri non ci si può fondare.

Ad es. egli dice che i semi di *C. Gronovii* differiscono nettamente da quelli di *C. Cesatiana*, per avere l'area ilare chiara, mentre dall'esame di campioni di *C. Gronovii* dell'erbario di Engelmann, risulta che detta cuscuta ha semi con area ilare nera.

Il De Moulins dà importanza, come carattere differenziale tra i semi di specie diverse di cuscute, alla posizione dell'ilo nell'area ilare; il Guttemberg nota però che nelle cuscute americane, la posizione dell'ilo è spesso variante nei semi di una stessa capsula, e la sottoscritta nelle cuscute esaminate della sezione *Clistogrammica* ha notato che esso per posizione è

sempre più o meno obliquo, senza netta distinzione di posizione dall'una all'altra specie.

Piuttosto costante, secondo le mie osservazioni, si presenta il carattere della lunghezza dell'ilo; esso è lungo attraversante talora tutta l'area ilare, e mai inferiore ad $\frac{1}{3}$, di essa nella *C. obtusiflora* var. *Cesatiana* e nella *C. Gronovii*; più breve nella *C. pentagona* in cui di solito corrisponde ad $\frac{1}{3}$, dell'area ilare e solo raramente ad $\frac{1}{3}$; brevissimo, puntiforme nella *C. racemosa* var. *Chiliana*.

Nei semi di questa ultima specie l'Engelmann noterebbe come carattere differenziale l'area ilare radiata. Secondo le mie osservazioni, a questo carattere non si dovrebbe dare importanza, perchè si nota in molte altre specie nelle quali l'Engelmann non lo ha messo in evidenza, e spesso in una stessa specie i semi ora sono ad area ilare radiata, ora ad area ilare semplice.

La radiatura dell'area ilare, secondo le mie osservazioni, risulta costituita da increspature della cuticula, la quale, seguendo le pareti longitudinali delle cellule epidermiche (orientate in questa regione tutte verso l'ilo) viene spesso a disporsi a guisa di raggi diretti verso il centro dell'area. Dette increspature possono essere più o meno evidenti, sia per il colore dell'area ilare, sia per lo stato di disidratazione del tegumento seminale.

Tra i semi dunque di tutte le specie di *Cuscuta* considerate nella presente nota, solo quelli di *C. racemosa* var. *Chiliana* (*C. suaveolens* Ser.) possono riconoscersi con sicurezza, all'esame anatomico del tegumento seminale, per avere il perisperma costituito da cellule ricche di amido, invece che da elementi secchi e raggrinziti come nell'altre specie.

Genetica. — *Intorno ad alcune osservazioni sulle « mutazioni elettriche » e sul processo di « jonolisi » nei gameti.* Nota di ALBERTO PIROVANO presentata dal Socio R. PIROTTA ⁽¹⁾.

I. — Il libro ⁽²⁾ nel quale ho esposto i miei studi sulla applicazione dell'elettricità alla fecondazione delle piante e sulle influenze ontogenetiche che ne derivano, libro al quale il chiarissimo prof. Pirotta ha voluto concedere l'inatteso onore di una presentazione a codesta illustre Accademia, era e voleva essere soltanto una esposizione di carattere ampiamente divulgativo delle mie ricerche, svolta in forma personale e quasi direi autobiografica, al fine precipuo di richiamare sulle indagini da me iniziate e sui metodi da me proposti l'attenzione del maggior numero possibile di studiosi e il controllo e lo sviluppo del maggior numero possibile di ricerche. Non ho taciute le difficoltà fra le quali si è svolta l'opera mia ed ho insistito sulla scarsità ed imperfezione dei miei mezzi; ho sollecitato la collaborazione di altri sperimentatori.

(1) Pervenuta all'Accademia il 22 luglio 1925.

(2) A. PIROVANO, *La mutazione elettrica delle specie botaniche* ecc. Milano-Hoepli 1922.

L'esame critico del dott. Savelli, che ha illustrato e discusso la mia opera in una serie di note inserite in questi Rendiconti, ha validamente cooperato all'attuazione di questo mio desiderio. Le critiche rivoltemi — pur se alcune non han tenuto conto delle condizioni di fatto in cui ho lavorato e dei fini che ho testè esposto — mi sono state utili, avendomi dato efficace incitamento ed indirizzo per altre esperienze, in corso di esecuzione.

Ciò premesso, voglio discutere alcune delle più importanti obiezioni e considerazioni del dott. Savelli; questa discussione potrà valere a meglio precisare il mio pensiero e gioverà all'ulteriore svolgimento delle indagini, che ho il conforto di poter continuare, ora, con migliore attrezzamento e col soccorso di dotti consigli.

II. — Il dott. Savelli si diffonde in particolar modo sulla mancata osservazione, da parte mia, delle F_2 ottenute da polline assoggettato a « jonolisi magnetica » ed a raggi jonizzanti, e la deplora.

In F_2 avrei potuto avere mutazioni anche quando in F_1 non ne fosse comparsa veruna traccia, potendo essere i nuovi caratteri portati dal gamete maschile « attenuato » dal trattamento jonolizzante — come ragion vuole e come in ibridazione viene pluralmente e concordemente dimostrato — *recessivi*.

L'osservazione è esatta e ne riconosco il valore: aggiungo anzi che la terrò in considerazione come norma avvenire; ma delle passate contingenze in cui le mie ricerche furono costrette è giusto tener calcolo. L'attuazione è sovente la risultante del proposito, dell'idea — che può anche esser buona — coi miseri mezzi: io avevo pochissimo spazio per le mie colture. Inoltre fui presto distratto dal ricercare altre vie dalla constatazione di *mutazioni visibili direttamente in F_1* , da polline elettricamente modificato nei suoi elementi costitutivi: mutazioni cospicue, indubitabili.

Per mala o per buona ventura è avvenuto così: che io sono stato presto « viziato » dalle *constatate* mutazioni elettrogenite sorgenti in F_1 per effetto di mutazione interna gametale estemporaneamente indotta dall'artificio elettrico, e che non passa attraverso un lungo periodo di latenza, come appunto il dott. Savelli osserva nella sua 2^a nota.

Il gamete mutato che genera le rarissime mutazioni ordinarie *deve, generalmente, la sua proprietà mutativa ad esuberanza od a deficienza numerica della sua dotazione di cromosomi*; mentre il gamete elettricamente mutato ha in sè *tutti e soltanto* i cromosomi suoi specifici. Nulla vi è aggiunto, nulla vi è materialmente scomparso. L'azione elettrica deve — probabilmente — aver traumatizzato, scomposto o trasposto — in nuova aggregazione indebolita o forse ancora saldamente ed armonicamente ricomposta — qualcuno dei più labili costituenti inter- o intra-molecolari, in parte od in ciascuno dei suoi cromosomi.

Nuove esperienze istituite con idonei mezzi d'accertamento potranno stabilire sino a qual punto le proposte ipotesi rasentino la realtà: ci basti per

ora prendere atto che le *mutazioni elettrogenite non possono identificarsi, nei riguardi ontogenetici, con quelle spontanee* epperò, pur dovendosi giustamente sperare, nelle F_2 , variazioni elettrogenite anche quando esse non fossero minimamente abbozzate in F_1 , non dobbiamo senz'altro attenderci dalle discendenze elettrogenite un comportamento del tutto analogo a quello delle conformazioni ibride. Il gamete deformato od indebolito dalla azione elettrica non è ancora un gamete eterogeneo.

Il comportamento dei mutanti elettrogeniti, apparsi in F_1 , non è stato da me seguito con la dovuta ampiezza e precisione; mi sono inoltre, sin qui, mancati i mezzi di indagine fisica e chimica. Ma già l'Altea rosea mutante *ibiscoide* - ottenuta in F_1 da polline blandamente jonolizzato - ha dato in F_2 individui riproducenti la mutazione e che vengono a fiore nello stesso anno della semina. Riseminata, in F_3 , mantiene la forma ibiscoide, ma molte corolle si fanno più chiare. Ionolizzando di nuovo il polline della elettrogenita altea ibiscoide, si ottengono, in F_4 , prodotti dalla statura un pò più nana, ma sempre del tipo ibiscoide, salvo sporadiche lievi variazioni nel pigmento.

Un raffronto fra le mutazioni elettrogenite del Papavero sonnifero doppio ottenute in F_1 e le similari forme ottenute, pure in F_1 , dallo stesso Papavero sonnifero fecondato con polline jonolizzato oppure molto invecchiato di Papavero bratteato, farebbe pensare che il gamete mascolino quando (per causa elettrica, per senilità, o per qualsiasi altra) sia molto « attenuato » operi soltanto uno *stimolo embriogenetico* e non una vera e propria fecondazione; e che perciò l'autoimpollinazione e l'impollinazione estranea, a questo effetto, si equivalgano, quando il gamete maschile sia estremamente infiacchito.

Ma, allora, non si tratterebbe di *mutazioni indotte*, bensì di *prodotti di « pseudogamia »*, anche quando si tratti la specie pura fecondandola col polline suo proprio, profondamente sconvolto per azione elettrica o per senilità.

Senonchè l'esame di altre risultanze, particolarmente di quelle ottenute nella Zucchetta d'Italia, sembrano discordanti: ivi si hanno deviazioni morfologiche notevolissime, ma che non tradiscono infiacchimento; ricostruzioni - si direbbe - fatte col materiale scomposto dall'azione elettrica; ma fatte armonicamente, così da competere in produttività e vigoria col prototipo ed in qualche caso superarlo in attributi vegetativi e fruttigeni.

Inoltre recenti fatti genetici nuovi, osservati in F_1 e F_2 , particolarmente in ibridi di granturco, nei quali l'azione elettrica agente sul gamete maschile ha attenuato od anche annichilito *alcuni* caratteri della specie maschile (caratteri che, soppressi nella F_1 , non sono più riapparire neanche nella F_2), mentre *altri* caratteri mascolini, superstiti in F_1 , si sono integralmente conservati anche in F_2 ; questi fatti, dico, rendono perplessi nel giudicare che il comportamento del polline elettricamente « attenuato » possa

condurre alla apomissia. Del pari l'esaltazione della sessualità femminile in fecondazioni elettrogenite, che si accentua sovente in F_2 ed F_3 , non disgiunta da robustezza, concorre a rendere più complicato il già poliedrico problema, che soltanto una vasta sperimentazione estesa a moltissime specie potrà incamminare verso la soluzione.

III. — Ma il dott. Savelli non si limita ad una critica negativa e puramente concettuale: suggerisce, nella 3^a e 4^a nota, un programma di razionale lavoro, che ha correlativa e parallela estensione in campi diversi ed è attinente a diverse scienze. Egli addita una via di lavoro che varrà, come già vale, ad illuminare i prosecutori dell'opera da me avviata; egli giustamente molto attende da azioni jonolizzanti il *gonotoconte*. Io credo che nella mia sperimentazione (pur fatta nel modo che le mie forze, i miei mezzi ed il tempo limitato comportavano) ci sia già un caso che *probabilmente* avrà già realizzato questo concetto perchè io ho agito sul boccio mascolino di *Cucurbita* una settimana prima della fioritura principiando da quando il fiore, che nelle Cucurbitacee cresce rapidamente, era appena *aggredibile*: nel mio libro, a p. 229, fig. 81, si vede il risultato ottenuto. Ma non è la sola esperienza tentata su questa via: purtroppo con jonolisi intense ho avuto la mortificazione delle antere; il che non esclude che si possano e si debbano trovare azioni e modi d'applicazione meno deleteri e più efficaci. La primaria questione elettrogenetica è riposta nella *ricerca d'intonazione*: sul gamete in riposo, per alcune specie a polline grossolano, già ho accertato che solo le basse frequenze sono confacenti a promuovere azioni modificatrici che non implicano azione biologica deleteria.

IV. — Fra le proposte pel più razionale e completo sviluppo dei lavori elettrogenetici merita speciale rilievo quella del dott. Savelli, illustrante la possibilità e convenienza di tentare la jonolizzazione sul nucleo generativo in moto divisionale e traslativo entro lo stilo, prima ch'esso giunga nell'ovario. Proposta tanto razionale quanto difficile da realizzare.

Nel mentre riesce relativamente facile agire sul gonotoconte, alla fase che il citologo può determinare, trattando le giovanissime antere nei bocci che le racchiudono, *quando non s'abbia da tener conto del disturbo che tal processo comporta all'ovario* (che è sensibilissimo anche a blande azioni jonolitiche), la pazienza e l'accorgimento dell'operatore vengon messi a dura prova, quando si proponga seguire il budello pollinico lungo lo stilo e *non si debba menomamente influenzare l'ovario*, sia per le ragioni suddette desunte dalla mia pratica, sia per scrupolo sperimentale.

Soltanto nelle specie a lungo stilo siffatta azione sarà possibile: vi si perverrà compensando, con leggeri solenoidi, percorsi dalla medesima corrente eccitatrice dell'elettromagnete e collegati in modo da dare polarità contraria a quella della faccia polare influenzante. La potenza del solenoide compensatore deve però aumentare a misura che l'elettro-magnete jonolizzatore, cominciando dalla germinazione del polline sullo stigma, ne segue

il budello lungo la sua discesa verso l'ovario; e siccome si tratta, in generale di organi fragilissimi, è evidente che la difficoltà diventa tanto maggiore quanto più si tende ad approssimarsi ad una impostazione assolutamente perfetta del lavoro. Vero è che può adottarsi un solenoide a potenza fissa e spostarlo di quel tanto da dare componente nulla al piano dell'ovario.

Forse qualche altra provvidenza semplificatrice può essere escogitata; ma certo è che se si perverrà a seguire, come il dott. Savelli propone, le divisioni riduttive ed equazionali che i nuclei elettricamente trattati subiranno in confronto ai normali e se, col soccorso del citologo, si arriverà a registrare le anomalie morfologiche eventuali e gli eventuali ritardi che l'azione elettrica può causare nell'evoluzione embriogenetica, si potrà giungere alla *formula di manovra* pel comando dell'eredità.

V. — Il dott. Savelli mi rimprovera la scarsa nozione e la conseguente mancata utilizzazione dei lavori altrui, pur riconoscendo al mio maggior successo: del resto egli ha detto tutto il vero asserendo che il lavoro dello scrivente « *s'alimentò di sè stesso, in silenzio* ».

Se fossi stato a miglior cognizione degli studi genetici avrei certamente composto meglio il mio libro: quanto all'opera, non so. Non so se sarebbe stata più fortunata e proficua se fosse stata impiantata subito con alti criteri scientifici. Avviene sovente che l'eccesso d'introspezione critica — propria degli scienziati — pregiudichi l'arditezza delle indagini, e paralizzi nell'incessante risorgere del dubbio, il coraggio e la costanza. Il dotto è sovente sotto l'influsso delle opinioni altrui, e l'interferenza del proprio coll'altrui pensiero è cagione di perplessità, di titubanza, se non d'inerzia. Nella storia delle invenzioni è sovente dimostrato quanto sia utile essere spregiudicati nel battere una via nuova.

L'ulteriore svolgimento e l'inquadramento scientifico ha invece tutto da attendere da una vasta collaborazione del genetico, dell'elettrologo, del citologo, e del chimico; e — non dimentichiamolo — del bravo coltivatore. Perchè, quanto più s'affineranno i mezzi artificiali atti ad indurre perturbazioni cospicue nel gamete, maggiormente dovremo occuparci d'escogitare accorgimenti atti a tenere in vita embrioni, semi e piante che si scostano dal loro normale modello specifico; il solo biologicamente perfetto. Già qualche semina — che ha dato per l'appunto i risultati più salienti — ce ne dà ammonimento.

Per concludere: un nuovo spiraglio s'apre nel campo della biologia e lascia intravedere buone promesse, sia nel campo della pura speculazione scientifica che in quello utilitario. Per lo sviluppo del lavoro mi professo fin d'ora riconoscente per qualsiasi collaborazione altrui, poichè se le mie sole forze, non mai soccorse fino a quest'anno, non mi concessero finora di essere che un assai modesto sperimentatore, non è inferiore a quello di chi si sia il culto da me votato a questi studi, e lo zelo disinteressato pel loro sviluppo. In successive note mi riservo di comunicare i risultati delle più recenti ricerche, che non sono prive d'interesse.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 5 giugno 1925

- Annali del R. Osservatorio Vesuviano a cura del Comitato Vulcanologico della R. Università di Napoli. Serie III, vol. I, anno 1924. Napoli, 1925. 8°, pp. 1-186.
- BERTOLINI F. — Ricerche biologiche ed istologiche sulla «*Pieris brassicae*». (Estr. dal «*Redia*». Vol. XVI, pp. 29-39). Firenze, 1925. 8°.
- DOBELL C. — A Report on the Occurrence of Intestinal Protozoa in the Inhabitants of Britain with special reference to «*Entamoeba histolytica*». London, 1921. 8°, pp. 1-71.
- DOBELL C. — The Life-History and Chromosome Cycle of «*Aggregata Eberthi*» [Protozoa: Sporozoa: Coccidia] (From «*Parasitology*». Vol. XVII, n. 1, 1925). Cambridge, 1925. 8°, pp. 1-136.
- FANO G. — Corrado Segre (1863-1924). (Estr. dall'«*Annuario della R. Università di Torino*», 1924-25). Torino, 1925. 8°, pp. 1-12.
- GUIDI C. — Nota al libro *Ponti italiani in cemento armato*. Ingg. L. Santarella ed E. Miozzi. Edit. Hoepli, 1924. (Estr. dagli «*Annali dei Lavori Pubblici*» - già «*Giornale del Genio Civile*», fasc. VII, anno 1924). Roma, 1924. 8°, pp. 1-3.
- GUIDI C. — Tensioni interne in una volta da ponte, prodotte dalla sua parziale o totale sommersione in un liquido stagnante. (Estr. dagli «*Atti della Reale Accad. delle Scienze di Torino*». Volume LX, 1925, pp. 66-72). Torino, 1925. 8°.
- HAMET R. — Sur le dosage en yohimbine des écorces et des préparations galéniques de «*yohimbehe*». (Estr. du «*Bulletin des Sciences Pharmacologiques*». Tome XXXII, 1925). Paris, s. d. 8°, pp. 1-7.
- Il disagio viti-vinicolo. Ministero dell'Economia Nazionale. (Estr. dai «*Nuovi Annali dell'Agricoltura*». Anno IV, n. 4, 1924, pp. 696-722). Roma, 1924. 8°.
- KIRK E. — Harpidium, a new Pentameroid Brachiopod Genus from Southeastern Alaska. (From the «*Proceedings of the United States National Museum*». Volume 66, art. 32). Washington, 1925. 8°, pp. 1-5.
- KURST E. H., WATT D. A. FR. — The Similarity of Motion of Water through Sluices and through Scale Models: Experiments with Models of Sluices of the Assuan Dam, and the Measurement of the Discharge of the Nile through the Sluices of the Assuan Dam. - II Paper - (Esercpt Minutes of «*Proceedings of the Institution of Civil Engineers*». Volume CCXVIII, session 1923-24, pp. 71-180). London, 1924. 8°.
- LORIA G. — Curve sghembe speciali algebriche e trascendenti. Vol. I. Curve algebriche. Bologna, s. d. 8°, pp. I-XI, 1-374.
- LUYTEN W. J. — Notes on Stellar Statistics. II: The Mathematical Expression of the Law of Tangential Velocities. (Repr. from the «*Proceedings of the National Academy of Sciences*». Vol. II, n. I, pp. 87-90, 1925). S. d. t. 8°.
- LUYTEN W. J. — Notes on Stellar Statistics. III: on the Calculation of a mean absolute Magnitude from apparent Magnitudes, angular proper Motions and linear radial Velocities. (Repr. from the «*Proceedings of the National Academy of Sciences*». Vol. II, n. 2, pp. 130-133, 1925). S. d. t. 8°.
- LUYTEN W. J. — Notes on Stellar Statistics. IV. On the Relation between the mean Values of the υ and τ Components of

- proper Motion. (Repr. from the « Proceedings of the National Academy of Sciences ». Vol. II, n. 3, pp. 189-192, 1925). S. d. t. 8°.
- MAGGI G. A. — Elementi di Statica e teoria dei vettori applicati, con una introduzione sul calcolo vettoriale. Bologna, s. d. 8°, pp. I-VII, 1-155.
- MARSHALL W. B. — Microscopic Sculpture of Pearly Fresh-Water Mussel Shells. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXVII, art. 4). Washington, 1925. 8°, pp. 1-14.
- MENOZZI A., PRATOLONGO U., PARISI P. — Sulle cause di sterilità dei terreni di Brughiera. Esperienze di coltivazione dirette a trovare il modo pratico di correggerli. (Estr. dai « Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere ». Vol. LVII, fasc. XVI-XX, pp. 787-801). Milano, 1924. 8°.
- PASSERINI N. — Influenza della qualità degli alimenti sull'accrescimento delle larve e sul metabolismo del « Tenebrio molitor. L. » (Estr. da « Le Stazioni Sperimentali Agrarie Italiane », diretta dal Dr. Lo Priore. Vol. LVII, 1924, pp. 343-378). Modena, 1924. 8°.
- PAYNE C. H. — Astrophysical Data Bearing on the Relative Abundance of the Elements. (Repr. from the « Proceedings of the National Academy of Sciences ». Vol. XI, n. 3, pp. 192-198, 1925). S. d. t. 8°.
- RANZI S. — Contributo allo studio dei processi morfogenetici elementari del Ruffini. Lo sticotropismo. (Estr. dal « Bollettino dell'Istituto di Zoologia della R. Università di Roma ». Vol. II, anno 1924). Livorno, 1924. 8°, pp. 1-17.
- RAVA R. — Le ricostruzioni nelle terre liberate. (Commissariato per le riparazioni dei danni di guerra). Roma, 1924. 4°, pp. 1-523.
- Ricerche sperimentali fatte nel 1923-1924 dall'Istituto di Farmacologia della Regia Università di Padova, diretta dal Prof. L. Sabbatani. Vol. XIX. 8°.
- SPRINGER F. — Occurrence of the Crinoid « Genus *Apiocrinus* in America ». (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Volume 67, art. 18). Washington, 1925. 8°, pp. 1-4.
- TEADWELL A. L. — A new Species of Polychaetous Annelid from Uruguay, « *Aphrodita Magna* ». (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 67, art. XII). Washington, 1925. 8°, pp. 1-3.
- WILSON E. B., LUYTEN W. J. — The Frequency Distribution on apparent Magnitude of the Non-Magellanic O-Type Stars. (Repr. from the « Proceedings of the National Academy of Sciences ». Vol. XI, n. 2, pp. 133-137, 1925). S. d. t. 8°.

G. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1925.

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo).

Chimica. — *Ricerche sull'isomorfismo dei molibdati dei metalli delle terre rare con quelli del calcio, dello stronzio, del bario e del piombo.* Nota del Socio F. ZAMBONINI e del prof. R. G. LEVI ⁽¹⁾.

II.

STRUTTURE DEI MOLIBDATI DI CA, SR, BA, PB.

Questi composti sono stati preparati da uno di noi, in nitidi e bei cristalli per cristallizzazione da cloruro di sodio fuso del sale ottenuto per precipitazione. Il molibdato di piombo fu cristallizzato per fusione diretta del composto precipitato. Si ebbero, del resto, gli stessi risultati adoperando i precipitati calcinati semplicemente ⁽²⁾.

(1) Pervenuta all'Accademia il 15 luglio 1925.

(2) Determinazioni col metodo di BRAGG sulla wulfenite e la scheelite sono state pubblicate nel 1920 da R. G. DICKINSON, (« J. Am. Chem. Soc. », 1920, XLII, 85).

CaMoO₄

θ	$\text{sen } \frac{\theta}{2}$	I	K	d	$h_1 \ h_2 \ h_3$	a_0
27.5	0.238	m. d.	β_4	—	—	—
30.3	0.262	f. f.	α_4	2.934	101	3.50
32.8	0.282	m. d.	—	2.726	002	3.52
35.8	0.307	d.	—	2.504	110	3.54
41.2	0.352	m.	—	2.188	102	3.58
43.9	0.374	d. d.	β_3	—	—	—
47.0	0.399	d.	—	1.930	—	—
48.4	0.410	f.	α_3	1.877	112	3.59
49.7	0.420	—	β_6	—	—	—
50.5	0.427	m.	—	1.803	200	3.61
53.3	0.449	d.	β_2	—	—	—
55.5	0.466	f.	α_6	1.652	103	3.61
57.5	0.482	m.	—	1.597	120	3.58
59.5	0.497	f. f.	α_2	1.548	121	3.61
60.7	0.505	m. f.	—	1.524	202	3.63
66.1	0.546	d.	—	1.410	$\left. \begin{matrix} 004 \\ 122 \end{matrix} \right\}$	3.64
68.9	0.566	m. d.	β_1	—	—	—
70.0	0.574	d. d. d.	—	1.339	104?	[3.71]
71.5	0.584	d. d.	β_7	—	—	—
76.9	0.622	f. f.	α_1	1.237	123	3.66
78.5	0.633	d. d.	—	1.216	300	3.65
80.5	0.646	m. d.	α_7	1.191	301	3.66
81.7	0.655	d.	—	1.175	222	3.66
83.3	0.666	d. d.	—	1.155	130	3.65
86.8	0.688	d.	—	1.118	204	3.66
88.8	0.695	d.	β_8	—	—	—
90.6	0.714	m. d.	—	1.078	132	3.68
91.7	0.718	d.	—	1.072	223	3.68
96.2	0.745	d. d.	β_9	1.066	—	—
96.3	0.751	d.	—	1.025	303	3.66
100.3	0.768	m. f.	α_8	1.003	231	3.67
106.6	0.802	d. d.	—	0.961	133	3.67
108.5	0.812	d.	—	0.946	$\left. \begin{matrix} 224 \\ 006 \end{matrix} \right\}$	3.63 3.67
110.5	0.822	f.	α_9	0.937	125	3.68
115.0	0.834	d. d.	—	0.923	$\left. \begin{matrix} 400 \\ 106 \end{matrix} \right\}$	3.69

Segue CaMoO_4

θ	$\text{sen } \frac{\theta}{2}$	I	K	d	$h_1 h_2 h_3$	a_0
117.1	0.854	f.	—	0.901	134	3.68
118.8	0.802	d.	—	0.893	233	3.66
121.0	0.871	m. f.	—	0.884	141	3.69
122.5	0.877	m.	—	0.878	141	3.66
130.6	0.910	m. f.	—	0.846	206	3.68
133.2	0.918	m. d.	—	0.839	305	3.69
137.1	0.931	d.	—	0.827	240	3.69
142.9	0.949	f.	—	0.811	143	3.69
145.7	0.956	d.	—	0.806	—	—
151.1 (1)	149.5	}	m.	0.799	242	3.70
	0.969			0.795		
	152			0.794		
158.0	0.983	d.	—	0.784	333	3.66

SrMoO_4

θ	$\text{sen } \frac{\theta}{2}$	I	K	d	$h_1 h_2 h_3$	a
26.2	0.2265	d.	β_1	3.068	—	—
29.0	0.2504	f. f.	α_1	3.07	101	3.64
30.8	0.2654	m.	α	2.898	002	3.69
34.4	0.2955	m. d.	α	2.604	110	3.69
42.0	0.3584	d. d.	β_3	1.937	—	—
46.4	0.3940	f.	α_3	1.953	112	3.72
48.8	0.4134	m.	α	1.862	200	3.73
52.7	0.4430	f.	α	1.738	103	3.75
57.2	0.4785	f. f.	α	1.607	121	3.74
58.3	0.4865	m. f.	α	1.582	202	3.76
65.6	0.5418	d.	β_4	1.282	—	—
73.4	0.5980	f.	α	1.287	114	3.75
73.8	0.6010	f.	α_4	1.281	123	3.77
77.6	0.6270	m. d.	α	1.227	301	3.77
78.8	0.6370	d.	α	1.208	222	3.76
80.3	0.6450	m. d.	α	1.193	130	3.78
82.6	0.6596	m. d.	α	1.167	204	3.78
					131	

(1) Posizione mediana: gli estremi sono quelli indicati.

Segue SrMoO₄

θ	$\text{sen } \frac{\theta}{2}$	I	K	d	$h_1 \ h_2 \ h_3$	a
85.4	0.6780	m. d.	α	1.136	105	3.79
88.0	0.6950	m.	α	1.107	132	3.77
92.9	0.7250	d.	α	1.062	303	3.77
96.4	0.7458	m. f.	α	1.033	231	3.79
101.2	0.7720	m. d.	α	0.997	224	3.79
104.2	0.7900	m.	α	0.975	125	3.80
111.3	0.8240	m. f.	α	0.935	134	3.79
115.8	0.8470	m.	α	0.909	141	3.79
121.4	0.8720	d.	β_5	0.797	—	—
124.8	0.8860	d.	α	0.869	305	3.80
127.4	0.8970	d.	α	0.858	126	3.79
129.6	0.9040	m. d.	α	0.851	135	3.81
133.8	0.9190	m. f.	α	0.838	143	3.81
142.0	0.9410	m. f.	α	0.818	242	3.80
146.6	0.9580	m. f.	α	0.804	404	3.82
152.2	0.9710	m.	α_5	0.793	325	3.81

BaMoO₄

25.0	0.2162	d.	β_1	3.21	—	—
27.4	2365	f. f.	α_1	3.25	101	3.82
28.4	2450	d. d.	α	3.14	002	3.88
30.3	2603	d.	α	2.95	—	—
33.0	2838	d.	α	2.71	110	3.84
39.6	3360	d.	β_2	2.07	—	—
43.5	3695	f.	α_2	2.08	112	3.91
46.6	3958	m. d.	β_3	1.756	—	—
49.0	4148	f.	α	1.856	103	3.93
54.3	4552	f.	α_3	1.69	121	3.96
54.8	4601	m.	α	1.674	202	3.94
67.4	5110	m.	α	1.506	122	3.86
69.0	5660	m. f.	α	1.360	123	3.95
73.6	5990	m.	α	1.285	301	3.94
76.2	6170	m.	α	1.246	130	3.94
78.0	6290	d.	β_4	1.106	—	—
82.6	6590	m. f.	α	1.168	132	3.96
86.6	6850	m. d.	α	1.123	303	3.97
90.8	7120	f.	α_4	1.08	231	3.95

$\text{Sr}_{1-x}\text{Ba}_x\text{MoO}_4$

θ	$\sin \frac{\theta}{2}$	I	K	d	$\bar{h}_1 \bar{h}_2 \bar{h}^2$	λ
91.0	0.7410	d. d.	β_5	0.951	—	—
95.0	7410	d. d.	α	1.04	224	3.90
102.4	7790	d.	α	0.989	400	3.95
103.6	7800	d.	α	0.980	134	3.94
108.4	8110	m. d.	α_5	0.950	141	3.96
113.0	8340	d.	β_6	0.855	—	—
118.0	8570	m. d.	α	0.800	552	3.97
120.4	8680	d. d.	α	0.887	241	3.90
122.8	8780	d.	β_7	0.791	—	—
128.1	9000	m.	α	0.855	{ 242 } { 553 }	3.96
131.5	9080	d.	α	0.848	404	3.98
133.6	9190	m.	α	0.838	{ 506 } { 235 }	3.99
143.4	9410	m. d.	α_6	0.819	156	3.90
156.0	9780	m.	α_7	0.787	—	—

PbMoO_4

26.0	0.2249	d.	β_2	3.08	—	—
28.8	2486	f. f.	α_2	3.09	101	3.67
30.7	2638	m.	α	2.92	002	3.76
34.5	2940	m. d.	α	2.615	110	3.71
39.0	3359	d.	α	2.305	102	3.72
40.0	3408	d. d.	β_3	2.005	—	—
42.1	3584	d.	β_3	1.956	—	—
44.4	3776	d.	β_4	1.84	—	—
45.9	3891	f.	α_3	1.975	112	3.75
47.0	3988	d. d.	β_5	1.745	—	—
48.5	4098	m.	α_4	1.88	200	3.76
50.2	4242	d. d.	β_6	1.66	—	—
51.0	4305	d.	β_7	1.615	—	—
52.3	4400	f.	α_5	1.75	113	3.76
56.7	4740	f. f.	α_6	1.624	121	3.78
58.0	4840	m. f.	α_7	1.59	202	3.77
62.4	5180	d.	α	1.485	004	3.77
65.2	5382	d.	β_8	1.29	—	—
70.0	5758	d. d.	β_9	1.21	—	—

Segue PbMoO_4

θ	$\text{sen } \frac{\theta}{2}$	I	K	d	$h_1 \ h_2 \ h_3$	a
72.6	0.5918	m.	α	1.30	221	3.78
73.1	5950	f.	α_8	1.294	123	3.80
75.0	6090	d.	α	1.263	300	3.80
77.1	6222	m.	α	1.237	301	3.80
78.0	6290	d.	α	1.223	222	3.80
79.7	6400	m.	α_9	1.203	130	3.81
81.8	6540	m.	α	1.176	{ 204 } 131	3.79
84.7	6720	m.	β_{10}	1.034	—	—
87.2	6900	m. f.	α	1.116	{ 132 } 223	3.80
90.2	7090	d. d.	β_{11}	0.981	—	—
91.7	7180	m. d.	α	1.07	303	3.80
95.5	7400	f.	α_{10}	1.04	231	3.81
100.0	7660	m. d.	$\beta_{12} \text{ e } \alpha$	{ 1.004 } 0.908	224 } 006 }	3.81
103.2	7840	m. f.	α_{11}	0.981	125	3.80
109.8	8180	f.	α_{12}	0.941	134	3.81
114.6	8410	m. f.	α	0.915	141	3.81
117.4	8540	d. d.	β_{13}	0.814	—	—
120.0	8660	m. d.	$\alpha \beta_{14}$	0.887	331	3.81
122.8	8780	d.	α	0.875	142	3.78
125.2	8880	d.	α	0.867	305	3.78
127.5	8980	m. d.	α	0.857	332	3.79
131.6	9120	f.	α	0.844	240	3.78
137.2	9320	m. f.	α	0.826	—	—
141.0	9420	d. d.	α	0.817	{ 242 } 333	3.79
143.5	9490	m. f.	α_{13}	0.811	—	—
148.0	9620	m. f.	α_{14}	0.80	404	3.79

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — Sulla determinazione delle traiettorie isogonali di un sistema di linee in talune superficie. Nota di MINEO CHINI presentata dal Socio L. BIANCHI ⁽¹⁾.

Dimostrerò dapprima il seguente teorema:
Per tutte le superficie di elemento lineare:

$$(1) \quad ds^2 = V_1 \left\{ du^2 + (u^2 + V^2) dv^2 \right\},$$

dove V e V_1 sono funzioni comunque assegnate del parametro u , la determinazione delle traiettorie isogonali delle linee $v = \text{cost}$ può farsi dipendere dall'integrazione di un'equazione differenziale della forma:

$$(2) \quad \frac{dx}{dx} = (1 - \kappa^2)(1 - \alpha^2),$$

essendo α funzione nota della variabile x .

Infatti, quando un ds^2 abbia la forma:

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2,$$

detto ω l'angolo, diverso da $\pi/2$, sotto cui una linea di equazione

$$u = f(v)$$

incontra le $v = \text{cost}$, si ha:

$$\cot \omega = \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{du}{dv}.$$

Perciò, nel caso dei ds^2 della forma (1), l'equazione differenziale delle richieste traiettorie sarà:

$$\frac{du}{dv} = \sqrt{u^2 + V^2} \cot \omega.$$

Posto ora:

$$x = v \cot \omega,$$

l'equazione precedente diventa:

$$(3) \quad \frac{du}{dx} = \sqrt{u^2 + V^2}.$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 3 settembre 1925.

dove X è la funzione di x a cui si riduce la V per il suddetto cambiamento di variabile.

Dopo ciò, osservarsi che, se nella (3) facciamo la sostituzione:

$$(4) \quad u = \frac{X\tilde{\chi}}{\sqrt{1-\tilde{\chi}^2}},$$

si ottiene come equazione trasformata l'altra:

$$\frac{\tilde{\chi}'}{1-\tilde{\chi}^2} + \frac{X'\tilde{\chi}}{X} = 1,$$

cioè

$$(5) \quad \frac{d\tilde{\chi}}{dx} = (1-\tilde{\chi}^2) \left(1 - \frac{X'\tilde{\chi}}{X} \right),$$

che è appunto un'equazione della forma (2) con

$$a = \frac{X'}{X}.$$

E poichè dalla (4) si ricava

$$\tilde{\chi} = \pm \frac{u}{\sqrt{u^2 + X^2}},$$

concludiamo che, determinato l'integrale generale dell'equazione (5), si avrà subito quello della (3) con l'uso della precedente sostituzione. Infine, se nell'integrale generale dell'equazione (3) si sostituisce alla variabile x l'espressione $v \cot \omega$, si otterrà l'equazione delle traiettorie isogonali, sotto l'angolo ω , delle linee $v = \text{cost}$ delle superficie di elemento lineare (1).

Ciò premesso, suppongasì che nella (1) sia:

$$V = e^{kv},$$

con k costante non nulla. Avremo allora:

$$X = e^{kx \tan \omega},$$

e l'equazione (5) diventerà:

$$(6) \quad \frac{d\tilde{\chi}}{dx} = (1-\tilde{\chi}^2) (1 - a\tilde{\chi}), \quad \text{con} \quad a = k \tan \omega.$$

A questo punto bisognerà distinguere due casi; secondo che sia:

$$\tan \omega = \frac{1}{k}, \quad \text{oppure:} \quad \tan \omega \neq \frac{1}{k}.$$

Nel primo caso la (6) si riduce all'altra:

$$\frac{d\tilde{x}}{dX} = (1 - \tilde{x})(1 - \tilde{x})^2$$

il cui integrale generale è:

$$(7) \quad \frac{2}{1 - \tilde{x}} + \log \frac{1 + \tilde{x}}{1 - \tilde{x}} = 4x + C.$$

Nel secondo caso l'integrale generale della (6) sarà:

$$(8) \quad (1 + \tilde{x})^{1-a} (1 - a\tilde{x})^{2a} = C (1 - \tilde{x})^{1+a} e^{a(x-a^2)x}.$$

Dopo ciò concludiamo:

L'equazione generale delle traiettorie isogonali sotto l'angolo $\omega = \pi/2$ delle linee $v = \text{cost}$ di ogni superficie di elemento lineare:

$$(9) \quad ds^2 = V_1 \left\{ du^2 + (u^2 + e^{2kv}) dv^2 \right\}$$

è rappresentata dalla (7) dove si faccia:

$$x = kv, \quad \tilde{x} = \frac{u}{\sqrt{u^2 + e^{2kv}}},$$

se $\tan \omega = 1/k$.

Per tutti gli altri valori dell'angolo ω l'equazione delle suddette traiettorie sarà la (8) dove si faccia:

$$a = k \tan \omega, \quad x = v \cot \omega, \quad \tilde{x} = \frac{u}{\sqrt{u^2 - e^{2kv}}},$$

intendendo, in ogni caso, che il radicale quadratico sia suscettibile del doppio segno.

*
**

Supposto ora $V_1 = 1$, passiamo a considerare i ds^2 della forma:

$$(10) \quad ds^2 = du^2 + (u^2 + V^2) dv^2.$$

A questo tipo appartiene l'elemento lineare di ogni superficie rigata luogo delle binormali ad una curva dello spazio la cui torsione sia espressa da

$$\frac{1}{V},$$

quando si assuma come parametro v delle binormali (generatrici della rigata) l'arco dell'*indicatrice sferica* delle binormali stesse.

Infatti se σ è l'arco di una curva qualunque dello spazio (direttrice della superficie rigata), assumendolo come parametro delle binormali uscenti dai vari punti della linea, si ha per elemento lineare della rigata:

$$ds^2 = du^2 + \left(\frac{u^2}{\tau^2} + 1 \right) d\sigma^2,$$

dove $1/\tau$ è la torsione della direttrice $u = 0$, espressa in funzione dell'arco σ della medesima. E possiamo anche scrivere:

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + \tau^2) \frac{d\sigma^2}{\tau^2}.$$

Ed ora, se chiamiamo v l'arco dell'*indicatrice sferica* delle binormali, poichè si ha:

$$dv = \frac{d\sigma}{\tau},$$

ne risulta che il precedente ds^2 assume la forma (10), dove V è l'espressione di τ in funzione del nuovo parametro v delle binormali⁽¹⁾. Tale espressione si avrà subito, tenendo presente che è:

$$v = \int \frac{d\sigma}{\tau} = f(\sigma).$$

Dopo ciò possiamo concludere:

La determinazione delle traiettorie isogonali delle binormali a qualsivoglia curva dello spazio di cui si conosca la torsione in funzione dell'arco della linea, può farsi dipendere dall'integrazione di un'equazione differenziale della forma (2).

Per trovare le dette traiettorie basterà infatti esprimere la torsione in funzione dell'arco v dell'*indicatrice sferica* delle binormali, e poi integrare l'equazione (5).

Nel caso speciale in cui si prenda:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{k\sigma},$$

si ha:

$$v = \int \frac{d\sigma}{k\sigma} = \frac{1}{k} \log k\sigma.$$

(1) Tutto ciò si poteva ricavare subito da note formule della teoria delle superficie rigate. Veggasi: BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, 2ª edizione. Vol. I, p. 259.

Conseguentemente:

$$V = e^{kv}.$$

L'elemento lineare della superficie rigata, nella forma (10), sarà allora dato dalla (9) dove si faccia $V_1 = 1$; perciò si conosceranno, mediante le equazioni (7) e (8), le traiettorie isogonali delle binormali $v = \text{cost.}$

Si conosce dunque l'equazione in termini finiti delle traiettorie isogonali delle binormali a qualsivoglia curva dello spazio la cui torsione sia inversamente proporzionale all'arco della curva stessa.

Osservisi poi che un caso ovvio in cui si sa integrare l'equazione (5) è quello che risulta dal supporre:

$$V = k = \text{costante non nulla};$$

perchè allora la (5) si riduce all'altra:

$$\frac{d\chi}{dx} = 1 - \chi^2,$$

il cui integrale generale è:

$$\chi = \tanh b (x + C).$$

L'elemento lineare (1) diviene in tal caso:

$$ds^2 = V_1 \left\{ du^2 + (u^2 + k^2) dv^2 \right\},$$

e per ognuna di queste superficie si conoscerà l'equazione in termini finiti delle traiettorie isogonali delle linee $v = \text{cost.}$ giacchè tale equazione sarà:

$$u = k \sinh b (v \cot \omega + C).$$

Supposto inoltre $V_1 = 1$, si avranno le superficie applicabili sulla catenoidale, fra le quali si trova l'elicoide rigata ad area minima di parametro $k^{(1)}$, e si trovano pure le rigate luogo delle binormali alle curve a torsione costante $1/k$; perchè allora il precedente ds^2 diventa:

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + k^2) dv^2.$$

Le linee $v = \text{cost}$ sono i meridiani della catenoidale, le generatrici rettilinee dell'elicoide e le binormali alle suddette curve.

(1) Veggasi: BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*. Vol. I, p. 236.

Prima di chiudere la presente Nota osserveremo che le superficie di elemento lineare

$$ds^2 = V_i \left\{ du^2 + (u + V)^2 dv^2 \right\},$$

dove V e V_i indicano funzioni comunque assegnate della sola v , sono a geodetiche note, per qualche speciale espressione di V_i , restando V arbitraria ⁽¹⁾. Di più è facile scrivere, qualunque siano V e V_i , l'equazione delle traiettorie isogonali, sotto l'angolo ω , delle linee $v = \text{cost.}$

Queste traiettorie hanno infatti per equazione differenziale:

$$\frac{du}{dv} = (u + V) \cot \omega;$$

la quale equazione, essendo lineare, avrà come integrale generale:

$$u = \left(C + \cot \omega \cdot \int V e^{-v \cot \omega} dv \right) e^{v \cot \omega}.$$

Idromeccanica. — *Considerazioni su i moti irrotazionali di lamine liquide.* Nota di BRUNO FINZI, presentata dal Corrispondente U. CISOTTI ⁽²⁾.

I. — RICHIAMI.

In una Nota recente ⁽³⁾ il Prof. Cisotti definisce la variabile complessa z su di una superficie σ , caratterizzata da

$$ds^2 = \sum_{ik}^2 a_{ik} dx_i dx_k,$$

in modo tale che $z = \text{cost.}$ risulta integrale della

$$a_{11} dx_1 + (a_{12} + i \sqrt{a}) dx_2 = 0 \quad (4).$$

Nota z , poniamola sotto la forma

$$z = y_1 + iy_2,$$

essendo y_1 e y_2 funzioni reali perfettamente note di x_1 e x_2 .

(1) Veggansi due mie Note: *Sulla determinazione delle geodetiche di talune superficie* « Rendiconti Lincei », anno 1925.

(2) Pervenuta all'Accademia il 3 settembre 1925.

(3) CISOTTI, *Equazioni fondamentali dei moti laminari potenziali sopra una superficie qualunque*. Questi « Rend. », vol. I, 1925, p. 612.

(4) U. CISOTTI, loc. cit., formula (3).

2. - SPECIALE CORRISPONDENZA TRA I PUNTI DI UNA SUPERFICIE E I PUNTI DI UN PIANO.

Sia $f = \varphi + i\psi$ una funzione della variabile complessa z . Per essa sussistono le relazioni di monogeneità ⁽¹⁾, e $\Delta_1 \varphi = \Delta_2 \psi = 0$. Ma è noto che se f è funzione della variabile complessa z , e si riferisce il ds^2 a φ e ψ :

$$ds^2 = \frac{1}{\Delta_1 \varphi} (d\varphi^2 + d\psi^2) \quad , \quad \Delta_1 \varphi = \Delta_1 \psi \quad , \quad \nabla(\varphi, \psi) = 0 \quad (2),$$

e in particolare per $f = z$

$$(1) \quad ds^2 = \lambda^2 (dy_1^2 + dy_2^2) \quad , \quad \lambda^2 = \frac{1}{\Delta_1 y_1} = \frac{1}{\Delta_1 y_2} \quad (3).$$

Riferiamoci alle coordinate y_1, y_2 : esse saranno ortogonali, e definiranno sulla superficie un sistema isoterma. Dato il carattere invariante dei parametri differenziali, sarà ancora nelle nuove coordinate:

$$\Delta_1 \varphi = \Delta_1 \psi \quad , \quad \nabla(\varphi, \psi) = 0 \quad , \quad \Delta_2 \varphi = \Delta_2 \psi = 0.$$

Le relazioni di monogeneità diverranno

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = \frac{\partial \psi}{\partial y_2} \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = - \frac{\partial \psi}{\partial y_1}.$$

Consideriamo il piano π il cui

$$(3) \quad ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2.$$

Se $\bar{\Delta}_2$ è il Δ_2 riferito al piano π , le (2) ci assicurano che φ e ψ possono ritenersi soluzioni coniugate di $\bar{\Delta}_2 \varphi = \bar{\Delta}_2 \psi = 0$.

Osserviamo che la (1) definisce una corrispondenza biunivoca continua conforme tra la superficie σ (la cui metrica è definita dalla (1)) e il piano π (la cui metrica è definita dalla (3)). La corrispondenza tra piano e superficie è tale che entrambi ammettono la stessa variabile complessa $z = y_1 + iy_2$ ⁽⁴⁾. Le (2) poi assicurano che se f è funzione di variabile complessa su σ , lo è pure su π .

(1) U. CISOTTI, loc. cit., formula (6).

(2) L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, III^a ed., vol. I, parte I^a, pp. 124-129.

(3) Questa relazione coincide con la (9') della nota del Prof. CISOTTI, *Proprietà delle funzioni di variabile complessa su di una superficie qualunque*, «Rend. Acc. dei Lincei», vol. 2, 1925, p. 81.

(4) L. BIANCHI, loc. cit., p. 140.

3. - SPECIALE CORRISPONDENZA TRA UN MOTO LAMINARE SULLA SUPERFICIE ED UNO SUL PIANO.

Riferiamoci alla superficie σ , e *ivi* definiamo un moto laminare potenziale di un velo liquido. Sia $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$. Sarà:

$$(4) \quad v_1 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, \quad v_2 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial y_2},$$

o anche, per le (2):

$$v_1 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial y_2}, \quad v_2 = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial y_1}.$$

L'equazione fondamentale dell'idromeccanica laminare ⁽¹⁾ diverrà:

$$(5) \quad \frac{df}{dz} = w = \lambda (v_1 - i v_2) = \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = \lambda v e^{i\alpha}, \quad \text{tg } \alpha = -\frac{v_2}{v_1}.$$

Riferiamoci ora al piano π , e *ivi* definiamo un moto laminare potenziale di un velo liquido, tale che $\bar{\mathbf{v}} = \text{grad } \varphi$. Evidentemente

$$\frac{df}{dz} = \bar{v}_1 - i v_2.$$

Così abbiamo stabilita una corrispondenza biunivoca continua tra un campo vettoriale a divergenza nulla di potenziale $\varphi(\bar{\mathbf{v}})$ sul piano, e un altro pure a divergenza nulla di ugual potenziale (\mathbf{v}) sulla superficie.

I due vettori $\bar{\mathbf{v}}$ e \mathbf{v} son tali che

$$\bar{v}_1 = \lambda v_1, \quad \bar{v}_2 = \lambda v_2.$$

Il modulo di \mathbf{v} (poichè y_1 e y_2 sono ortogonali) sarà tale che

$$(6) \quad \bar{v} = \lambda v.$$

Osserviamo che se dt è l'elemento d'arco della linea di flusso di \mathbf{v} , e n la sua normale:

$$v = v_1 \lambda \frac{dy_1}{dt} + v_2 \lambda \frac{dy_2}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\psi}{dn}.$$

La portata tra due linee di flusso ψ_0, ψ_1 , sarà data allora da

$$(7) \quad q = \psi_1 - \psi_0.$$

(1) U. CISOTTI, loc. cit., formula (13).

Osserviamo che le linee di flusso $\psi = \text{cost.}$ hanno la stessa espressione analitica, sia se considerate quali linee di flusso di \mathbf{v} che se considerate quali linee di flusso di $\bar{\mathbf{v}}$. Le due linee si corrispondono dunque biunivocamente nella corrispondenza accennata al numero 2.

In conclusione: Assegnati i valori di φ o ψ su di una linea chiusa l sulla superficie, sono definiti i valori di φ o ψ su di una linea chiusa \bar{l} di π . Noto φ o ψ su \bar{l} , è noto φ o ψ su π , e quindi $\bar{\mathbf{v}}$. Ma noto $\bar{\mathbf{v}}$ è noto \mathbf{v} , cioè il moto cercato.

Analogamente: assegnati i valori di $v = \frac{d\psi}{dn}$ su l , sono pure assegnati i valori al contorno \bar{l} di $\frac{d\psi}{dn} = v\lambda$. Definita allora ψ su π mediante i valori che la sua derivata normale assume al contorno, è ancora noto $\bar{\mathbf{v}}$, e quindi \mathbf{v} .

4. - MOTI A PRESSIONE DINAMICA COSTANTE.

Proponiamoci il seguente problema: è possibile il moto irrotazionale di un velo liquido su di una superficie qualunque, allorchè una faccia del velo stesso è libera, così che su di essa la pressione p è costante? E se possibile, come definire il moto stesso?

Osserviamo intanto che, in assenza di forze esterne, per il teorema di Bernouilli, è $v = \text{cost.}$

Poichè w è funzione di z , lo sarà pure

$$\log w = \log (v\lambda) + i\vartheta.$$

Essendo $v = \text{cost.}$, sarà allora

$$(8) \quad \Delta_2 \log \lambda = \bar{\Delta}_2 \log \lambda = 0.$$

Questa esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè su di una superficie si possano sviluppare moti liquidi laminari nelle condizioni del problema.

Noto λ , e verificata la (8), sarà tosto definita ϑ quale coniugata armonica di $\log \lambda$. Sarà cioè

$$(9) \quad \vartheta = \int_{y_{10}}^{y_1} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial y_2} dy_1 - \int_{x_{20}}^{x_2} \left[\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial y_1} \right]_{y_1=y_{10}} dy_2 + \text{cost.}$$

Allora le relazioni

$$\bar{v}_1 = v\lambda \cos \vartheta, \quad \bar{v}_2 = v\lambda \sin \vartheta$$

definiranno il moto sul piano, e le relazioni

$$v_1 = v \cos \vartheta, \quad v_2 = v \sin \vartheta$$

il moto sulla superficie.

Sia, ad esempio, la *superficie σ piana*: Sarà $\lambda = 1$, e la (8) è ben soddisfatta. La (9) definisce $\vartheta = \text{cost.}$; così che sul piano sono possibili, nelle condizioni del problema, soltanto moti di pura traslazione rettilinea ed uniforme. Ciò, del resto, è ben noto ⁽¹⁾.

Sia *σ superficie sferica*: Sarà (in coordinate geografiche)

$$ds^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\omega^2); \quad \chi = \omega - i \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

$$y_1 = \omega, \quad y_2 = -\log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad \lambda = R \sin \theta = R \frac{e^{-y_2}}{\sqrt{1 + e^{-2y_2}}}.$$

Evidentemente

$$\Delta_2 \log \lambda = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dy_2^2} \log (1 + e^{-2y_2}) \neq 0.$$

Non sono dunque possibili i moti in istudio sulla sfera.

Sia *σ superficie di rotazione*: Sarà (in coordinate geografiche)

$$ds^2 = (\rho^2 + \rho'^2) d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\omega^2, \quad \rho = \rho(\theta);$$

$$\chi = \omega - i \int \mu d\theta, \quad \mu = \frac{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}{\rho \sin \theta},$$

$$y_1 = \omega, \quad y_2 = -\int \mu d\theta, \quad dy_2 = -\mu d\theta; \quad \lambda = \rho \sin \theta.$$

La (8) diverrà

$$\frac{d^2}{dy_2^2} \log \lambda = \frac{\lambda'' \lambda \mu - \lambda' (\lambda \mu)'}{\lambda^2 \mu^3} = 0, \quad \lambda' = \frac{d\lambda}{d\theta}, \dots \text{ecc.};$$

ed essendo λ , λ' e μ finite, se c è costante, $\lambda' = c \lambda \mu$ ⁽²⁾. Ossia

$$\rho' \sin \theta + \rho \cos \theta = c \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$$

da cui

$$\rho = \frac{k}{\sqrt{c^2 - \sin^2 \theta}} e^{\pm \frac{\sqrt{1-c^2}}{c} F\left(\frac{1}{c}, \theta\right)} \quad (3)$$

(1) U. CISOTTI, *Idromeccanica piana*, vol. I, p. 69.

In generale, può sempre suporsi $\lambda = 1$ per le superficie sviluppabili. Anche per esse dunque la (8) è ben soddisfatta, e $\vartheta = \text{cost.}$

(2) Se $\lambda' = 0$, $\rho \sin \theta = \text{cost.}$, e la superficie diviene cilindrica.

(3) Per $c = 1$, la superficie è piana.

In quest'ultima k è costante, $F\left(\frac{1}{c}, \theta\right)$ è la F di Legendre (integrale ellittico di prima specie).

Soltanto sulle superficie ottenute dalla rotazione attorno ad un opportuno asse delle linee la cui equazione è del tipo precedente, potranno dunque aver luogo moti irrotazionali di lamine liquide libere, in assenza di forze esterne.

È ragionevole pensare che se un moto liquido laminare è simmetrico attorno ad un asse, e la lamina è indeformabile, la lamina stessa, nelle condizioni del problema, non possa foggarsi che nel modo di cui ho detto più sopra.

Il problema di cui ho parlato si estende agevolmente al caso in cui agiscano forze esterne, provenienti da un potenziale U .

In verità, basta all'uopo sostituire nella (8) e nella (9) a $\lambda, \lambda \sqrt{U + \text{cost.}}$

Idromeccanica. — *Effetto dinamico di una corrente che fluisce tra una lastra ed una parete piana indefinita.* Nota del Ten. Colonnello del Genio Aeronautico, dott. E. RAIMONDI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI⁽¹⁾.

1. Consideriamo una lastra (striscia) di lunghezza indefinita, che abbia i lati paralleli ad una parete rigida piana pure indefinita. La lastra sia immersa in una massa fluida incompressibile di densità costante ed uguale ad 1, che occupi il semispazio limitato dalla parete piana⁽²⁾.

Supponiamo che il fluido circoli, in modo permanente attorno alla lastra, e che, in ogni sezione piana, normale ai lati di essa, il moto avvenga

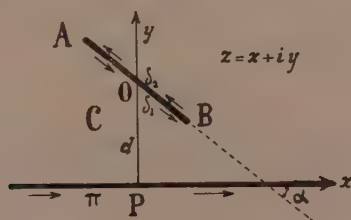


Fig. 1.

nello stesso modo; supponiamo in altri termini, che siano verificate le condizioni affinché ci si possa riferire al moto piano. Possiamo considerare

(1) Pervenuta all'Accademia il 15 settembre 1925.

(2) Possiamo dire che consideriamo schematicamente un aeroplano in vicinanza del suolo.

così, nel piano, una corrente che circola attorno ad un segmento rettilineo AB , scorrendo tra il segmento ed una parete rigida rettilinea indefinita π (fig. 1).

Ci proponiamo di determinare la risultante ed il momento delle pressioni dinamiche esercitate dalla corrente circolatrice sul segmento e sulla parete.

Poichè il medesimo problema, ma con un profilo circolare (anzichè rettilineo), è stato risoluto ⁽¹⁾, poichè cioè sono note le pressioni dinamiche esercitate da una corrente che circoli attorno ad un disco circolare δ' , quando nelle vicinanze vi è una parete indefinita π' (fig. 2); la maniera più semplice per risolvere il nostro problema consiste nello stabilire la corrispondenza conforme tra il campo C del moto nel sistema segmento-pa-

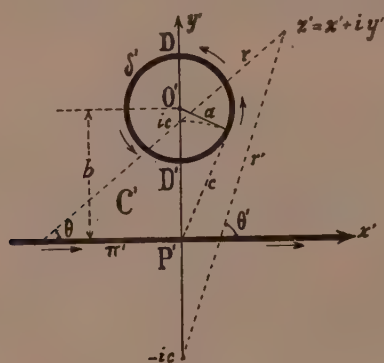


Fig. 2.

rete (fig. 1) e quello C' nel sistema disco-parete (fig. 2); in maniera da potere estendere al primo i risultati ottenuti nel caso del secondo sistema. In altre parole, se chiamiamo

$$z = x + iy$$

l'affissa di un punto generico del piano della fig. 1, e

$$z' = x' + iy'$$

quella di un punto generico del piano della fig. 2, si tratta di stabilire la corrispondenza conforme tra il piano z ed il piano z' .

(1) CISORTI, *Effetto dinamico di una corrente che fluisce tra un cilindro ed una parete piana indefinita*, «Rend. R. Accademia Nazionale dei Lincei», vol. 1°, serie 6°, maggio 1925, fasc. 9°, pp. 494-499.

Trattandosi di campi doppiamente connessi, ciò si può fare coll'intermediario di una corona circolare, trasformando cioè, in modo conforme, sia il campo C' del moto disco-parete, che quello C del moto segmento-parete, nel campo Γ di una corona circolare (fig. 3), di cui indicheremo un punto generico con

$$Z = X + iY.$$

2. Incominciamo collo stabilire la corrispondenza conforme tra il campo C' della fig. 2 (disco-parete) e quello Γ della fig. 3 (corona circolare).

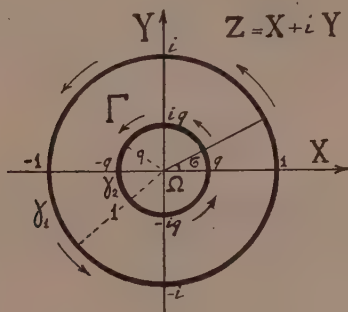


Fig. 3.

Ciò non presenta difficoltà poichè, come è noto, ogni sostituzione unimodulare

$$(I) \quad Z = \frac{m_1 \zeta' + m_2}{n_1 \zeta' + n_2},$$

con

$$\begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

stabilisce una corrispondenza tra i piani Z e ζ' , in maniera che ad ogni circonferenza o ad ogni retta dell'uno corrisponde una circonferenza od una retta dell'altro; stabilisce cioè tra i due piani considerati, come si suol dire, un'affinità circolare.

Si tratta quindi semplicemente di determinare i coefficienti m_1, m_2, n_1, n_2 , in maniera che alla circonferenza δ' ed alla retta π' del campo C' corrispondano le due circonferenze della corona circolare del campo Γ , e precisamente, per fissare le idee, che alla circonferenza δ' corrisponda la circonferenza minore γ_2 della corona circolare, il cui raggio indicheremo con q , e che alla retta π' corrisponda la circonferenza maggiore γ_1 , che supporremo abbia il raggio uguale ad 1.

3. Nel nostro caso però, anzichè partire dall'espressione generale (1) della sostituzione unimodulare, conviene considerare la sostituzione più semplice

$$(2) \quad Z = \frac{\zeta' - ic}{\zeta' + ic},$$

dove c è un coefficiente reale e positivo, che determineremo in seguito.

Osservando che il modulo di $\zeta' - ic$ misura il segmento che congiunge l'indice del numero ζ' con quello del numero ic , e che il modulo di $\zeta' + ic$ misura il segmento che congiunge l'indice del numero ζ' con quello del numero $-ic$, segue che per tutti i punti dell'asse x' si ha

$$|\zeta' - ic| = |\zeta' + ic|,$$

e quindi, per la (2)

$$|Z| = 1;$$

cioè, ai punti dell'asse x' corrispondono, nel piano Z , i punti della circonferenza di raggio unitario γ_1 , che ha il centro nell'origine Ω delle coordinate. A seconda poi che sia

$$|\zeta' - ic| \geq |\zeta' + ic|,$$

si ha rispettivamente

$$|Z| \geq 1,$$

cioè, ai punti del semipiano $y' < 0$ corrispondono, nel piano delle Z , i punti esterni alla circonferenza γ_1 , ed ai punti del semipiano $y' > 0$ corrispondono i punti interni alla circonferenza stessa. Si ha senz'altro, intanto, che ad ogni figura del semipiano $y' > 0$ corrisponde, nel piano delle Z , una figura interna alla circonferenza γ_1 , ed, in particolare, che alla circonferenza δ' corrisponde una circonferenza interna alla circonferenza γ_1 .

Ma conviene approfondire la discussione. Poichè dalla (2) si ricava:

$$(3) \quad X = \frac{x'^2 + y'^2 - c^2}{x'^2 + y'^2 + 2cy' + c^2},$$

$$(4) \quad Y = -\frac{2cx'}{x'^2 + y'^2 + 2cy' + c^2};$$

pei punti dell'asse x' si ha

$$(5) \quad X = \frac{x'^2 - c^2}{x'^2 + c^2},$$

$$(6) \quad Y = -\frac{2cx'}{x'^2 + c^2}.$$

quindi al punto improprio della retta x' (e, cioè, sia che si faccia tendere x' a $-\infty$ che a $+\infty$) corrisponde il punto

$$X = 1, \quad Y = 0.$$

Per valori di $x' < 0$ si ha $Y > 0$, cioè i punti corrispondenti stanno nel semicerchio superiore⁽¹⁾ e per valori di $x' > 0$, si ha $Y < 0$, e quindi i punti corrispondenti stanno nel semicerchio inferiore; ed inoltre al punto P' , origine delle coordinate, corrisponde il punto

$$X = -1, \quad Y = 0.$$

Infine, per vedere il senso secondo il quale si muove il punto corrispondente sulla circonferenza, quando il punto si muove, in un dato senso, sull'asse x' , basta osservare che, poichè la derivata

$$\frac{dX}{dx'} = \frac{4c^2 x'}{(x'^2 + c^2)^2}$$

è dello stesso segno di x' , X è crescente o decrescente a seconda che x' sia positiva o negativa; se ne deduce che nel semicerchio superiore ($x' < 0$) la X è decrescente, mentre in quello inferiore ($x' > 0$) la X è crescente. Dunque, quando un punto si muove sull'asse x' , da $-\infty$ a $+\infty$, il punto corrispondente, nel piano delle Z , si muove sulla circonferenza unitaria, partendo dal punto 1 e ritornando al punto 1, nel senso delle lancette di un orologio, che assumeremo come senso positivo delle rotazioni.

I punti del primo quadrante ($x' > 0, y' > 0$) corrispondono ai punti del semicerchio inferiore ($Y < 0$), e quelli del secondo quadrante al semicerchio superiore.

4. Determiniamo ora c in maniera che la (2) alla circonferenza δ' , del piano ζ' , faccia corrispondere, nel piano Z , una circonferenza γ_2 concentrica a γ_1 , che, come abbiamo visto, deve essere interna ad essa.

A tal fine introduciamo le coordinate bipolari, prendendo come poli i punti ic e $-ic$.

Dette r ed r' le distanze di un punto generico ζ' dai punti ic e $-ic$, ed indicando con θ e θ' rispettivamente gli angoli che r ed r' fanno coll'asse x' (fig. 2), poichè si ha

$$\zeta' - ic = re^{i\theta},$$

$$\zeta' + ic = r'e^{i\theta'};$$

la (2) diventa

$$(7) \quad Z = \frac{r}{r'} e^{i(\theta - \theta')}.$$

(1) Superiore rispetto all'asse X , riferendoci al modo nel quale venne disegnata la fig. 3.

Ma, sopra δ' ,

$$r^2 = x'^2 + (y' - c)^2,$$

$$r'^2 = x'^2 + (y' + c)^2,$$

quindi

$$(8) \quad \frac{r^2}{r'^2} = \frac{x'^2 + y'^2 - 2cy' + c^2}{x'^2 + y'^2 + 2cy' + c^2};$$

e, chiamando a il raggio di δ' e b l'ordinata del suo centro, poichè l'equazione di δ' è

$$x'^2 + y'^2 = a^2 - b^2 + 2by',$$

la (8) diventa

$$\frac{r^2}{r'^2} = \frac{a^2 - b^2 + 2by' - 2cy' + c^2}{a^2 - b^2 + 2by' + 2cy' + c^2};$$

dalla quale si rileva che, affinchè la (7) rappresenti una circonferenza, deve aversi

$$c^2 = b^2 - a^2,$$

perchè allora si ha

$$\frac{r}{r'} = \sqrt{\frac{b-c}{b+c}}.$$

Così, la sostituzione (2) prende la forma

$$(9) \quad Z = \frac{\zeta' - i\sqrt{b^2 - a^2}}{\zeta' + i\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

e l'equazione della circonferenza γ_2 diventa

$$Z = qe^{i(\theta - \theta')},$$

se si indica con q il suo raggio, cioè, se si pone

$$(10) \quad q = \sqrt{\frac{b - \sqrt{b^2 - a^2}}{b + \sqrt{b^2 - a^2}}},$$

che è un numero minore di 1, come era da prevedersi.

Osserviamo inoltre che se dall'origine P' si conduce una tangente a δ' , il segmento di essa compreso tra P' ed il punto di contatto è uguale a c . Ma abbiamo visto che ai punti del primo quadrante del piano delle ζ' corrispondono i punti del semicerchio γ_1 che appartiene al semipiano $Y < 0$ e che a quelli del secondo quadrante corrispondono i punti del semicerchio γ_1 ,

che appartiene al semipiano $Y > 0$, quindi alle semicirconferenze di δ' , che si trovano nel primo e nel secondo quadrante, corrispondono rispettivamente le semicirconferenze di γ_2 che si trovano nei semipiani $Y < 0$ ed $Y > 0$. Segue che, mentre un punto descrive la circonferenza δ' nel senso positivo, il punto corrispondente descrive la circonferenza γ_2 pure nel senso positivo.

Osserviamo infine che, poichè ai punti P' , D' e D , del piano delle ζ' , corrispondono ordinatamente i punti -1 , $-q$, q , all'asse y' corrisponde l'asse X .

Fisica matematica. — *Metodo di risoluzione di un problema fondamentale nella teoria del moto lento stazionario dei liquidi viscosi.* Nota di U. CRUDELI, presentata dal Socio A. DI LEGGE⁽¹⁾.

In un lavoro comparso il 1924 nel « *Mathematische Zeitschrift* »⁽²⁾, il sig. Lichtenstein, sfruttando un accorgimento del Tedone sulle equazioni fondamentali della ordinaria teoria dell'elasticità ed un risultato del sig. Lévy⁽³⁾ sul comportamento della classica funzione di Green nelle vicinanze della frontiera del campo, in cui essa venga definita, pervenne ad un elegante metodo di risoluzione del così detto primo problema al contorno della teoria della elasticità⁽⁴⁾. Io qui (con ispirazione al suddetto lavoro del Lichtenstein) estendendo l'accorgimento del Tedone alle equazioni fondamentali del moto lento stazionario di un liquido viscoso e sfruttando inoltre il predetto risultato del Lévy, mi propongo la ricerca della velocità e della pressione del liquido, internamente ad uno spazio S , nella ipotesi che sul contorno σ (chiuso e regolare) di cotesto spazio siano prefissate (soddisfacenti alla relazione che da ultimo vedremo) le velocità del liquido medesimo, liquido soggetto ad assegnate forze (regolari) di massa⁽⁵⁾.

(1) Pervenuta all'Accademia il 1° agosto 1925.

(2) Band 20, Heft 1-2, p. 21.

(3) *Acta mathematica*, 1920.

(4) Va notato che il primo termine del secondo e del terzo membro della formula (16) di cotesto lavoro del Lichtenstein (formula ottenuta in base al suddetto risultato del Lévy ed alla quale dovremo anche noi ricorrere) trovasi preceduto da un segno negativo ad esso non spettante. Ciò porta (sia detto incidentemente) una semplice modifica nei coefficienti della equazione integrale (20) del lavoro medesimo. Cotesta rettifica formerà oggetto di un richiamo del chiarissimo autore in uno dei prossimi fascicoli del « *Mathematische Zeitschrift* ».

(5) Nel 1908 il problema del moto lento stazionario dei liquidi viscosi, entro uno spazio chiuso, per date velocità sul contorno, fu trattato (sotto certe restrizioni) dal sig. KORN mediante un metodo di approssimazioni successive (« *Rend. del Circolo matematico di Palermo* », vol. 25). Vedasi poi dello stesso autore un articolo comparso nei « *Comptes Rendus* » del 1910 (vol. 151). Nel 1910 comparvero, inoltre, le ricerche del prof. BOGGIO nei « *Rend. della R. Accad. dei Lincei* » (1° sem.) ed in quelli del « *Circolo matematico di Palermo* » (2° semestre).

Viene supposto che sopra σ quelle velocità, oltre a soddisfare alla censata relazione (dopo ciò per noi *necessaria e sufficiente*), siano tali che, denotando sul contorno stesso con u, v, w le componenti di una generica velocità, le funzioni armoniche continue nello spazio S (contorno incluso), da intendersi regolari entro S , le quali sopra σ coincidono rispettivamente con u, v, w , abbiano le derivate prime continue anche sul predetto contorno.

*
* *

Usando notazioni vettoriali, le nostre equazioni indefinite sono:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{grad} p + \mu \Delta' \mathbf{V} + \mathbf{F} = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \end{array} \right.$$

dove μ denota la viscosità (costante) del liquido, mentre \mathbf{F}, \mathbf{V} e p denotano rispettivamente la forza di massa per unità di volume, la velocità e la pressione.

Dalle (1) segue, per noi,

$$(2) \quad \Delta p = \operatorname{div} \mathbf{F};$$

quindi

$$\mathbf{F} + \frac{1}{2} \mathbf{R} \operatorname{div} \mathbf{F} + \Delta' \left(\mu \mathbf{V} - \frac{1}{2} p \mathbf{R} \right) = 0,$$

dove \mathbf{R} designa il vettore individuato dalla differenza fra un generico punto interno dello spazio S ed un prefissato punto dello spazio.

Ciò premesso, in corrispondenza ad un generico punto (che verrà denotato con O) interno ad S scriveremo

$$\begin{aligned} 4\pi \left(\mu \mathbf{V}_0 - \frac{1}{2} p_0 \mathbf{R}_0 \right) &= \mu \int_{(\sigma)} \mathbf{V} (\mathbf{n} \times \operatorname{grad} G) d\sigma - \\ &- \frac{1}{2} \int_{(\sigma)} p \mathbf{R} (\mathbf{n} \times \operatorname{grad} G) d\sigma + \int_{(S)} \left(\mathbf{F} + \frac{1}{2} \mathbf{R} \operatorname{div} \mathbf{F} \right) G dS, \end{aligned}$$

con manifesto significato dei simboli, ove naturalmente s'intenda che il vettore \mathbf{R} contenuto sotto il segno $\int_{(\sigma)}$ sia la differenza fra il punto M relativo all'elemento $d\sigma$ ed un prefissato punto (diciamolo A) dello spazio, mentre l'altro \mathbf{R} rappresenti la differenza fra il punto M relativo all'elemento dS ed il punto A . La G designa la classica funzione di Green ed \mathbf{n} il noto vettore unitario, il quale possiede la direzione della normale alla

superficie σ ed il verso di essa normale supposta volta verso l'interno dello spazio S. D'altra parte, tenendo presente la (2), si scriva

$$4\pi p_0 \mathbf{R}_0 = \int_{(\sigma)} p \mathbf{R}_0 (\mathbf{n} \times \text{grad } G) d\sigma - \int_{(S)} G \mathbf{R}_0 \text{div } \mathbf{F} dS.$$

Dunque, essendo $\mathbf{M} = \mathbf{O} + \mathbf{R} - \mathbf{R}_0$, avremo

$$(3) \quad \mathbf{V}_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{(\sigma)} \mathbf{V} (\mathbf{n} \times \text{grad } G) d\sigma + \frac{1}{8\pi\mu} \int_{(\sigma)} p (\mathbf{O} - \mathbf{M}) (\mathbf{n} \times \text{grad } G) d\sigma + \\ + \frac{1}{8\pi\mu} \int_{(S)} \left\{ 2\mathbf{F} + (\mathbf{M} - \mathbf{O}) \text{div } \mathbf{F} \right\} G dS.$$

Ora, richiamando l'equazione $\text{div } \mathbf{V}_0 = 0$, potremo (con manifesto significato delle notazioni div_0 e grad_0) scrivere

$$\text{div } \mathbf{E}_0 + \int_{(\sigma)} p \text{div}_0 \left\{ (\mathbf{n} \times \text{grad } G) (\mathbf{O} - \mathbf{M}) \right\} d\sigma + \\ + 2 \int_{(S)} (\mathbf{F} \times \text{grad}_0 G) dS + \int_{(S)} \text{div}_0 \left\{ G (\mathbf{M} - \mathbf{O}) \right\} \text{div } \mathbf{F} dS = 0,$$

$$\text{ove s'intenda } \mathbf{E}_0 = 2\mu \int_{(\sigma)} \mathbf{V} (\mathbf{n} \times \text{grad } G) d\sigma.$$

Ma

$$\text{div}_0 \left\{ (\mathbf{n} \times \text{grad } G) (\mathbf{O} - \mathbf{M}) \right\} = (\mathbf{n} \times \text{grad } G) \text{div}_0 (\mathbf{O} - \mathbf{M}) + (\mathbf{O} - \mathbf{M}) \times \\ \times \text{grad}_0 (\mathbf{n} \times \text{grad } G) = 3 \mathbf{n} \times \text{grad } G + (\mathbf{O} - \mathbf{M}) \times \text{grad}_0 (\mathbf{n} \times \text{grad } G);$$

noltre

$$\text{div}_0 \left\{ G (\mathbf{M} - \mathbf{O}) \right\} = -3 G + (\mathbf{M} - \mathbf{O}) \times \text{grad}_0 G;$$

d'altra parte

$$(4) \quad p_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{(\sigma)} p (\mathbf{n} \times \text{grad } G) d\sigma - \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} G \text{div } \mathbf{F} dS;$$

quindi

$$(5) \quad 12\pi p_0 + \int_{(\sigma)} p (\mathbf{O} - \mathbf{M}) \times \text{grad}_0 (\mathbf{n} \times \text{grad } G) d\sigma + \\ + 2 \int_{(S)} \mathbf{F} \times \text{grad}_0 G dS + \int_{(S)} (\mathbf{M} - \mathbf{O}) \times \text{grad}_0 G \text{div } \mathbf{F} dS + \text{div } \mathbf{E}_0 = 0.$$

Ora si noti che, in base al risultato del Lévy superiormente cennato, col tendere del punto O ad un arbitrario punto, O^* , del contorno σ , potremo scrivere

$$\begin{aligned} \lim \int_{(\sigma)} p(M-O) \times \text{grad}_o (n \times \text{grad } G) d\sigma = \\ = 8\pi p^* + \int_{(\sigma)} p(M-O^*) \times \text{grad}_o^* (n \times \text{grad } G) d\sigma, \end{aligned}$$

con evidente significato dei simboli. Pertanto, se poniamo

$$-4\pi\varphi_o = 2 \int_{(S)} \mathbf{F} \times \text{grad}_o G dS + \int_{(S)} (M-O) \times \text{grad}_o G \text{div } \mathbf{F} dS + \text{div } \mathbf{E}_o,$$

e poi $\varphi^* = \lim \varphi_o$, avremo

$$(6) \quad p^* + \frac{1}{4\pi} \int_{(\sigma)} p(O^*-M) \times \text{grad}_o^* (n \times \text{grad } G) d\sigma = \varphi^*.$$

La (6) costituisce un'ordinaria equazione integrale di seconda specie, con nucleo che, per O^* tendente ad M , diventa infinito come l'inversa della distanza fra cotesti due punti. Ad essa equazione, pertanto, è applicabile la nota teoria del Fredholm. La equazione in discorso può anche scriversi

$$(6) \quad p^* - \frac{1}{4\pi} \int_{(\sigma)} \left(\rho \frac{\partial^2 G}{\partial \rho \partial n} \right)^* p d\sigma = \varphi^*,$$

intendendo che l'operatore $\rho \frac{\partial}{\partial \rho}$ sia individuato mediante

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} = (\xi - x) \frac{\partial}{\partial x} + (\eta - y) \frac{\partial}{\partial y} + (\zeta - z) \frac{\partial}{\partial z},$$

ove ξ, η, ζ sono le coordinate cartesiane (ortogonali) del punto M ed x, y, z quelle del punto O in un medesimo sistema di riferimento.

Ora si osservi che, nel caso di assenza di forze di massa, le (1) sono soddisfatte, in particolare, da $\mathbf{V} = 0$ e $p = \text{costante arbitraria}$; per cui la equazione integrale omogenea corrispondente alla (6) ammette la soluzione $p = \text{costante arbitraria}$. Cotesta equazione integrale omogenea però, all'infuori di essa soluzione, non ne ammette altre, come si vede tenendo presente il noto teorema di unicità della \mathbf{V} nello spazio S , una volta prefissati i valori di essa \mathbf{V} sul contorno. Invero, nell'ipotesi di esistenza di una diversa soluzione della predetta equazione omogenea, si considerino la (3) e la (5) nell'assenza di forze di massa e nella supposizione di velocità nulle

sul contorno σ , intendendo inoltre posta, in esse, per p la soluzione in discorso. Poichè, come mostreremo in uno dei prossimi fascicoli della Rivista di « Matematica e fisica » di Messina ⁽¹⁾ si ha ⁽²⁾

$$\Delta \int_{(\sigma)} p (O - M) \times \text{grad}_0 (\mathbf{n} \times \text{grad } G) d\sigma = 0,$$

la (3) insieme con la (5) porgerebbe allora delle (1) (scritte naturalmente con l'indice relativo al punto O) una soluzione corrispondente a valori nulli delle velocità sopra σ , mentre, nel caso di assenza di forze di massa e di velocità nulle in superficie, risulta, dal richiamato teorema di unicità, non potersi avere che $\mathbf{V}_0 = 0$ e $p_0 = \text{costante}$.

Tornando al caso generale avremo che: la condizione *necessaria e sufficiente*, affinchè la equazione integrale (6) ammetta soluzione, consiste nel richiedere che la φ^* sia ortogonale alla soluzione della così detta equazione associata ⁽³⁾ della integrale omogenea superiormente introdotta.

Supposta soddisfatta cotesta condizione, si denoti con p la soluzione della (6) (soluzione pertanto individuata in modo unico a meno di un'arbitraria costante additiva). La (5), come pure la (4), porge allora (con l'arbitrarietà dovuta alla costante additiva) la pressione in un generico punto dello spazio S, mentre la (3) individua la velocità del liquido in corrispondenza al punto stesso (velocità che sul contorno σ assume i prefissati valori). Invero a noi basta dimostrare che allora, se della p_0 che figura nella (5) si costruisce il Δ , si ottiene $\text{div } \mathbf{F}_0$. La dimostrazione in discorso, la quale non trova posto in questa Nota, viene da me riserbata per la suddetta Rivista di « Matematica e fisica ». In cotesta medesima pubblicazione mostremo, nella ipotesi di σ sferico, come la trovata condizione necessaria e sufficiente (alla quale in principio di Nota fu soltanto alluso) equivalga alla relazione

$$\int_{(\sigma)} \mathbf{n} \times \mathbf{V} d\sigma = 0$$

deducibile dalla $\text{div } \mathbf{V} = 0$.

(1) Casa editrice Giuseppe Principato (Messina-Roma).

(2) Vedasi anche LICHTENSTEIN, loc. cit., pp. 26-27.

(3) Vedasi VIVANTI: *Elementi della teoria delle equazioni integrali lineari* (Ulrico Hoepli - editore - Milano).

Fisica. — *Assorbimento continuo lungo una serie ottica e struttura delle discontinuità d'assorbimento ad alta frequenza*⁽¹⁾. Nota di RITA BRUNETTI presentata dal Socio A. GARBASSO.

1. Al bordo delle discontinuità o bande d'assorbimento degli elementi, nella regione delle meno alte frequenze, si trovano due o tre minimi su un fondo a intensità decrescente, prima del progressivo aumento di intensità che si verifica sempre per frequenze superiori a quella della banda⁽²⁾. La larghezza della regione entro cui si svolge tale struttura è dell'ordine della costante di Rydberg. Quindi W. Kossel⁽³⁾ considera il prodotto della frequenza, ν , del bordo della banda per la costante, h , di Planck, come equivalente al lavoro necessario a strappare un elettrone da un'orbita interna dell'atomo e portarlo, senza imprimergli velocità, fino a distanza dell'ordine del raggio atomico, e i successivi minimi come righe invertite corrispondenti a un salto elettronico da un livello X a uno ottico.

Questa semplice interpretazione giustifica appena la posizione dei minimi rispetto al bordo della banda, ma lascia indeterminata quella del limite della serie a cui la discontinuità d'assorbimento corrisponde.

Scopo della presente Nota è dimostrare come alcuni fatti sperimentali raccolti nella regione ottica, messi a confronto con osservazioni successive alla ipotesi del Kossel, legittimano una interpretazione più precisa della struttura fina delle bande d'assorbimento ad alta frequenza.

2. G. R. Harrison ha ripreso nel 1924 lo studio, già iniziato anche da altri autori fra il 1909 e il 1922⁽⁴⁾, della trasparenza di un vapore allo spettro continuo lungo una serie ottica del vapore stesso e al di là del limite della serie⁽⁵⁾.

Per la serie principale del sodio egli ha notato che:

a) la intensità dello spettro continuo decresce dal principio alla fine della serie;

b) in corrispondenza dei termini più intensi (righe D, primo termine; doppietti 3302 Å e 2853, secondo e terzo termine della serie) si hanno,

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisica in Arcetri; pervenuto il 3 settembre 1925.

(2) Per la rappresentazione grafica della struttura fine rimando ai microfotogrammi pubblicati da H. FRICKE, « Phys. Rev. », 16, 202, 1920 e da A. E. LINDH, *Dissert.*, Lund. 1923.

(3) « ZS. f. Phys. », 1, 124, 1920.

(4) Per un riassunto di queste osservazioni vedere P. D. FOOTE, F. L. MOHLER, *The Origin of Spectra*, New York, 1922, p. 219 e seguenti.

(5) « Phys. Rev. », 24, 466, 1924. A questo lavoro rimando per l'esame diretto della curva di trasmissione le cui caratteristiche sono descritte nel testo.

per densità di vapore relativamente alte, due regioni di assorbimento energetico che interrompono la curva di intensità continua, solcata semplicemente in altri punti dalle righe invertite di minore probabilità;

c) verso il limite della serie l'assorbimento selettivo si confonde col continuo e la curva di trasmissione continua raggiunge un minimo più o meno rapidamente a seconda della densità del vapore;

d) a partire di qui l'intensità aumenta col crescere della frequenza, con legge fino ad ora non determinata per via sperimentale.

Teoricamente Milne prevede pel coefficiente d'assorbimento delle radiazioni situate dopo il limite di una serie ottica la forma $\frac{\text{costante}}{\nu^2}$ ⁽¹⁾. Nel caso dei raggi X, per cui al di là di una discontinuità si presenta un fenomeno analogo, il coefficiente d'assorbimento è con buona approssimazione proporzionale a $\frac{1}{\nu^3}$ ⁽²⁾.

Il risultato dei processi intraatomici suscitati dalle radiazioni di frequenza superiore a quella del limite della serie è simile nei due casi (emissione di fotoelettroni). Se quindi differenze debbono esistere circa la legge dell'assorbimento continuo nella regione spettrale al di là del limite delle serie, esse dipenderanno esclusivamente dalle differenti condizioni in cui si trovano le orbite ottiche e quelle più interne dell'atomo.

Ad ogni modo la analogia di comportamento dell'assorbimento continuo oltre il limite delle serie X e ottiche incoraggia a ritenere che anche *la parte in cui si svolge la struttura fine della banda d'assorbimento dei raggi X sia da porre in parallelo con le manifestazioni dell'assorbimento continuo lungo una serie ottica.*

Allora il minimo subito dopo la banda (dalla parte delle frequenze crescenti) conterrebbe il primo o i primi termini delle serie semiottiche d'assorbimento supposte dal Kossel. Questi per lo più sono già termini elevati di una serie ad alta frequenza. La limitata probabilità dei termini successivi, specialmente a causa delle condizioni sperimentali ordinarie dello strato assorbente, la piccola dispersione di cui si può far uso in questa regione per differenze di frequenza dell'ordine ottico, affrettano certo risultati simili a quelli che nel caso ottico si verificano solo molto lontano dai primi termini. Quindi spesso già *il secondo minimo dopo la discontinuità sarà anche l'ultimo esistente e corrisponderà al limite vero della serie ad alta frequenza a cui la discontinuità si riferisce.*

Al limite della serie principale del sodio non converge altra serie e le manifestazioni notate dell'assorbimento continuo possono considerarsi come tipiche. Se invece, come accade per le terre alcaline, allo stesso livello energetico tendono due serie importanti, sicchè la regione spettrale dell'una si

(1) « Phil. Mag. », 47, 209, 1924.

(2) H. A. KRAMERS, « Phil. Mag. », 46, 836, 1923.

sovrappone a quella dell'altra, tali manifestazioni saranno meno pure, le bande, di cui è parlato nel paragrafo b) delle osservazioni di Harrison, potranno anche essere più di due. A questo forse si deve pensare quando nella struttura fine delle discontinuità dei raggi X si notino più di due minimi piuttosto che a uno sviluppo completo dei fatti osservati da Harrison per la serie principale del sodio. Ad ogni modo l'ultimo dei minimi segnalati prima della ripresa continua di intensità sarà anche qui il limite della serie.

Questo modo di vedere, insieme con la possibilità di inversione delle righe semiottiche supposta dal Kossel, giustifica sia l'andamento generico dell'intensità dal principio alla fine della regione occupata dalla struttura fine, sia la relativa larghezza dei singoli minimi.

3. In base a quanto si è detto, la *distanza fra i due minimi*, in cui consiste la struttura delle discontinuità d'assorbimento nella maggioranza dei casi, cioè la distanza fra la banda di inversione delle prime righe semiottiche e il limite della serie, espressa in termini energetici, a causa della piccola dispersione *differirà assai poco dal lavoro necessario a portare un elettrone senza imprimergli velocità dal primo livello ottico raggiungibile all'infinito*.

Se quindi, coll'aiuto della relazione $\Delta V = \frac{12345}{\lambda^2} \cdot d\lambda$ dedotta da quella di Einstein, traduciamo questa distanza da \tilde{A} in volt, potremo dire che essa è rappresentata con buona approssimazione dal potenziale di ionizzazione di un'orbita dell'atomo eccitato, vale a dire *dalla differenza, $V_i - V_R$, fra potenziale di ionizzazione dell'atomo normale, V_i , e potenziale di risonanza, V_R* . I residui atomici — atomi privati dell'elettrone luminoso — non sono identici nel caso ottico e in quello dei raggi X per la diversa posizione iniziale dell'elettrone luminoso. Con quanto precede ammettiamo dunque che questo non porti altra conseguenza che quella di una correzione al valore dell'energia dei livelli ottici ordinari inferiore all'ordine di approssimazione di cui si può far conto. A questa opinione inducono i pochi dati sperimentali che si sono potuti raccogliere.

a) La radiazione β_1 dello spettro K del sodio è di origine semiottica ⁽¹⁾ cioè è la prima invertibile della serie, 3° termine. La sua lunghezza d'onda essendo $11.591 \tilde{A}$, essa dista dal limite della serie ⁽²⁾, $\lambda = 11.557 \tilde{A}$, di $0.0034 \tilde{A}$.

(1) F. BÄCKLIN, M. SIEGBAHN, R. THORAEUS, « Phil. Mag. », 49, 513, 1925.

(2) I limiti delle serie K di sodio e magnesio usati nel testo sono ottenuti per extrapolazione grafica mediante la nota relazione $\frac{v}{R} = \text{cost. } Z$, ove Z è il numero atomico di Cl, S, A, K, Ca. Dei primi due elementi è nota la struttura fine, per gli altri tre si prevede così poco sviluppata, che l'uso del $\frac{v}{R}$ sperimentale non può introdurre forti errori nel grafico. La stessa cosa non è per Ph, Al, Mg, i cui limiti sperimentali della serie K senza struttura fine sono quindi stati esclusi. Per dati relativi a Cl e S, vedi M. SUGRANS, *Spektroskopie der Röntgenstrahlen*, Berlin, 1921, pp. 139 e 142, per gli altri A. E. LINDB, « Svenska Ac. f. Vet. », 18, 14, p. 12, 1924.

Ora pel sodio $V_i = 5.1$ volt, $V_R = 1.6$ volt⁽¹⁾ quindi $V_i - V_R = 3.5$ volt, pari a 0.038 \AA .

La struttura fine della discontinuità K del sodio non è stata fin qui esaminata. Ha tuttavia qualche valore il fatto che la sua previsione dedotta dai dati sperimentali inversi, si accordi con quella suggerita dalle precedenti considerazioni.

Così la radiazione semiottica β_i , $\lambda = 9.5345 \text{ \AA}$, del magnesio dista dal limite della serie K calcolato per extrapolazione grafica, $\lambda = 9.499 \text{ \AA}$ circa, di 0.0355 \AA , prossimo ai 0.036 \AA deducibili da $V_i - V_R = 7.6 - 2.7 = 4.9$ volt.

Le β_i di sodio e magnesio corrisponderebbero a salti elettronici fra K e $2p_i$ ($i = 1, 2$ per Na $i = 1, 2, 3$ per Mg, nomenclatura ottica). Ora la orbite $2p_i$ di questi elementi penetrano in parte nell'interno del residuo atomico (tauchbahnen)⁽²⁾. La esistenza di questo tipo di orbite ottiche forse giustifica le righe semiottiche invertite ottenute con elementi allo stato solido o di gas a pressione atmosferica, i quali sembrano poco favorevoli allo sviluppo di orbite ottiche.

b) Alle precedenti prove indirette aggiungiamo le prove dirette contenute nella tabelletta. In essa le prime due colonne contengono la posizione del primo minimo, λ_1 , dopo la discontinuità e del limite della serie K, λ_2 , in \AA secondo Lindh⁽³⁾. La terza e quarta indicano in \AA e in volt la distanza media fra questi due minimi, quinta e sesta colonna portano i potenziali di ionizzazione e risonanza per la molecola degli elementi considerati. La settima colonna contiene le differenze fra questi due valori.

Elemento		λ_1	λ_2	$\Delta\lambda_m$	ΔV_m	V_i	V_R	$V_i - V_R$
16, S	da	5.0088	4.9942	0.0144	7.1	12.2	4.8	7.4
	a	5.0007	4.9864					
17, Cl	da	4.3938	4.3816	0.0085	5.5	13.2	8.2	5.0
	a	4.3863						

I potenziali di ionizzazione e risonanza riportati sono stati ottenuti da Mohler e Foote⁽⁴⁾ col metodo delle collisioni tra elettroni e molecole. Recenti ricerche tendono a escludere che i potenziali così ottenuti contengano in sé una parte da attribuire all'energia necessaria per dissociare la molecola, in quanto in casi non dubbi si è notato la capacità della molecola di perdere un elettrone senza subire dissociazione⁽⁵⁾. D'altra parte nel caso di solfo

(1) K. T. COMPTON, F. T. MOHLER, «Bull. Nat. Res. Council», 9, 1924.

(2) F. HUND, «ZS. f. Phys.», 22, 405, 1924.

(3) Vedi M. SIEGBAHN, loc. cit.

(4) K. T. COMPTON, F. T. MOHLER, loc. cit.

(5) C. N. MACKAY, «Phys. Rev.», 24, 319, 1924.

e cloro anche il potenziale di risonanza è superiore a quello di dissociazione (3.9 per S, fra 2.3 e 3.3 per Cl⁽¹⁾), perciò quando si ammetta che basti disporre di un potenziale più elevato per scindere la molecola nei suoi componenti, l'effetto deve risentirsi sia nella ionizzazione che nella risonanza e il risultato differenziale utilizzato rimane inalterato.

Ancora: non si conoscono le serie del cloro e i potenziali citati non hanno nulla a che fare con le note serie di triplette dello zolfo; ma J. J. Hopfield⁽²⁾ ha messo in evidenza nuove serie di triplette per questo elemento i cui termini P_i sono dell'ordine di grandezza richiesto dal potenziale di ionizzazione sperimentale.

I valori V_i e V_R paiono dunque attendibili nel significato con cui vengono usati.

Si vede che ΔV_m e $V_i - V_R$ concordano in modo insperato.

4. Segue da quanto si è detto che la struttura fine esisterà solo per discontinuità corrispondenti a serie con pochi termini X puri e che essa sarà tanto più sviluppata quanto più alto è il potenziale di ionizzazione rispetto a quello di risonanza.

Queste conclusioni spiegano perchè essa è stata messa in evidenza con livelli a frequenza relativamente bassa e preferibilmente presso elementi legati in molecola omo o eterogenea. I potenziali di ionizzazione delle molecole omopolari e degli ioni sono in generale più elevati in confronto di quelli di risonanza che non lo siano per elementi semplici e atomi neutri.

Non possiamo per la verifica delle considerazioni esposte tenere conto per ora degli ioni facenti parte di una struttura cristallina eterogenea a causa delle complicazioni che essa introduce, come dimostrano gli spostamenti che subiscono il limite della serie e i minimi precedenti, quando l'elemento è legato in molecola.

In altra nota si spera mostrare che il presente modo di precisare le vedute del Kossel circa la struttura fine negli elementi avvia con qualche soddisfazione anche la trattazione teorica di tale problema.

(1) LANDOLT-BÖRNSTEIN, *Phys. Chem. Tabellen*, 1923.

(2) «Phys. Rev.», 22, 523, 1923.

Astrofisica. — *Misure di stelle doppie con un interferometro a reticolo*⁽¹⁾. Nota di V. RONCHI presentata dal Socio A. GARBASSO.

Esporremo brevemente i primi risultati di alcune misure di stelle doppie mediante un interferometro a reticolo, come era stato accennato in una precedente Nota⁽²⁾, a cui ci riferiamo per ciò che riguarda la teoria dello strumento.

L'interferometro è costituito da un reticolo di 50 tratti per mm. e di 0.25 cm² di area (0.5 × 0.5) rigato col diamante sopra una lastrina di

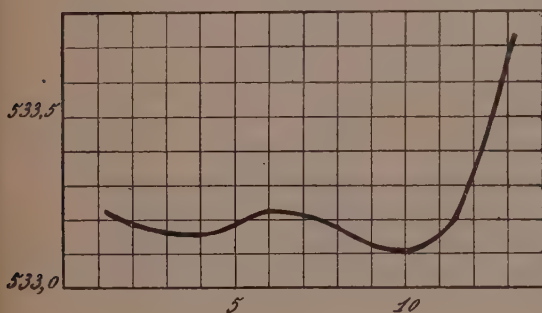


Fig. 1

(ascisse e ordinate in cm.)

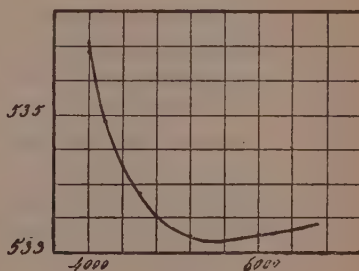


Fig. 2

(ascisse in 10⁻⁸ cm., ordinate in cm.)

vetro; faceva parte degli accessori di un Banco ottico Duboscq. Precedenti prove ne avevano dimostrata la bontà veramente notevole⁽³⁾. Con una piccola armatura di ottone si è avvitato questo reticolo al posto dell'oculare sul micrometro⁽⁴⁾ adattabile all'Equatoriale di Amici dell'Osservatorio Astrofisico di Arcetri; così in un attimo si poteva sostituire il reticolo all'oculare e viceversa. I tratti del primo non corrispondevano però in modo costante e preciso ad una determinata lettura del cerchio di posizione; e quindi l'angolo di posizione delle coppie stellari ci è dato a meno di una

(1) Lavoro eseguito nell'Osservatorio Astrofisico della R. Università di Firenze; Arcetri; pervenuto all'Accademia il 4 settembre 1925.

(2) V. RONCHI, *Un nuovo interferometro stellare*, questi « Rend. », I, serie 6^a, 11 giugno 1925.

(3) Sul come provare i reticoli cfr. V. RONCHI, *Sull'uso degli strumenti spettroscopici ad alto potere risolutivo*, « Nuov. Cim. » (nuova serie), 1^o trimestre 1925.

(4) « Pubbl. Osserv. Arcetri », fasc. 40.

costante, che si sarebbe determinata facilmente quando il reticolo fosse stato sistemato in modo definitivo. Ciò non è stato fatto perchè lo scopo di queste misure era solo quello di valutarne la precisione.

Benchè l'Equatoriale di Amici sia ben noto per i servigi che ha reso nei suoi 80 anni di vita⁽¹⁾, ne riassumeremo i dati principali, che c'interessano direttamente. L'obbiettivo « Amici I » ha 28 cm. di diametro utile e 529.56 cm. di distanza focale; le sue proprietà ottiche sono riassunte dalle figg. 1 e 2 che ne rappresentano rispettivamente gli errori zionali (per $\lambda = 5800 \text{ \AA}$) e l'aberrazione cromatica per la zona di cm. 8 di raggio⁽²⁾. Le ordinate sono le distanze dei fuochi delle zone elementari dal centro della faccia posteriore dell'obbiettivo.

Con ciò il suo potere risolutivo teorico è $0''.47$; in pratica, sia per le aberrazioni, sia per le inomogeneità del vetro, due stelle si cominciano a vedere separate quando distano di circa $1''$.

Si sarebbe potuto usare anche un reticolo di 85 tratti per mm., portando il potere risolutivo a $0''.23$; si è posto quello di 50 perchè non se ne avevano a disposizione di frequenza superiore; con questo si ha un potere risolutivo di $0''.39$, ma lo stesso si sarebbe avuto anche se l'obbiettivo fosse stato di 20 cm. di diametro.

Il piano del reticolo veniva allontanato dal fuoco di pochi mm., quanto occorreva perchè in ciascun ovale del campo si vedessero 5 o 6 frangie: queste erano nel caso nostro le condizioni più favorevoli.

Sono state esaminate diverse stelle doppie con distanze variabili da $0''.2$ a $3''$ circa e di grandezze comprese tra la 3^a e la 5^a ; però ci limiteremo a dare i risultati di β Delphini e ζ Sagittarii.

Premettiamo che tutte le nozioni e le manovre astronomiche di cui parleremo sono dovute al prof. Giorgio Abetti, direttore dell'Osservatorio, a cui siamo grati non solo di aver messo a disposizione il maggior equatoriale dell'Osservatorio, ma anche di aver preso parte attiva a queste misure, che senza di lui non ci sarebbero state possibili.

ζ Sagittarii (BGC 8965; Spettro A2; $\alpha, 1900 = 18^h 56^m.3$; $\delta, 1900 = -30^\circ 1'$) consta di due compagni di grandezza 3.4 e 3.6, che attualmente, secondo l'orbita di Aitken⁽³⁾, dovrebbero distare $0''.2$: all'osservazione diretta coll'equatoriale di Amici non dà alcun segno neppure di allungamento e per la dispersione atmosferica si presenta come un piccolo spettro, dato che la sua massima altezza sull'orizzonte non supera 16° .

Il 28 agosto sono stati eseguiti due gruppi di osservazioni, uno dal prof. G. Abetti e uno da noi; le iniziali A e R vicino ai numeri indicano appunto l'osservatore. Ciascun gruppo comprende due giri, cioè due volte

(1) A. ABETTI, « Publ. Osserv. Arcetri », I, 1896.

(2) V. RONCHI, *Sopra gli obbiettivi astronomici dell'Amici*, « Riv. d'ott. e mecc. di prec. », II, 3, dicembre 1922.

(3) « Pub. Lick Obs. », n. 12, 1914, p. 135.

le letture, sul cerchio di posizione, delle orientazioni in 360° del reticolo quando le frangie presentano un massimo o un minimo di nettezza. Di ogni valore si hanno così quattro letture di cui riportiamo la media:

mass. 329° (A e R)	minim. 31°
» 148°	» 226° .

Inoltre questi valori dovrebbero differire di 90° ; prendendone così la media si avrebbe come orientazione dei massimi $318^\circ 30' - 138^\circ 30'$.

D'altra parte, mentre nelle letture sulle stelle artificiali i massimi sono molto indecisi e i minimi molto più sicuri, avviene il contrario sul cielo, dove il continuo movimento dell'aria rende più difficile la percezione delle frangie: e questo è anche dimostrato dalle misure, perchè mentre le letture dei due massimi differiscono di 181° invece di 180° , quelle dei minimi differiscono di 195° e sono alquanto spostate rispetto a quelle dei massimi. Nè si deve tacere che in questo caso nei minimi le frangie non scompaivano del tutto; di modo che facendo una media pesata dei quattro valori, conviene dare ai massimi un peso molto maggiore di quello dei minimi, fin quasi a far perdere a questi ogni influenza. In conclusione l'angolo di posizione sarebbe $328^\circ - 148^\circ$ coll'incertezza di poco più di un grado.

Il fatto che le frangie hanno i minimi di nettezza diversi da zero ci fa concludere che la distanza delle stelle è inferiore a $0''.39$ oppure che i compagni hanno diversa grandezza; non si può avere nessun argomento per decidere tra queste due alternative.

Ma è sempre notevole che di una stella, la quale col comune oculare appare semplice, si possa dire sicuramente che è doppia, si possa dare un limite superiore alla distanza delle componenti, e se ne possa dare l'orientamento a meno di qualche grado; e ciò per una stella che è al massimo a 16° sull'orizzonte, e ha le componenti distanti meno di $1/4$ del potere risolutivo pratico dell'obiettivo, e circa la metà di quello normale dell'interferometro usato.

Risultati più completi si sono ottenuti per β Delphini (β GC 10363; Spettro F5; α , 1900 = $20^h 32^m.9$; δ , 1900 = $+14^\circ 15'$) che consta di due componenti di grandezza 4.0 e 5.0, la cui orbita più recente è stata calcolata da Aitken. Le misure eseguite nelle notti del 18, 28 e 29 agosto 1925. constano di 10 cicli di misure, 5 per osservatore. Ogni ciclo consta di due massimi corrispondenti a $\varphi = 0^\circ$ e $\varphi = 180^\circ$, cioè a quando i tratti del reticolo sono paralleli alla congiungente le stelle; di quattro minimi, in corrispondenza di quelle orientazioni φ , per cui $\gamma \sin \varphi = 1/2 mf$; infine per $\varphi = 90^\circ$ e $\varphi = 270^\circ$ si hanno dei massimi secondari; i quali sono molto meno definiti di quegli altri e non servono ad altro che a confermare l'andamento delle misure.

In ciascun ciclo si hanno così 4 misure di φ_1 , che è l'angolo da cui si deduce la distanza γ ; come media di ciascun ciclo si hanno i seguenti valori:

DATA	Osservatore	φ_1	γ
18 agosto 1925	A	$44^\circ 30'$	$0''.555$
28 " "	R	58°	459
" " "	A	$46^\circ 36'$	536
" " "	R	51°	501
" " "	A	$49^\circ 54'$	509
" " "	R	53°	488
29 " "	A	$46^\circ 30'$	537
" " "	R	47°	533
" " "	A	40°	524
" " "	R	49°	516
	Media generale A e R	$49^\circ 20'$	$0''.516 \pm 0''.028$
	Medie particolari A	$47^\circ 20'$	530
	R	$51^\circ 20'$	502

Come si vede l'error medio è inferiore a $0''.03$, quando si prendono tutti i valori trovati; ma da uno sguardo all'andamento cronologico delle osservazioni, appare evidente un assestamento progressivo coll'aumentare della pratica degli Osservatori, cosicchè appare conveniente rifare la media escludendo i due valori più discosti; si ottiene infatti

$$\varphi_1 = 47^\circ 50' \pm 45' \quad ; \quad \gamma = 0''.527 \pm 0''.006:$$

con un error medio relativo di circa $1/100$. Ma non è da escludersi che una precisione anche maggiore si possa raggiungere con ulteriori misure.

Un ciclo di misure richiedeva circa $1/4$ d'ora.

All'osservazione diretta coll'Equatoriale di Amici la stella appare leggermente allungata, ma è esclusa ogni possibilità di misure.

È interessante confrontare questi risultati con quelli dedotti dalle numerose misure micrometriche di questa doppia. Estrapolando sulla orbita di Aitken⁽¹⁾, calcolata su osservazioni che si arrestano al 1912, si ha

$$1925.65 \quad \gamma_{\text{calc.}} = 0''.63$$

(1) « Pub. Lick Obs. », n. 12, 1914, p. 150.

con una differenza dal migliore dei nostri valori: $\gamma_{\text{oss.}} = 0''.53$ di $O - C = -0''.10$; tra le osservazioni più recenti a nostra cognizione, quelle di Aitken⁽¹⁾ confermano abbastanza bene la sua orbita, e quelle di W. Dorbeck⁽²⁾ danno come media di 4 valori

$$1924.69 \quad \gamma_{\text{oss.}} = 0''.53$$

con una differenza sul valore $\gamma_{\text{calc.}} = 0''.64$ estrapolato per la stessa data sull'orbita di Aitken di $O - C = -0''.11$.

M. Maggini con un interferometro tipo Anderson ha trovato nel 1922⁽³⁾ un valore alquanto superiore: ma la differenza crediamo che possa rientrare nelle incertezze a cui va soggetta la scelta della lunghezza d'onda effettiva, specialmente per una stella di questo tipo.

Chimica. — *α -fenil- β -metil-cumarine*. Nota⁽⁴⁾ di G. BARGELINI, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

In una Nota precedente⁽⁵⁾ ho mostrato che quando si fa reagire un benzofenone orto-ossi-sostituito con fenilacetato sodico e anidride acetica, con una reazione analoga a quella per cui in generale prendono origine le cumarine, si formano le α - β -difenil-cumarine: la reazione in questo caso non può avvenire in modo diverso da quello rappresentato dallo schema



In questa Nota descrivo una serie di prodotti che ho ottenuti condensando in analoghe condizioni diversi acetofenoni orto-ossi-sostituiti con fenilacetato sodico e anidride acetica.

L'ipotesi più semplice che possa farsi sulla loro costituzione è pensare che la reazione proceda in maniera analoga a quella scritta sopra per

(1) « Lick Obs. Bull. », n. 348, 1923.

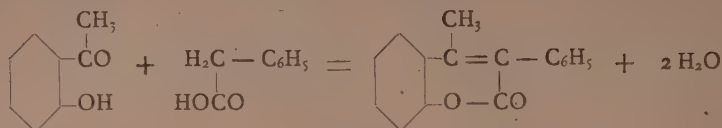
(2) W. DORBECK, « Astr. Nach. », n. 5357, 1925.

(3) M. MAGGINI, *Misure interferenziali di stelle doppie*, questi « Rend. », XXXII, serie 5^a, 2° sem., 1°-2° fasc., luglio 1923.

(4) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma; pervenuto all'Accademia il 12 agosto 1925.

(5) Questi « Rend. », fascicoli 5-6, settembre, 1925, p. 178.

i benzofenoni orto-ossi-sostituiti e ammettere quindi che i miei composti siano α -fenil- β -metil-cumarine.



Bisogna però tener conto anche di un'altra ipotesi. Se si ricorda che nella reazione tra 2-4-diossi-acetofenone, acetato sodico ed anidride acetica Nagai ⁽¹⁾ Tahara ⁽²⁾ e v. Kostanecki ⁽³⁾ ottennero accanto a derivati cumarinici anche derivati cromonici, non si può escludere *a priori* la possibilità che la reazione avvenga in tutto o in parte anche secondo lo schema:



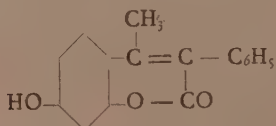
con formazione di α -benzil-cromoni.

In verità io ho notato che le condensazioni che ho eseguite danno sempre rendite non molto elevate e che i prodotti che io ho isolati si formano sempre insieme con quantità più o meno grandi di sostanze resinose più facilmente solubili nell'alcool. Io non ho fatto ricerche speciali per vedere se queste sostanze resinose sono o no i cromoni, la formazione dei quali è possibile, ma i prodotti che io ho isolati e che descrivo in questa Nota sono da ritenersi cumarine, perchè i loro eteri metilici si sciolgono a caldo negli alcali diluiti e riprecipitano inalterati per aggiunta di acidi, ciò che non farebbero se fossero α -benzil-cromoni.

In una prossima Nota mostrerò per quali altre ragioni ritengo che si debba attribuire a questi miei composti la formula cumarinica.

PARTE SPERIMENTALE.

α -FENIL- β -METIL-4-OSSI CUMARINA.



Acetil-derivato. — Si forma riscaldando per circa 30 ore il 2-4-diossi-acetofenone con fenilacetato sodico ed anidride acetica.

(1) NAGAI, « Ber. », 25, 1284 (1892).

(2) TAHARA, « Ber. », 25, 1292 (1892).

(3) v. KOSTANECKI e ROZYCKI, « Ber. », 34, 102 (1901).

v. KOSTANECKI e LLOYD, « Ber. », 34, 2942 (1901).

Cristallizzandolo dall'alcool bollente si ha in aghetti fusibili a 180°-182°.

Sostanza gr.	0.2042	CO ₂ gr.	0.5496	H ₂ O gr.	0.0890
dove %	trovato	C	73.40	H	4.84
per C ₁₈ H ₁₄ O ₄	calcolato	C	73.46	H	4.76

È insolubile nell'acqua, si scioglie facilmente nel benzolo bollente, nell'alcool e nell'acido acetico.

Ossi-Cumarina. — Si ottiene saponificando l'acetyl-derivato con acido solforico concentrato a freddo o con ammoniaca alcoolica. Si purifica cristallizzandolo dall'alcool. Aghetti fusibili a 225°.

Sostanza gr.	0.1868	CO ₂ gr.	0.5200	H ₂ O gr.	0.0832
dove %	trovato	C	75.92	H	4.94
per C ₁₆ H ₁₂ O ₃	calcolato	C	76.19	H	4.76

È insolubile nell'acqua, si scioglie facilmente nell'alcool e nell'acido acetico, è poco solubile nel benzolo anche a caldo.

La soluzione solforica è gialla con fluorescenza bleu.

Benzoil-derivato. — Si ottiene facendo agire il cloruro di benzoile sulla soluzione alcalina della ossicumarina. Cristallizzato dall'alcool metilico si ha in aghetti fusibili a 190°-192°.

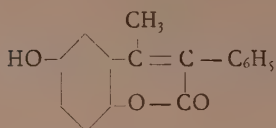
Si scioglie facilmente nel benzolo, nell'alcool e nell'acido acetico.

Etere metilico. — Si può preparare eterificando la ossi-cumarina in soluzione alcoolica con solfato dimetilico e idrato sodico, oppure anche direttamente condensando il 2-ossi-4-metossi-acetofenone (peonolo) con fenilacetato sodico e anidride acetica. Per cristallizzazione dall'alcool bollente si ottiene puro in aghetti bianchi fusibili a 101°-102°.

Sostanza gr.	0.1930	CO ₂ gr.	0.5426	H ₂ O gr.	0.0922
dove %	trovato	C	76.67	H	5.30
per C ₁₇ H ₁₄ O ₃	calcolato	C	76.69	H	5.26

È insolubile nell'acqua, solubile nell'alcool e nell'acido acetico. Si scioglie facilmente anche a freddo nel benzolo. La soluzione solforica presenta forte fluorescenza bleu.

α -FENIL- β -METIL- γ -OSSI-CUMARINA.



Acetil-derivato. — Si forma riscaldando il 2- γ -diossi-acetofenone con fenilacetato sodico e anidride acetica. Cristallizzato dall'alcool bollente si presenta in aghetti fusibili a 170°-173°.

Sostanza gr.	0.2628	CO ₂ gr.	0.7038	H ₂ O gr.	0.1144
dove %	trovato	C	73.04	H	4.83
per C ₁₈ H ₁₄ O ₄	calcolato	C	73.46	H	4.76

Si scioglie facilmente a caldo nell'alcool, nell'acido acetico e nel benzolo; è insolubile nell'acqua.

Ossi-Cumarina. — Si ottiene saponificando l'acetil-derivato con acido solforico concentrato o con ammoniacca alcoolica. Per cristallizzazione dall'alcool si ha in pagliette cristalline fusibili a 248°.

Sostanza gr.	0.2080	CO ₂ gr.	0.5805	H ₂ O gr.	0.0864
dove %	trovato	C	76.10	H	4.61
per C ₁₆ H ₁₂ O ₃	calcolato	C	76.19	H	4.76

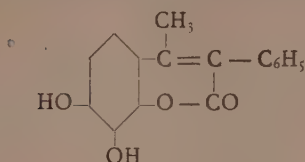
È poco solubile nel benzolo anche a caldo, di più nell'alcool, nell'acido acetico e nell'acetone. La soluzione solforica è gialla con fluorescenza verde.

Etere metilico. — Si può ottenere eterificando la ossi-cumarina in soluzione alcoolica con solfato dimetilico e idrato sodico, oppure direttamente condensando il 2-ossi- γ -metossi-acetofenone con fenilacetato sodico e anidride acetica. Si purifica cristallizzandolo dall'alcool bollente. È bianco cristallino fusibile a 150°-151°.

Sostanza gr.	0.2010	CO ₂ gr.	0.5624	H ₂ O gr.	0.0960
dove %	trovato	C	76.30	H	5.30
per C ₁₇ H ₁₄ O ₃	calcolato	C	76.69	H	5.26

Si scioglie facilmente nell'alcool, etere, cloroformio, benzolo, acetone. La soluzione solforica è gialla con fluorescenza verde. Per riscaldamento con acido iodidrico si trasforma di nuovo nella ossi-cumarina fusibile a 248°.

α -FENIL- β -METIL-3-4-DIOSSI-CUMARINA.



Biacetil-derivato. — Si ottiene riscaldando il 2-3-4-triossi-acetofenone con fenilacetato sodico e anidride acetica. Si cristallizza dall'alcool bollente. Fonde a 207° - 208° .

Sostanza gr.	0.2090	CO ₂ gr.	0.5234	H ₂ O gr.	0.0877
donde %	trovato	C	68.30	H	4.66
per C ₂₀ H ₁₆ O ₆	calcolato	C	68.18	H	4.54

Si scioglie nell'alcool, nell'acido acetico, nel benzolo; è insolubile nell'acqua.

Diossi-Cumarina. — Si ottiene saponificando il biacetil-derivato con acido solforico concentrato a freddo. Si purifica cristallizzandola dall'alcool diluito. Laminette madreperlacée che a 265° cominciano a decomporsi e si fondono completamente a 274° .

Sostanza gr.	0.1658	CO ₂ gr.	0.4352	H ₂ O gr.	0.0691
donde %	trovato	C	71.58	H	4.63
per C ₁₆ H ₁₂ O ₄	calcolato	C	71.64	H	4.47

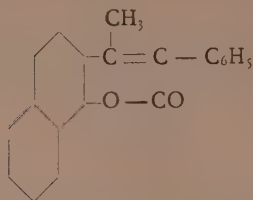
Si scioglie nell'alcool e nell'acido acetico; è quasi insolubile nel benzolo anche a caldo. La soluzione solforica è gialla non fluorescente.

Etere dimetilico. — Si può ottenere eterificando la diossi-cumarina in soluzione alcoolica con solfato dimetilico ed idrato sodico oppure direttamente riscaldando il 2-ossi-3-4-dimetossi-acetofenone con fenilacetato sodico e anidride acetica. Si cristallizza dall'alcool. Aghetti fusibili a 166° - 168° .

Sostanza gr.	0.1995	CO ₂ gr.	0.5335	H ₂ O gr.	0.0960
donde %	trovato	C	72.93	H	5.34
per C ₁₈ H ₁₆ O ₄	calcolato	C	72.97	H	5.40

Si scioglie facilmente nell'alcool, nell'acido acetico ed anche nel benzolo. Nell'acido solforico concentrato si scioglie con colorazione gialla e senza fluorescenza.

α -FENIL- β -METIL-NAFTO-CUMARINA.



Si ottiene riscaldando una mescolanza di anidride acetica, fenilacetato sodico e β -aceto- α -naftolo (ottenuto condensando l' α -naftolo con acido acetico in presenza di cloruro di zinco).

Si purifica lavando prima il prodotto grezzo con alcool, che porta via una sostanza resinosa scura, e cristallizzandolo poi dall'acido acetico bollente. Aghetti fusibili a 215° - 216° .

Sostanza gr.	0.2413	CO ₂ gr.	0.7382	H ₂ O gr.	0.1058
donde %	trovato	C	83.43	H	4.87
per C ₂₀ H ₁₄ O ₂	calcolato	C	83.91	H	4.89

È poco solubile nell'alcool; più facilmente si scioglie nell'acido acetico e nel benzolo. La soluzione solforica è gialla con fluorescenza verde.

Chimica organica. — *Sintesi in chimica organica con l'energia raggiante.* - I. Sulla fotosintesi dell'acido α -fenil- β -difenil-lattico ⁽¹⁾.
Nota di REMO DE FAZI, presentata dal Socio PATERNÒ.

Nella V Memoria ⁽²⁾ delle « Sintesi in Chimica organica per mezzo della luce » il prof. Paternò, studiando il comportamento degli acidi e degli eteri col benzofenone, comunica la reazione che avviene fra il benzofenone e l'acido fenil-acetico. Questi due composti disciolti in benzolo ed esposti alla luce solare per circa cinque mesi danno luogo alla formazione di benzopinacone e di un acido che il prof. Paternò riconobbe per il trifenil-lattico. Dopo qualche anno in seguito alle mie ricerche ⁽³⁾ fu confermata e dimostrata la costituzione di questo nuovo composto. Ho avuto occasione di fare altre preparazioni dell'acido α -fenil- β -difenil-lattico, perchè questo mi occorreva per ottenere l' α - β -difenil-indone ⁽⁴⁾.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica applicata della R. Scuola d'Ingegneria di Roma; pervenuto all'Accademia il 20 agosto 1925.

(2) PATERNÒ E CHIEFFI, « Gazz. Chim. Ital. » 40, II, 323, 1910.

(3) e (4) REMO DE FAZI, « Gazz. Chim. Ital. » 45, I, 552, 1915.

Nelle mie esperienze, all'apertura dei tubi esposti all'azione della luce solare ho sempre riscontrato una notevole pressione e abbondante svolgimento di anidride carbonica. A questo fatto ho creduto dover attribuire una certa importanza.

Già in altre ricerche il prof. Paternò ed io, potemmo dimostrare che nella foto-reazione tra l'acido butirrico e il benzofenone ⁽¹⁾ si aveva formazione di anidride carbonica, che in precedenti esperienze non era stata notata ⁽²⁾ e che servì a spiegare l'andamento della reazione.

L'acido butirrico e il benzofenone, in soluzione benzenica, esposti alla luce solare, danno luogo ad un acido che dimostrai essere l'acido β -metil- γ -ossi- γ -difetil-butirrico ⁽³⁾, al benzopinacone, ad un etere che il prof. Paternò riconobbe per butirrato di propile ⁽⁴⁾ e all'anidride carbonica.

Si ammise cioè l'addizione di una molecola di acido butirrico con una di benzofenone per la sintesi dell'acido β -metil- γ -ossi- γ -difetil-butirrico, e l'eliminazione di una molecola di anidride carbonica e di due atomi di idrogeno da due molecole di acido butirrico, con formazione di butirrato di propile e di benzopinacone.

L'aver constatato la presenza dell'anidride carbonica, mi ha indotto a continuare queste ricerche per tentare di spiegare questa complessa reazione. Per ora comunico i risultati avuti per l'apertura di due soli tubi.

Il prof. Paternò aveva già notato come la quantità di acido α -fenil- β -difetil-lattico che si otteneva dalla reazione fosse piccola in confronto delle quantità dei composti messi a reagire, anche dopo lunghissimo tempo di esposizione alla luce solare. Ho immaginato che ciò fosse dovuto a qualche equilibrio nella foto-reazione, e le esperienze mi hanno dato pienamente ragione.

I tubi esposti alla luce solare, dopo circa un mese incominciano a depositare una sostanza cristallina che apparentemente non aumenta dopo circa due mesi. All'apertura dei tubi si nota abbondante svolgimento di anidride carbonica. La sostanza formatasi si separa per filtrazione e il liquido si espone nuovamente alla luce solare in tubo chiuso. Dopo circa 25 giorni si depositano nuovi cristalli; si riapre il tubo dopo circa un mese e si nota ancora svolgimento di anidride carbonica. La sostanza separata la prima e la seconda volta è formata dall'acido α -fenil- β -difetil-lattico e dal benzopinacone. Dalla soluzione si distilla il solvente a pressione ridotta e dal residuo si separano il benzofenone e l'acido fenil-acetico che non hanno reagito. Inoltre si riesce a separare, dopo parecchie distillazioni frazionate, una piccolissima quantità di un olio di un odore intenso che per il suo punto di

(1) PATERNÒ, «Rend. Accad. Lincei» 24, I, 674, 1915 e REMO DE FAZI, «Rend. Accad. Lincei», 24, I, 942, 1915 e «Gazz. Chimica Ital.» 45, II, 6, 1915.

(2) PATERNÒ E CHIEFFI, «Gazz. Chim. Ital.» 40, II, 323, 1910.

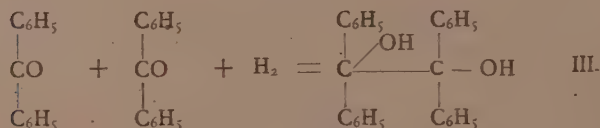
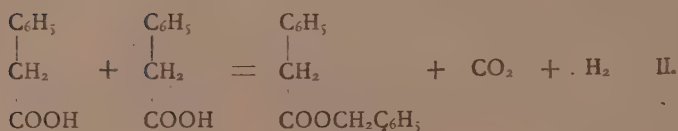
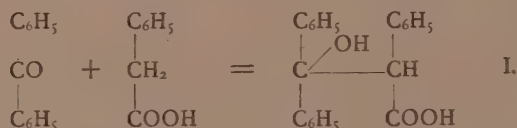
(3) REMO DE FAZI, «Gazz. Chim. Ital.» 45, II, 6, 1915.

(4) PATERNÒ, «Rend. Accad. Lincei» 24, I, 674, 1915.

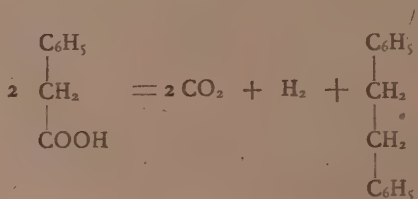
ebollizione e per le sue proprietà chimiche sembra sia il fenil-acetato di benzile e anche una piccola quantità di sostanza resinosa.

L'essere riuscito a separare queste due sostanze, che meritano un più attento studio, a me sembra di una qualche importanza.

Ho già messo altri tubi alla luce solare, costruiti in modo da far assorbire l'anidride carbonica che si svolge in questa reazione ed altre ricerche sono state iniziate, ma occorre ancora molto tempo per avere i risultati di queste esperienze, e per ora perciò mi permetto di spiegare questa reazione in parte per opera di questi primi studi, con la speranza che quelli in corso possano dimostrare alcune ipotesi. La reazione può essere analoga a quella che avviene tra l'acido butirrico e il benzofenone; cioè sintesi dell'acido α -fenil- β -difetil-lattico (I) per l'addizione di una molecola di benzofenone con una di acido fenil-acetico, formazione del fenil-acetato di benzile (II) del benzopinacone (III) e dell'anidride carbonica:



L'anidride carbonica che si ha in questa reazione potrebbe anche essere originata dalla decomposizione dell'acido fenil-acetico, però si sarebbe dovuto formare l' α - β -difetil-etano, che non è stato ritrovato:

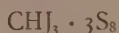


La piccola quantità di fenil-acetato di benzile svelato non deve meravigliare, perchè il prof. Paternò ha dimostrato⁽¹⁾ che alcuni eteri reagiscono col benzofenone e quindi è probabile che il fenil-acetato di benzile formatosi nella reazione reagisca a sua volta col benzofenone.

Mentre la formazione del butirrato di propile rappresenta la prima fotosintesi di un etere della serie grassa da un acido grasso, questa è la prima di un etere aromatico da un acido aromatico.

Chimica. — *Composti di addizione fra alogenuri dello stagno e del titanio con basi organiche*⁽²⁾. Nota di G. SCAGLIARINI ed E. BRASI⁽³⁾. Presentata dal Corrisp. prof. MARIO G. LEVI.

Auger nel 1908⁽⁴⁾ trovò un nuovo tipo di composti molecolari di assai difficile interpretazione. Sono questi, prodotti di addizione fra una molecola di joduro e un certo numero di molecole ottoatomiche di zolfo. Operando con soluzioni dei componenti in solfuro di carbonio, ottenne composti fra zolfo e due joduri organici, l'iodoformio e il tetrajodoetilene, cui l'autore attribuisce rispettivamente le formule:



Anche con joduri dei metalloidi del gruppo del fosforo ottenne composti di addizione dello stesso tipo:



In questi composti Auger (l. c.) trovava una costanza nella valenza di coordinazione dello jodo, ammettendo che ad ogni atomo di jodo se ne legassero otto di zolfo. Anche il tetrajoduro di stagno dà un prodotto di addizione con un certo numero di molecole di zolfo, ma la formula del composto non è ancora accertata.

Singolari sono pure i composti che lo zolfo forma con l'ammoniaca, che, secondo O. Ruff e L. Hecht⁽⁵⁾, hanno le formule seguenti:



(1) PATERNÒ E FORLÌ-FORTI, « Gazz. Chim. Ital. » 40, II, I, 1910.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Bologna.

(3) Pervenuta all'Accademia il 3 agosto 1925.

(4) « Compt. Rend. Acad. des Sciences », 146, p. 477 (1908).

(5) « Zeit. f. Anorg. Ch. », 70, p. 49 (1911).

Così pure il composto ottenuto dal Coldrige⁽¹⁾ fra cloruro stannico e idrogeno solforato cui spetta la formula:



Per la loro singolarità, sono da avvicinarsi a questi composti, alcuni complessi con gli alogenuri di stagno e di titanio da noi preparati e che sono il risultato di ulteriori ricerche già iniziate da qualche tempo da uno di noi e comunicate in questi Rendiconti⁽²⁾.

Anche tali composti sono di assai difficile interpretazione, e la teoria della coordinazione di Werner non è sufficiente a spiegarli.

Ora senza volere entrare in ipotesi per tentare di spiegarne la costituzione, ci sembra interessante riferirne in proposito. Trattando gli alogenuri di stagno e di titanio con basi organiche (esametilentetrammina e caffeina), in soluzione cloroformica o bromoformica, abbiamo ottenuto vari composti in cui, oltre alle basi organiche, entrano diverse molecole del solvente a costituire il complesso. Si sono scelti di proposito questi solventi alogenati, oltre che per ragioni che diremo in seguito, anche perchè data la loro bassa costante dielettrica (circa 20 volte inferiore a quella dell'acqua), dovevano necessariamente essere d'impedimento alla ionizzazione degli alogenuri impiegati, e perciò favorevoli al massimo grado a rivelarne le valenze secondarie per la formazione di complessi molto elevati.

Facendo reagire caffeina e cloruro o bromuro stannico in soluzioni cloroformiche, si ottengono due complessi formati da polveri microcristalline, la prima bianca, l'altra di un bel colore giallo citrino le cui formule sono rispettivamente:



Addizionando invece l'esametilentetrammina a joduro stannico in soluzione di bromoformio, si ottengono due complessi diversi a secondo che si agisce con un eccesso della base organica o con un eccesso del sale stannico. Il primo è colorato in giallo chiaro, il secondo in viola cupo; ai due composti rispettivamente spettano le formule:



Date le analogie esistenti fra il titanio e lo stagno come elementi che fanno parte di un medesimo gruppo del sistema periodico, abbiamo sperimentato se anche gli alogenuri di titanio trattati con basi organiche in sol-

(1) «Zeit f. Anorg. Ch.», 17, p. 108 (1898).

(2) Questi «Rendiconti», I, p. 582 (1925).

venti alogenati dessero pure luogo alla formazione di composti di addizione del tipo di quelli descritti per lo stagno. Facendo reagire il tetracloruro di titanio con esametilentetrammina in soluzione cloroformica, si ottiene infatti un composto di addizione in forma di precipitato bianco cristallino cui spetta la formula:



Trattando un eccesso di esametilentetrammina con tetraioduro di titanio in soluzioni di bromoformio, si forma un precipitato giallo cristallino la cui formula dedotta dall'analisi è:



Questo composto è del tutto analogo a quello di stagno pure colorato in giallo. Però in questo caso non si può avere come per il tetraioduro di stagno, il composto rosso con un eccesso di ioduro di titanio, giacchè la sostanza rossa che si separa ha aspetto gelatinoso e facilmente si altera.

In tutti i composti ora descritti si nota il fatto già messo in rilievo in una precedente nota (l. c.) e cioè che essi sono tanto più colorati, quanto maggiore è la proporzione delle molecole del solvente alogenato che entra a far parte del complesso.

PARTE SPERIMENTALE.

PREPARAZIONE DEL COMPOSTO DI ADDIZIONE:



Ad una soluzione satura a freddo di cloruro stannico in cloroformio, ne viene aggiunta a poco a poco un'altra pure satura a freddo di caffeina in cloroformio. Si ottiene un precipitato bianco microcristallino, che al microscopio si presenta formato di tavolette trasparenti. Il precipitato filtrato e spremuto alla pompa, lavato con cloroformio e seccato fra carta da filtro, fu sottoposto all'analisi:



	Sn	Cl	N	C	H
Calcolato %	27.22	38.63	9.64	17.20	1.79
Trovato %	27.82	37.65	9.90	18.00	2.50

PREPARAZIONE DEL COMPOSTO DI ADDIZIONE:



Ad una soluzione satura a freddo di tetrabromuro stannico in cloroformio si aggiunge una soluzione cloroformica pure satura di caffeina fino a completa precipitazione; si ottiene così un precipitato formato da una polvere finissima di color giallo citrino, che al microscopio risulta costituita da tavolette rombiche. Il precipitato filtrato e spremuto alla pompa, lavato con cloroformio venne seccato fra carta da filtro e sottoposto all'analisi:



	Sn	Br	N	C	H
Calcolato %	13.07	35.19	9.25	17.83	1.82
Trovato %	13.16	35.44	9.09	17.25	2.56

PREPARAZIONE DEL COMPOSTO DI ADDIZIONE:



Ad una soluzione bromoformica e satura a freddo di esametilentetrammina se ne aggiunge a goccia a goccia un'altra, ma in difetto di joduro stannico pure in bromoformio. Si ottiene un precipitato microcristallino di color giallo chiaro che, qualora si ecceda con la soluzione di ioduro stannico, volge all'arancio e poscia al rosso. A questo inconveniente si può ovviare coll'aggiunta di nuova soluzione di esametilentetrammina, che riconduce il precipitato a un color giallo chiaro come si è detto sopra. Il precipitato così ottenuto, che al microscopio si presenta costituito da bei cristalli ottaedrici trasparenti colorati in giallo, filtrato e spremuto alla pompa e lavato con bromoformio viene seccato fra carta da filtro; i risultati analitici sono qua sotto riportati:



	Sn	J	Br	N	C	H
Calcolato %	4.84	20.71	48.92	9.15	14.20	2.18
Trovato %	4.68	20.02	47.50	9.45	15.12	3.78

PREPARAZIONE DEL COMPOSTO DI ADDIZIONE:



Ad una soluzione concentrata a freddo di joduro stannico in bromoformio se ne aggiunge a goccia a goccia un'altra di esametilentetrammina

pure in bromoformio. Si ottiene subito un precipitato color viola cupo che al microscopio risulta formato di ottaedri. Se si eccede colla soluzione di esametilentetrammina, il precipitato rosso volge gradatamente al giallo. I cristalli così formati spremuti alla pompa e lavati con bromoformio, vengono messi a seccare fra carta da filtro. Lasciati all'aria o nel vuoto, cambiano colore passando dal rosso al bruno. Risultati analitici:

$$\text{per } \text{SnJ}_4 \cdot 5\text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4 \cdot 8\text{CHBr}_3$$

	Sn	J	Br	N	C	H
Calcolato %	3.54	15.16	57.27	8.36	13.62	2.05
Trovato %	3.43	14.68	56.60	8.10	14.60	2.72

PREPARAZIONE DEL COMPOSTO DI ADDIZIONE:



Ad una soluzione diluita di tetracloruro di titanio in cloroformio, si aggiunge una soluzione satura a freddo di esametilentetrammina in cloroformio. Si ottiene così un precipitato bianco che al microscopio si presenta in cristalli omogenei aghiformi. Il precipitato spremuto alla pompa e lavato, rapidamente con cloroformio viene messo a seccare fra carta da filtro. L'analisi ha dato i seguenti risultati:

$$\text{per } \text{TiCl}_4 \cdot 12\text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4 \cdot 3\text{CHCl}_3$$

	Ti	Cl	N	C	H
Calcolato %	2.16	20.68	30.15	40.36	6.65
Trovato %	2.01	21.41	29.40	39.58	6.95

PREPARAZIONE DEL COMPOSTO DI ADDIZIONE:



Ad una soluzione satura a freddo di urotropina in bromoformio, se ne aggiunge a goccia a goccia un'altra pure bromoformica di joduro di titanio. Si forma tosto una polvere cristallina di colore giallo che al microscopio appare costituita da piccoli ottaedri. Se si eccede con la soluzione di joduro di titanio, il precipitato giallo diventa rosso ed assume un aspetto quasi gelatinoso. Il precipitato giallo, filtrato alla pompa e lavato con bromoformio venne fatto asciugare fra carta da filtro, indi sottoposto all'analisi:

per $TiJ_4 \cdot 4C_6H_{12}N_4 \cdot 5CHBr_3$

	Ti	J	Br	N	C	H
Calcolato %	2.02	21.33	50.37	9.12	14.62	2.24
Trovato %	2.04	21.51	51.40	9.00	14.68	2.64

Il composto rosso che probabilmente corrisponde all'analogo dello stagno, si presenta al microscopio amorfo e si altera rapidamente all'aria. Non si presta perciò ad essere analizzato.

Paleontologia. — *Sulla diffusione verticale delle « Orbitoides s. str. ».* Nota di G. CHECCHIA-RISPOLI presentata dal Socio C. F. PARONA ⁽¹⁾.

Durante lo studio del Nummulitico della costa nordica della Sicilia, uno dei fatti più notevoli messi in luce è stato quello riguardante la distribuzione stratigrafica di taluni gruppi di foraminiferi appartenenti alla famiglia delle *Orbitoidinae*. Delle questioni relative a questi organismi mi sono occupato anche recentemente in una Memoria pubblicata presso questa Accademia e perciò rimando ad essa il lettore ⁽²⁾; per maggiori notizie al riguardo richiamo qui sotto un altro mio lavoro, pubblicato alcuni anni or sono ⁽³⁾.

Nella presente breve Nota ritornerò brevemente e solamente sulla distribuzione verticale delle *Orbitoides s. str.*, dandomene l'occasione una pubblicazione testè avvenuta in America, della quale solo ora ho potuto avere visione ⁽⁴⁾.

Premetto rapidamente che H. Douvillé sin dal 1898 aveva scritto che le *Orbitoides*, le *Orthophragmina* e le *Lepidocyclina* caratterizzavano rispettivamente tre periodi successivi, cioè il Cretaceo superiore, l'Eocene e l'Oligocene e che mentre egli in seguito si è ricreduto nei riguardi della distribuzione stratigrafica di *Orthophragmina* e di *Lepidocyclina*, continua invece a sostenere che le *Orbitoides* sono esclusive del Cretaceo superiore ⁽⁵⁾.

Per parte mia sin dal 1907 ho sostenuto che queste ultime in Sicilia si

(1) Lavoro eseguito nel R. Ufficio Geologico in Roma.

(2) v. *Considerazioni paleontologiche sull'Eocene dei dintorni di Castelluccio Valmaggiore (Capitanata)*, con VII tav. « Mem. R. Acc. Naz. dei Lincei », sez. VI, vol. I, fasc. I, 1925.

(3) *L'Eocene nei dintorni di Roseto Valfortore, ecc.* con X tav. « Boll. R. Com. Geol. d'Italia », vol. XLVI, 1917.

(4) T. WAYLAND VAUGHAN, *American and European Tertiary Larger Foraminifera*, « Bull. of Geol. Soc. of America », vol. 35, pp. 785-822, pls. 30-36, December 30, 1924.

(5) DOUVILLÉ H., *Revision des Orbitoides, P. I., Orbitoides cretacés et genre Omphalocyclus*, « Bull. d. l. Soc. Géol. de France », ser. IV, tom. 20, 1920.

trovano anche nell'Eocene medio: lo stesso avviene pel genere *Omphalocyclus*. Le ricerche estese in seguito in vari punti dell'Appennino meridionale confermarono i risultati ottenuti in Sicilia. Da parte sua il dott. Prever veniva anche a constatare la frequenza di *Orbitoides* s. str. (sub *Lepidocyclusina*) nell'Eocene inferiore di altri punti dell'Appennino ⁽¹⁾. In base a queste osservazioni potevo concludere che queste orbitoidi continuarono a vivere, almeno in Italia, sino a tutto l'Eocene medio.

Queste constatazioni di fatto sono state senza alcuna seria ragione combattute dai sostenitori della esclusività dei singoli gruppi di orbitoidi di un determinato terreno e tutti i ritrovamenti di *Orbitoides* nell'Eocene, nonostante diventassero ogni giorno assai più frequenti che nel Cretaceo stesso, dove la prima volta detti fossili furono trovati, sono stati attribuiti al rimaneggiamento.

Nella presente Nota mi interessa mettere in rilievo che la sopravvivenza delle *Orbitoides* al Cretaceo, constatata in Europa, trova ora una conferma in America, dove si stanno verificando molti dei fatti già constatati da tempo in Europa. Ricordo tra questi la constatazione di *Lepidocyclusina* nell'Eocene.

*
* *

Il dott. T. Wayland Vaughan descrive nel lavoro che ho citato, tre orbitoidi provenienti da alcune località del Messico, che sono riunite in un nuovo aggruppamento, *Polylepidina*, dal predetto autore considerato come un sottogenere di *Lepidocyclusina*. Queste forme sono: *Lepidocyclusina Chiapensis*, *Lep. Adkinsi* e *Lep. proteiformis*, le prime due dell'Eocene superiore, l'ultima proveniente da un orizzonte con *Venericardia planicosta* (Lam.), non bene accertato se spettante allo Jacksoniano (Eocene superiore) od al Claiborniano (Eocene medio). In ogni modo resta stabilito che queste orbitoidi in America si trovano anche nell'Eocene elevato. I tratti diagnostici del nuovo aggruppamento sono la costituzione del nucleo centrale, che è pluriloculare, e la forma delle loggette del piano equatoriale, le quali « all have « arcuate outer walls and many have pointed proximal ends, but the inner « ends may be truncate. The length of the tangential diameter exceeds « that of the radial diameter ».

In linguaggio comune agli studiosi di questi foraminiferi, la forma delle loggette equatoriali descritta dal Wayland Vaughan corrisponde a quella detta « rombica ». Ciò premesso, se si stabilisce un confronto tra le figure delle tavole 30, 31 e 32, che accompagnano il lavoro dello studioso americano, con tutte quelle che illustrano *Orbitoides* s. str. (v. i lavori di Schlumberger, Vredenburg e di altri), non si può assolutamente fare a meno di

(1) PREVER P. L., *La Fauna a Nummuliti ed Orbitoidi dei terreni terziari dell'Alta Valle dell'Aniene*, « Mem. p. serv. alla descr. d. Carta Geol. d'Italia », vol. V, 1912.

riconoscere la perfetta somiglianza delle orbitoidi dell'Eocene americano con le *Orbitoides* s. str. Ora se la forma delle loggette equatoriali costituisce ancora il criterio importante per la distinzione delle Orbitoidi fra di loro, io credo che non possa esservi alcun dubbio sull'appartenenza delle specie descritte dal Vaughan al gruppo delle *Orbitoides* s. str., quale che sia il valore che a questo aggruppamento si voglia attribuire.

Per la verità il Vaughan è portato a riconoscere la somiglianza tra la forma delle loggette equatoriali della specie che descrive e quella delle *Orbitoides* s. str. Anzi in un altro lavoro edito nel 1923, egli riconosce che la maggior parte delle specie eoceniche americane hanno le concamerazioni equatoriali « very like those of true *Orbitoides*, type *O. media* (d'Archiac) ». ⁽¹⁾

E allora perchè non chiamare queste forme dell'Eocene americano col nome di *Orbitoides*, magari distinguendolo con un nome sottogenerico, se l'autore crede di dare anche un certo valore all'apparato embrionale? Ma detto nome peraltro non deve ricordare affatto quello di *Lepidocyclina*, perchè nessuna delle tre specie descritte dal Vaughan è una *Lepidocyclina*.

Questo rilievo non è messo dallo spirito di far critica, ma è fatto in modo puramente obbiettivo, allo scopo di confortare con le osservazioni che si vanno compiendo da qualche anno in America per opera di studiosi locali, quelle da noi fatte in Italia, e che tanto contrasto hanno trovato da parte di taluni, presi ancora da concetti che risentono dei principi d'originiani.

Mineralogia. — *L'epidoto del Monte Rosso di Verra (gruppo del Monte Rosa)* ⁽²⁾. Nota di TULLIO CARPANESE presentata dal Socio BRUGNATELLI LUIGI.

I. — STUDIO MORFOLOGICO.

Nel 1903 il prof. F. Zambonini descrisse alcuni interessanti cristalli di epidoto raccolti dall'ingegnere V. Novarese sulle pendici settentrionali del Monte Rosso di Verra (Ayas) presso il passo della Bettolina Nord ⁽³⁾. Nella sua Nota troviamo anche precise indicazioni sintetiche dell'ing. Novarese su questo giacimento, che trovasi al limite settentrionale della massa di peri-

(1) T. WAYLAND VAUGHAN, *Studies of the Larger Tertiary Foraminifera from Tropical America*, « Proc. of the National Academy of Sciences », vol. 9, n. 7, 1923.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Padova, diretto dal prof. Angelo Bianchi; pervenuto all'Accademia il 17 settembre 1925.

(3) F. ZAMBONINI, *Sull'epidoto del Passo Bettolina, vallone di Verra*. Roma, 1903, « Rend. R. Accad. Lincei », XII, 567.

dotiti serpentizzate e di prasiniti anfiboliche, che nel Vallone di Verra, immediatamente a nord del Monte Rosso, si adagiano sui micascisti e sugli gneiss del Monte Rosa. Nelle rocce serpentinose, presso al contatto colle prasiniti, il Novarese ha osservato dei nuclei di *epidoto*, *granato*, *diopside*, *clorite*, *anfibolo* e *magnetite*, con geodi degli stessi minerali.

Le forme osservate da Zambonini nei cristalli di *epidoto* da lui studiati, sono le seguenti: $T\{100\}$, $M\{001\}$; $\alpha\{110\}$, $\sigma\{011\}$, $k\{012\}$, $\{22.0.1\}$, $\{801\}$, $\{501\}$, $g\{301\}$, $h\{201\}$, $e\{101\}$, $l\{201\}$, $\{705\}$, $\chi\{302\}$, $\beta\{403\}$, $\{49.0.50\}$, $r\{101\}$, $i\{102\}$; $d\{111\}$, $n\{111\}$, $q\{221\}$. Di esse la $\{801\}$ e la $\{501\}$ sono nuove per l'*epidoto*.

Il prof. Boeris ha successivamente descritto altri cristalli di *epidoto*, anch'essi ricchi di forme, raccolti in altra località, nella parte più settentrionale della valle d'Ayas, sotto la Rocca di Verra⁽¹⁾. Egli inoltre, nel 1910, dà notizia di alcuni granuli di *perowskite* e di *ilmenite*, raccolti nei surricordati giacimenti del Monte Rosso, e accenna anche alla presenza di *prehnite*, di cristallini di *vesuviana* e di noduli di *tilanolivina*⁽²⁾.

Nel 1923 il prof. A. Bianchi ha visitato questi giacimenti ed ha raccolto parecchi esemplari di rocce e bei campioni dei minerali ricordati, che ben meritano uno studio più completo. Di questo materiale, che il professore Bianchi ha voluto generosamente affidarmi, come anche di alcuni degli esemplari raccolti dal prof. Boeris e da lui puré molto gentilmente accordatimi, tratterò in un lavoro di prossima pubblicazione. Credo intanto interessante far oggetto di Nota particolare i risultati dello studio sui cristalli di *epidoto*, per le numerose nuove osservazioni che ho potuto fare sui campioni raccolti dal prof. Bianchi, al quale porgo con gratitudine di allievo i più vivi ringraziamenti, sia per avermi offerto l'interessante materiale, come anche per avermi guidato allo studio di esso.

L'*epidoto* si trova in magnifici cristalli, per lo più trasparenti e di un bel colore giallo verdognolo. Si osservano però, meno frequenti, anche dei cristalli di color verde un po' più carico e con più evidente pleocroismo, oppure dei cristalli zonati, con passaggio dal giallo verdognolo chiaro nell'interno al giallo verde più carico verso la periferia, ed altri ancora che presentano solo verso l'estremità libera una colorazione più intensa. Le dimensioni variano molto: alcuni raggiungono fino a 2-2,5 cm. di massimo sviluppo; sono frequenti i cristalli di $\frac{1}{2}$ a 1 cm. di lunghezza secondo l'asse y. L'allungamento dei cristalli secondo tale asse non è mai molto accentuato.

L'abito più frequente per i cristalli di *epidoto* del Monte Rosso di Verra è quello rappresentato dalla fig. 1, e corrisponde al tipo dei cristalli studiati da Zambonini. Nella zona $[010]$ sono maggiormente sviluppate le

(1) G. BOERIS, *Sull'epidoto della Valle di Ayas*. Bologna, 1909, «Memoria R. Acc. delle Scienze», serie VI, 145.

(2) G. BOERIS, *Appunti di mineralogia valdostana. Minerali del Monte Rosso in Valle Ayas*. Bologna, 1910, «Rend. R. Accad. delle Scienze»; XIV, 180.

facce di $T\{100\}$, $M\{001\}$, $r\{\bar{1}01\}$, con prevalenza generalmente delle T ; e fra le facce terminali presentano maggiore estensione quelle di $n\{\bar{1}11\}$, $\alpha\{110\}$ ed $o\{011\}$. Per quanto non manchino cristalli perfettamente regolari, sono tuttavia frequenti quelli in cui si nota uno sviluppo asimmetrico per le facce di una stessa forma, e specialmente per le facce di $T\{100\}$ e di $n\{\bar{1}11\}$. Le prime, come fu già osservato da Zambonini, presentano spesso anche un diverso grado di regolarità, trovandosi una delle due molto più marcatamente striata; e per le seconde, si ha spesso che una sola occupa quasi completamente la terminazione del cristallo, riducendosi le altre forme

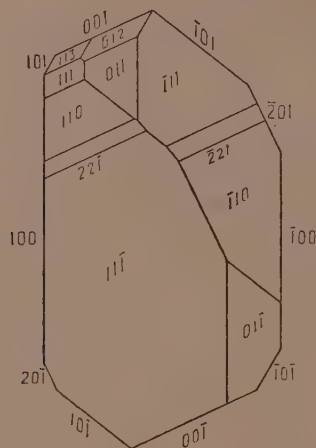


Fig. 1.

a piccole faccette sui bordi di questa. Caratteristica è pure talvolta la presenza sulle facce di $\alpha\{110\}$ di piccoli rilievi di corrosione a contorno ellittico, disposti regolarmente, col loro asse maggiore parallelo all'asse della zona $[001:110]$.

Due combinazioni di forme molto frequenti per i cristalli di questo abito sono le seguenti:

$$T\{100\}, M\{001\}, r\{\bar{1}01\}, e\{101\}, l\{\bar{2}01\}, o\{011\}, k\{012\}; \alpha\{110\}, n\{\bar{1}11\}, q\{\bar{2}21\}, d\{111\}, s\{113\}$$

(rappresentata dalla fig. 1), e:

$$T\{100\}, M\{001\}, r\{\bar{1}01\}, e\{101\}, \alpha\{110\}, o\{011\}, n\{\bar{1}11\}, q\{\bar{2}21\}.$$

È caratteristica specialmente la grande frequenza della forma $s\{113\}$, che non comparisce fra le forme dei cristalli studiati da Zambonini.

L'altra fu osservata in un solo cristallo, ma la sua posizione ed il simbolo per essa calcolato sono ben determinati dalle seguenti misure:

$(100): (94\bar{3})$	calcol.	$38^{\circ}9'$	misur.	$38^{\circ}18'$
$(11\bar{1})$	»	»	31.19	» 31.6
$(22\bar{1})$	»	»	23.42	» 23.57

La fig. 3 rappresenta l'abito costante di un gruppo di cristalli raccolti nella parte inferiore del giacimento, che si differenziano dai precedenti per essere poco trasparenti o quasi opachi nella parte interna, più chiara, e nettamente zonati. La combinazione di forme di questo cristallo è la seguente:

$T\{100\}$, $M\{001\}$, $e\{101\}$, $r\{\bar{1}01\}$, $l\{\bar{2}01\}$, $P\{010\}$, $o\{011\}$, $z\{110\}$,
 $n\{\bar{1}11\}$, $q\{\bar{2}21\}$, $*\{7.7.20\}$, $\varphi\{\bar{1}21\}$, $\{\bar{1}51\}$, $b\{\bar{2}33\}$.

Anche in questi cristalli, come in quelli già descritti, possiamo notare una ricchezza notevole di forme nella parte terminale, e poche forme invece nella zona $[010]$, il che contribuisce ad aumentare notevolmente il numero di forme nuove per il giacimento, poichè nei cristalli studiati dal prof. Zambonini, la maggior ricchezza di forme si osserva invece nella zona periferica.

La nuova forma $\{7.7.20\}$ sostituisce in questo cristallo la $e\{113\}$, alla quale è molto prossima, cosicchè potrebbe essere considerata come una forma vicinale di questa, che, come ho detto, è frequente nei cristalli da me studiati. Ad ogni modo essa è ben determinata dalle misure che riporto:

$\{001\}:\{7.7.20\}$	calcol.	$29^{\circ}58'$	misur.	$30^{\circ}1'$
$\{011\}:$	»	»	35.38	» 35.32
$\{\bar{1}11\}:$	»	»	64.39	» 64.34

(calcolato per la $\{113\}$ rispettivamente: $28^{\circ}57'$, $36^{\circ}17'$, $64^{\circ}54\frac{1}{2}'$).

Per quanto non frequenti, fra i cristalli di epidoto del Monte Rosso di Verra si presentano parecchi geminati secondo la legge abituale per i cristalli di epidoto. In genere essi corrispondono ai cristalli dell'abito più frequente (fig. 1), ed offrono combinazioni di forme analoghe a quelle ricordate per detti cristalli. È però da notare che soltanto nei geminati ho potuto osservare fra le forme della zona $[010]$ le seguenti: $N\{\bar{3}04\}$; $\{104\}$; $\{504\}$, nuove per il giacimento. Anche la forma $G\{\bar{3}44\}$ fu osservata soltanto in uno di questi geminati, (come pure fu trovata solo in un geminato dell'epidoto di Val Devero da Bianchi)⁽¹⁾.

(1) A. BIANCHI, *L'epidoto delle intercalazioni basiche nel gneiss del Cervandone e dell'Arbola*. « Boll. Soc. Geologica Italiana », 1923, XLII, 2°, 144.

La fig. 4 dà l'aspetto di un cristallo geminato molto ricco di forme che ho osservato nel gruppo dei cristalli semiopachi del tipo di quello rappresentato dalla fig. 3. In esso si trovano le seguenti forme:

$T\{100\}$, $M\{001\}$, $e\{101\}$, $r\{\bar{1}01\}$, $l\{\bar{2}01\}$, $\{504\}$, $\chi\{110\}$, $o\{011\}$, $P\{010\}$, $d\{111\}$, $\epsilon\{113\}$, $n\{\bar{1}\bar{1}1\}$; $q\{\bar{2}21\}$, $\varphi\{\bar{1}21\}$, $\{\bar{1}51\}$, $\{2.11.\bar{2}\}$, $\{2.13.\bar{2}\}$, $b\{\bar{2}33\}$, $\{73\bar{2}\}$, $\ast\{83\bar{1}\}$.

Di queste la $\ast\{83\bar{1}\}$ è nuova per la specie, e venne osservata solo in questo geminato. Essa si trova nella zona $[20\bar{1}:011]$, ed è ben definita dai seguenti angoli:

$(100): (83\bar{1})$	calcol.	$29^{\circ}44'$	misur.	$29^{\circ}58'$
$(010): \text{ » }$	»	60.48	»	60.37
$(110): \text{ » }$	»	26.9	»	25.55

Le $\{2.11.\bar{2}\}$ e $\{2.13.\bar{2}\}$ si trovano affiancate a formare nel geminato un piccolo angolo rientrante che ha lo spigolo sul piano di geminazione.

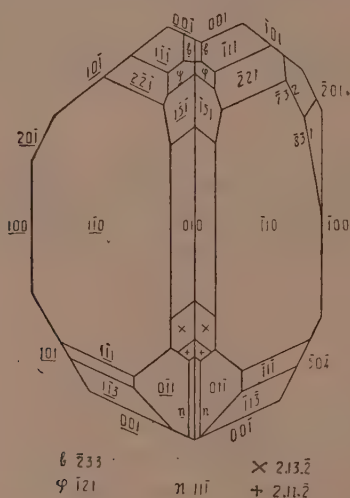


Fig. 4.

Le faccette delle due forme sono ben distinte e regolari, e presentano una finissima striatura parallela agli spigoli di combinazione con (010) . Le immagini da esse riflesse sono nettissime e perfettamente simmetriche ai due lati del piano di geminazione, cosicchè non è possibile non differenziare le due forme vicine. La $\{2.11.\bar{2}\}$ fu osservata da Zambonini nell'epidoto della Rocca Rossa in Val di Susa ⁽¹⁾ e la $\{2.13.\bar{2}\}$ da Bücking nell'epidoto della

(1) F. ZAMBONINI, *Krystallographisches über den Epidot*. «Zeitsch. für Kristall.», 1903, XXXVII, 2.

Sulzbachthal⁽¹⁾. Queste forme rare restano dunque ben confermate dalle nuove osservazioni. (Vedi riassunto delle misure alla fine della Nota 2^a).

Le costanti cristallografiche, calcolate cogli angoli: $(001):(100)=64^{\circ}34\frac{1}{2}'$, $(100):(110)=54^{\circ}59'$, $(001):(110)=75^{\circ}41'$, per i quali ho avuto le migliori e più concordanti misure, risultano le seguenti:

$$a:b:c = 1,5803 : 1 : 1,8045; \beta = 64^{\circ}34\frac{1}{2}'.$$

Questi valori sono molto concordanti con quelli dati da Kokscharow. Con le costanti di Kokscharow, generalmente accettate, ho quindi ricalcolati gli angoli per le nuove forme da me osservate.

Complessivamente le forme che osservai nei cristalli di epidoto del Monte Rosso di Verra sono le seguenti:

$T\{100\}$, $M\{001\}$, $h\{201\}$, $\{17.0.1\}$, $\{504\}$, $\{104\}$, $i\{\bar{1}02\}$, $N\{\bar{3}04\}$, $e\{101\}$, $r\{\bar{1}01\}$, $l\{\bar{2}01\}$, $P\{010\}$, $z\{110\}$, $k\{012\}$, $o\{011\}$, $d\{111\}$, $e\{113\}$, $\{213\}$, $Y\{214\}$, $\ast\{7.7.20\}$, $n\{\bar{1}11\}$, $q\{\bar{2}21\}$, $\varphi\{\bar{1}21\}$, $\{\bar{1}51\}$, $\{\bar{2}.11.2\}$, $\{\bar{2}.13.2\}$, $b\{\bar{2}33\}$, $G\{\bar{3}44\}$, $c\{31\bar{1}\}$, $\{73\bar{2}\}$, $\ast\{94\bar{2}\}$, $\ast\{94\bar{3}\}$, $\ast\{83\bar{1}\}$.

Di queste le seguenti sono nuove per la specie:

$$\{7.7.20\}, \{83\bar{1}\}, \{94\bar{2}\}, \{94\bar{3}\}.$$

Oltre a queste, le forme nuove per il giacimento sono 16. Fra esse va notata ancora in particolare la $\{17.0.1\}$, che fu osservata come una sottile faccetta da Bücking nell'epidoto della Sulzbachthal⁽²⁾. Essa viene in tal modo confermata con migliore determinazione dall'osservazione che ho potuto farne in un cristallo, dove essa si presenta con due tacce molto ben definite e regolari a fianco della $\{100\}$. È questa la sola forma che ho potuto determinare con sicurezza fra le vicinali della $\{100\}$, che spesso si presentano in questa zona di facce molto striate. Il prof. Zambonini invece osservò la $\{22.0.1\}$. Le altre forme della zona periferica comprese fra $\{100\}$ e $\{201\}$ e fra $\{201\}$ e $\{\bar{1}01\}$, da lui trovate, non compaiono in questi cristalli da me studiati.

Nella Nota seguente darò i risultati delle determinazioni chimiche ed ottiche eseguite su questi cristalli di epidoto, ed alla fine di essa, per ragioni di spazio, riporterò il quadro riassuntivo delle osservazioni goniometriche.

(1) H. BÜCKING, *Ueber die Kristallformen des Epidot*. «Zeitsch. für Kristall.», 1878, II, 339.

(2) H. BÜCKING, op. cit., «Zeitsch. Kristall.», II, 358.

Fisiologia. — *Sulla pressione osmotica dell'emolinfa e dei tessuti di Helix A. durante il letargo.* Nota del dott. A. CLEMENTI, presentata dal Socio Corrisp. S. BAGLIONI ⁽¹⁾.

Nella mia Nota precedente ⁽²⁾ omisi involontariamente di ricordare le importanti ricerche di Rina Monti ⁽³⁾ e quelle recentissime del suo allievo Viali ⁽⁴⁾.

La Rina Monti con fondamentali e metodiche ricerche sulla pressione osmotica estese a tutta la serie degli invertebrati terrestri, colmò, per la *prima*, la lacuna, cui accennava Bottazzi nel 1908. Eseguendo le determinazioni dell'abbassamento del punto di congelamento col metodo termoelettrico, la Monti trovò che nelle larve di libellula il Δ è uguale a 0.66 nella cavità celomatica e a 0.93 nei muscoli; negli ortotteri e nei rincoti la pressione osmotica, pur non essendo identica nelle diverse specie, oscilla tra limiti ben definiti e abbastanza vicini, mentre nelle specie terrestri i valori sono più varii da specie a specie. Nei coleotteri acquatici e terrestri la pressione osmotica presenta un comportamento analogo: nel ditisco adulto la Monti trovò pel celoma un $\Delta = 0.69$ e pei muscoli pestati un $\Delta = 1.03$, nella larva di ditisco trovò pel celoma un $\Delta = 0.73$ e pei muscoli un $\Delta = 0.93$; nell'emolinfa isolata di idrofilo dei dintorni di Sassari trovò un $\Delta = 0.70$; immergendo l'ago nella cavità celomatica dell'animale vivo, ottenne valori oscillanti intorno a 0.72; nei muscoli triturati e pestati finamente dello stesso animale il Δ era uguale a 1.01, mentre nei muscoli dell'animale vivo il Δ era uguale a 0.94; in base a questi dati la Monti per la *prima* affermò, che anche negli insetti sussiste la legge che gli autori hanno formulata pei vertebrati, che cioè i muscoli hanno sempre una pressione più elevata del plasma.

(1) Pervenuta all'Accademia il 20 agosto 1925.

(2) A. CLEMENTI, *Contributo alla conoscenza della pressione osmotica nell'organismo degli invertebrati terrestri.* « Rendiconti Reale Accademia dei Lincei ». Vol. XXXIII, maggio 1924.

(3) RINA MONTI, *La variabilità della pressione osmotica nelle diverse specie animali.* « Atti della Società Italiana di Scienze Naturali ». Pavia, 1914, vol. 53. Non soltanto io, ma prima di me POLIMANTI, *Biochemische Zeitschrift*. B. 70, 1915 e SCHULZ, *Handbuch der Vergleichenden Physiologie* 1922-23 hanno ommesso di citare le importanti ricerche di RINA MONTI.

(4) M. VIALI, *Ricerche sulla pressione osmotica.* I° Il Δ nei crostacei terrestri e di acqua dolce. R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere « Rendiconti », vol. 56, 1923; II° Il Δ nei vermi. *Ibidem*, vol. 56, 1923; III° Il Δ nei molluschi terrestri e di acqua dolce, vol. 57, maggio 1924.

Fatti fondamentali anche da un punto di vista generale sono quelli dimostrati dalle ricerche della Monti circa la pressione osmotica del *Bombix Mori* durante lo sviluppo embrionale; questa sperimentatrice stabilì, che l'abbassamento del punto di congelamento dell'uovo presenta una diminuzione col progredire dello sviluppo per cui il Δ è nell'uovo fecondato = 1.40, nelle larve della prima muta = 1.24, nelle larve della 3^a muta = 0.97, nelle larve della 4^a muta = 0.82, nel baco chiuso in poco filo = 0.70, nel baco chiuso nel bozzolo = 0.66 e infine nell'immagine femmina = 0.86. Il variare della pressione osmotica durante lo sviluppo embrionale sarebbe in rapporto colle variazioni del contenuto in acqua dell'animale. La Monti studiò anche la pressione osmotica nelle api di Sardegna adulte e durante lo sviluppo embrionale; trovò anche in questo caso un abbassamento della pressione osmotica durante la trasformazione della larva in ape libera dopo un passeggero aumento durante lo stadio di crisalide. Polimanti nel 1915 confermò tutti i fatti stabiliti dalla Monti un anno prima a carico della pressione osmotica del *Bombix Mori* durante lo sviluppo embrionale. Nel 1923 e 1924 Vialli ha ripreso lo studio della pressione osmotica negli invertebrati; egli ha studiato la pressione osmotica dei crostacei, dei vermi e dei molluschi terrestri e d'acqua dolce; per quanto riguarda i molluschi egli ha osservato, che nelle forme dei molluschi di acqua dolce il Δ presenta valori molto inferiori a quelli delle forme dei molluschi terrestri, nelle quali egli ha constatato una discreta omogeneità di dati tra i prosobranchi e i polmonati; i valori sarebbero in generale piuttosto bassi e simili a quelli trovati dallo stesso autore per gli iridinidi e per gli oligocheti.

I dati sperimentali da me riferiti nella nota citata rientrano fondamentalmente nell'ordine dei fatti stabiliti precedentemente dalle ricerche della Monti e ne rappresentano una *ulteriore* conferma. Dalle mie ricerche risulta però un fatto nuovo che non è stato rilevato, nè dalle ricerche della Monti, nè da quelle della sua scuola, e cioè che il Δ dell'emolinfa e dei tessuti in toto finemente triturati di *Helix A.* presenta alla fine del letargo un valore poco diverso da quello che presentava al principio, onde si è indotti a pensare che esistano in questo invertebrato dei meccanismi, i quali tendono a impedire la perdita dell'acqua durante il letargo.

Biologia. — *La curva di sviluppo di un coleottero xilofago: il « Chaetoptelius vestitus » (Muls Rey) Fuchs.* Nota del dottore GIUSEPPE RUSSO presentata dal Corrisp. A. Russo ⁽¹⁾.

Il dott. Jucci, nella sua Memoria del 1922, sulla curva di sviluppo del baco da seta, scriveva: « mi permetto di raccomandare vivamente a quelli dei miei lettori che si stiano occupando della biologia di qualche insetto, di volere completare le loro ricerche con la determinazione della curva di sviluppo. Il metodo è semplicissimo e non richiede nè tempo, nè cure speciali, per chi tenga ad altro scopo allevamenti: determinare, su un numero sufficiente di individui, i pesi iniziali e finali di ogni età, pesando cioè l'insetto alla nascita ed a ogni muta (possibilmente prima e dopo la muta) e a maturità (maturità larvale per gli Olometaboli, nei quali l'accrescimento si compie tutto e solo nello stadio larvale, maturità imaginale per gli Emimetaboli, nei quali l'organismo contemporaneamente s'accresce e si evolve); notare le date relative. Ho fede che sorgerebbe un nuovo capitolo interessante nella Fisiologia Comparata degl'Insetti ⁽²⁾.

Seguendo il consiglio del dott. Jucci, ho consacrato alla determinazione della curva di sviluppo una parte dell'abbondantissimo materiale che andavo raccogliendo per lo studio morfologico e biologico di un coleotterino, nocivo al Pistacchio: il *Chaetoptelius vestitus* (Muls-Rey) Fuchs ⁽³⁾.

Il *Chaetoptelius vestitus* (Muls-Rey) Fuchs è un piccolo coleottero appartenente alla fam. *Ipidae*, tribù *Hylesinini*, agrariamente nocivo al Pistacchio (*Pistacia vera* L.)

La specie è corticicola, monogama, La ♀, portatasi sui rami deperiti, o morti, inizia l'escavazione della galleria di riproduzione, a due bracci longitudinali rispetto all'asse del ramo. Seguita ed aiutata dal ♂, intacca, con le mandibole, lateralmente a destra ed a sinistra, il legno, scavandovi, tra l'alburno e la zona corticale, delle cellette. In ogni celletta deposita un uovo che - protetto dalla rosura appiccicatasi attorno al guscio, verniciato di mucillagine, secreta dalle ghiandole celeriche - vi rimane incastrato

(1) Pervenuta all'Accademia il 5 ottobre 1925.

(2) JUCCI C. *Sulla curva di sviluppo del baco da seta.* « Boll. Zool. Gen. Agr. Sc. Sup. Agr. Portici », v. 16, p. 59-136 (e « Annali R. Sc. Sup. Agr. Portici » ser. II, v. 18, 1923) 80 pp., 5 tav. diagr, 1922.

(3) I risultati di queste ricerche (condotte dal 1922 a tutt'oggi, sotto la direzione e guida del mio Maestro Prof. Silvestri, e completate con lo studio dei parassiti e della lotta) compariranno, fra breve nel « Boll. di Zool. Gen. ed Agr. dell'Ist. Sup. Agrario di Portici ».

Ringrazio il Dr. Jucci per avermi ispirato lo studio sopradDETTO ed aiutato coi suoi consigli.

come pietra in anello. Il numero delle uova deposte, in relazione alla lunghezza dei due bracci della galleria materna, si aggira intorno alle 80. La ♀, benchè esausta (non del tutto, giacchè, tenuta prigioniera, scava una seconda galleria breve; depositando un 25 uova), non muore, se trova come alimentarsi. Nei giovani rametti di Pistacchio, terebinto e lentisco, gli adulti scavano gallerie di alimentazione, col foro d'entrata tra la gemma e la guaina fogliare. È a questo stadio dunque che agrariamente il coleotterino riesce dannoso al pistacchio, col forare e quindi distruggere le gemme, oltre il danno indiretto che la pianta subisce per l'indebolimento dei piccoli

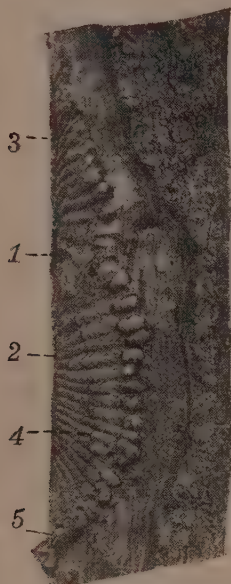


Fig. 1. — Ramo di pistacchio, scortecciato in parte, mostrante le larve e le gallerie:

1, foro d'entrata al vestibolo della galleria di riproduzione (materna); 2, braccio discendente della medesima; 3, braccio ascendente; 4, stria longitudinale delle spoglie larvali della 1^a muta; 5, larve.

rametti, minati dalla galleria che pone i tessuti interni alla mercè di agenti meteorici e biologici. Per la Sicilia (il Pistacchio per l'Italia è coltura quasi esclusivamente siciliana) ho calcolato i danni, che annualmente arreca l'insetto, a circa 3 milioni di lire; ed è stata soprattutto la considerazione dell'importanza economica che mi ha spinto a studiare la biologia del coleotterino. Il tempo che passa fra la deposizione dell'uovo e la schiusura della larva, varia a seconda della stagione, in rapporto alla temperatura: circa 15 giorni in primavera, 10 in estate e 35 in inverno. Sgusciata dall'uovo, volto il capo verso il fondo della sua cella, la larva neonata inizia l'escavazione della galleria larvale, in senso normale alla

materna e negli stessi strati legnosi. Nell'ulteriore sviluppo, guidate da un mirabile istinto, le nostre larve danno alla galleria una obliquità più o meno grande, quanto è necessario, in rapporto alla grossezza del ramo che le ospita, ed al posto che occupano nella galleria materna, perchè la galleria — che, man mano che si allunga, cresce, come la larva, in larghezza — non s'incontri con la limitrofa, o con quella del lato opposto. Man mano che scava, la larva ingerisce le particelle triturate dalle robuste mandibole (strato superficiale dell'alburno e strato interno corticale); i residui fecali, compressi dalla larva, formano un tutto omogeneo e consistente che riempie il vestibolo della galleria. Distaccando con precauzione la corteccia, le gallerie larvali restano, nella quasi totalità, integre nel loro contenuto; ed è facile, anche ad occhio nudo, riconoscere, intercalate alle deiezioni della larva, le spoglie larvali per il loro colore baio-mattone (dato principalmente dalla spoglia del capo, essendo quella toracico-addominale di un colore biancastro, che spicca dal colore giallo-paglierino delle deiezioni). Le larve sorelle compiono la muta dopo aver scavato identico tratto di galleria e, siccome queste sono adiacenti, ne deriva il toccarsi delle spoglie, disposte per ogni muta, in una stria oscura longitudinale, sempre rettilinea per le spoglie della 1^a muta, più o meno obliqua, secondo l'andamento delle gallerie larvali, per le altre (vedi fig. 1). Dopo il periodo d'immobilità che precede la muta, la larva, con movimenti di propulsione e di rotazione del corpo, cerca di evadere, attraverso una fenditura della scatola cranica, dalla vecchia cuticola; se ne libera, ricomincia a mangiare; e la spoglia rimane compressa tra le vecchie e le nuove deiezioni. Il numero delle mute larvali è di 4, normalmente; ma nei rami secchi, denutriti, il numero delle mute può salire a 5, con una lunghezza della galleria larvale molto maggiore della normale (anche 5 cm., invece che 2.5-3). D'altra parte nei rami più pingui, non alterati, freschi, offrenti un alimento più sostanzioso, il numero delle mute si può ridurre a 3, con una minore lunghezza della galleria larvale (2 cm.). Queste osservazioni contribuiscono a dimostrare che la muta, assai più che da fattori morfologici, dipende da fattori fisiologici del ricambio organico. La durata dello sviluppo larvale, come dell'uovo, è in relazione alla temperatura e quindi alla stagione. In primavera lo sviluppo larvale si compie in circa 40 giorni, in estate in 31, in inverno in 60. La larva neonata impiega circa 8 giorni per compiere la 1^a muta, 8 per la 2^a, 7 per la 3^a, 7 per la 4^a, 6 per la 5^a età. Compie la 1^a muta dopo aver scavato un tratto di galleria lunga circa 4 mm.; 8 mm. per la 2^a; 16 mm. per la 3^a; 24 mm. per la 4^a; 30 mm. per la 5^a età (inizio camera pupale). La larva di 5^a età, arrivata al suo completo sviluppo, si approfonda completamente nell'alburno (se il rametto è di un anno, arriva al tessuto midollare), scava una celletta (camera pupale) più o meno obliqua, rispetto alla galleria larvale; ne ottura con rosura e deiezioni l'imboccatura e si purga del contenuto legnoso dell'intestino. Dopo 3-4 giorni diventa immo-

bile, estroflette il capo dal protorace, passa allo stadio di prepupa, che, dopo altri 3-4 giorni, si trasforma in pupa liberandosi della spoglia larvale. Dopo 10-11 giorni dalla pupa esce l'adulto che si porta sulla pianta nutrice a scavare la galleria di nutrizione.

L'esposizione succinta che ho fatto della biologia del mio insetto, mi permette di ridurre a poche avvertenze l'esposizione del come ho proceduto nella raccolta dei dati, relativi all'accrescimento ponderale. Ho determinato il peso di nascita su larvette (200) ancora poste nella camera dell'uovo, prima che iniziassero il pasto; per la 2^a, 3^a e 4^a età ho pesate le larve (100) mentre erano in muta e tenevano ancora la spoglia larvale attaccata al corpo. I valori così determinati sono stati assunti a rappresentare il peso iniziale di ogni età (che in realtà è un pochino inferiore, di tanto quanto è il peso della spoglia) e, contemporaneamente, il peso finale dell'età precedente (che in realtà è un poco superiore, di quanto il peso della larva si è abbassato nel periodo di digiuno e di lavoro organico della muta). A peso finale della 5^a età è stata assunta la media fra il peso a massimo accrescimento (determinato su larve inizianti l'escavazione della camera pupale) ed il peso dopo l'evacuazione (quando la larva, vuotatasi del contenuto intestinale, sta per trasformarsi in prepupa). Stabiliti i valori del peso (volendo seguire anche l'accrescimento lineare, oltre il ponderale, ho raccolto i dati relativi al valore dei diametri cefalici, nelle diverse età; mi riservo di analizzarli prossimamente) nelle varie età, e la durata delle età stesse, ho calcolato, secondo il metodo del dott. Jucci, l'*accrescimento assoluto*, dividendo il peso raggiunto di ogni età per il peso di nascita; l'*accrescimento relativo* (o quoziente di accrescimento: dividendo invece di ogni età il peso raggiunto per il peso iniziale); la *velocità di accrescimento*, dividendo il quoziente di accrescimento per la durata dell'età (totale da una muta all'altra; ma più esatto sarebbe riferirsi alla durata attiva, escludendo tutto il tempo, circa mezza giornata, consacrata alla muta).

Accrescimento ponderale.

Età	Durata età giorni	Peso larva grammi	Accrescimento		Velocità di accre- scimento	Rapporto fra	
			assoluto	relativo		gli accre- scimenti relativi	le velocità d'ac- crescimento
neonata	—	0.0001325	—	—	—	—	—
mutata 1 ^a	8	0.00036	2.718	2.718	0.302	—	—
» 2 ^a	8	0.00083	6.264	2.305	0.288	0.855	0.953
» 3 ^a	7	0.00177	13.358	2.132	0.267	0.924	0.927
» 4 ^a	7	0.0027	20.370	1.525	0.248	0.715	0.928
massimo sviluppo 5 ^a	6	0.004022	30.360	1.148	0.206	0.752	0.830

Dalla tabella si rileva, e nella figura 2 è rappresentato graficamente, che « col progredire dell'età, diviene sì, sempre più imponente, considerato nel suo valore assoluto, l'accrescimento di peso; ma in realtà la capacità e velocità di accrescimento, massime nella prima età, attraverso le età successive vanno degradando fino a scendere, nella 5ª età, ad un valore minimo » (1). (Cfr. fig. 2-A e 2-B). È lo stesso andamento che il dott. Jucci ha trovato per i bachi da seta in tutte le razze studiate e che ha considerato come caratteristico dello sviluppo di tutti gli insetti (e, fino ad un certo punto, di tutti gli Artropodi) sopra tutto degli Olometaboli. Egli considera questo abbassamento progressivo, attraverso le età, della capacità di accrescimento (quozienti e velocità), come espressione di una progressiva

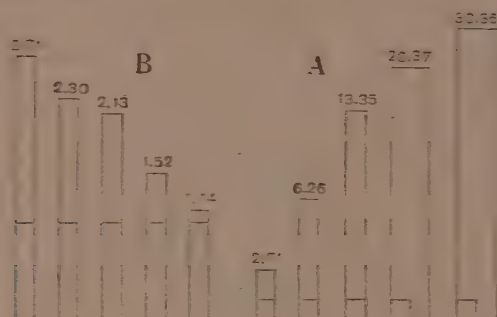


Fig. 2. - Diagramma della rappresentazione grafica:

A, dell'accrescimento assoluto; B, dell'accrescimento relativo, con aree proporzionali ai quozienti di accrescimento; 1, 2, 3, 4, 5, rappresentano le età rispettive.

autointossicazione per accumulo di prodotti catabolici. « La muta, sì, è un mezzo prezioso per ripulire l'organismo e prepararlo ad un nuovo sbalzo anabolico; ma la rimessa a nuovo dell'organismo non è assoluta: l'organismo è ringiovanito, ma è pur sempre un ringiovanimento relativo » (1). Anzi il dott. Jucci, verificando che l'abbassamento della capacità di accrescimento attraverso le età è progressivo, ma non regolarmente graduale, « trova ben naturale che la caduta grave della velocità di accrescimento sia tra la 1ª e la 2ª età. Nella 1ª età l'organismo era giovane, nella 2ª ringiovanito; nelle successive età la velocità di accrescimento subisce poca variazione, dato che la muta è presso a poco sufficiente, diciamo così, a reintegrare quasi il ringiovanimento » (1).

Ma nel nostro coleotterino non pare che le cose vadano così. Calcolando i rapporti tra i quozienti e tra le velocità di accrescimento, nelle

(1) Loc. cit. Vedi anche: Jucci G., *Su l'attività del tipo metabolico nei bachi da seta: I. A. Anabolismo*. — Boll. Lab. Zool. gen. e agr. Portici, v. 17, pp. 87-318, (« Annali R. Sc. Sup. Agr. Portici »), pp. 1-134, 1924.

varie età, si rileva che l'abbassamento tra 1^a e 2^a età non è più forte (per la velocità e anzi nettamente più lieve) che tra le successive una loro. Quale valore deve accordarsi a questo fatto?

Che io sappia solo per un altro coleottero, il ditisco, è stata determinata la curva di sviluppo da Bounoure¹⁾. Veramente, come non il dott. Jucci, Bounoure, scolaro di Houssey, cerca di ritrovare, nella curva di sviluppo del suo coleottero, il tipo generale che esprime l'andamento di sviluppo negli esseri vivi; e non arriva, perciò, a cogliere quello che vi è di caratteristico nello sviluppo degli insetti. Ma, se studiamo i dati raccolti dal Bounoure, ci accorgiamo che, anche per la larva del ditisco, la capacità di accrescimento non aumenta, ma piuttosto decresce di età in età (dalla 1^a alla 2^a, alla 3^a: il ditisco compie sempre due sole mute larvali). Calcolando, in base ai dati del Bounoure, i quozienti di accrescimento, che esprimono l'accrescimento relativo, Jucci trova per la 1^a età 3,33; per la 2^a: 2,0; per la 3^a: 2,5. Nota che come però non è grande l'abbassamento della capacità di accrescimento dalla 1^a alla 2^a età, al contrario di quanto si verifica nel baco da seta, e, probabilmente, in molti almeno dei lepidotteri: e conclude: « se dunque è comune a tutti gli insetti, nelle sue linee generali, il tipo di sviluppo da me tracciato per il baco da seta, ci sono però differenze notevoli nei vari gruppi d'insetti: e queste differenze non debbono essere tanto in rapporto agli adattamenti biologici ed al regime alimentare, quanto alle differenze fondamentali delle strutture organiche. E del tipo evolutivo »²⁾. Dunque se i miei dati sulla curva di sviluppo del *Chrysomelid testaceus* confermano ancora una volta l'andamento generale dell'accrescimento ponderale negli insetti, il degradare cioè attraverso le età della capacità di accrescimento, mostrano però, nel mio insetto, una netta divergenza dal tipo di sviluppo del baco da seta: 1^a nel valore poco elevato dell'accrescimento ponderale complessivo dalla nascita alla maturità (30 volte invece che 8-9 volte), 2^a nell'abbassamento progressivo della capacità di accrescimento, che non subisce tra 1^a e 2^a età caduta più brusca che tra le successive. Questi due caratteri si riscontrano nel mio coleotterino xilofago, come nel grosso coleottero carnivoro, acquatico del Bounoure: il ditisco.

[1] Bounoure L. *Histoire, Culture, et Valeur Agricole des Coléoptères*. Paris 1900.

[2] Jucci C. Sulla *« divergenza »* di *« maturità »* la *« Setola del Tremolli »* Neozenici Reali verici neozenici - *« Mesostene »* nei reali neozenici - La *« Biologia della Biologia »* Memorie R. Acc. Naz. Lincei - Ann. CCXXV Ser. VI, Vol. XIV, fasc. IX-1904, 247 pp., 29 fig., 4 tavole.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 1° novembre 1925.

V. VOLTERRA, *presidente*

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Astronomia. — *Sopra una presumibile oscillazione del diametro solare, secondo le ricerche eseguite nel R. Osservatorio del Campidoglio. Nota* ⁽¹⁾ *del Corrispondente G. ARMELLINI.*

I. In una Nota sopra analogo argomento ⁽²⁾ esaminammo il problema delle pulsazioni del diametro solare, gli studi eseguiti al riguardo da numerosi astronomi, lo stato attuale della questione e le osservazioni fatte in proposito al Campidoglio nel 1923.

Queste osservazioni sono state proseguite e proseguono ininterrottamente con i metodi illustrati nel citato lavoro, e noi passiamo ora ad esporre i risultati ottenuti nell'anno 1924. E ciò tanto più che dal confronto 1923-1924 sembrerebbe potersi rilevare — *con risultato concorde di tutti e tre gli osservatori* — l'esistenza di una lieve oscillazione del diametro solare, già altre volte affermata da Hilfiker, da Schur ed Ambronn, da Ch. Lane e da altri; risultato questo che una volta posto fuori dubbio segnerebbe un progresso notevolissimo nelle nostre conoscenze sul Sole.

Ma, a tale proposito, un sentimento di doverosa giustizia verso i nostri benemeriti Maestri e Predecessori ci spinge a far rilevare che vi è un Osservatorio italiano che da cinquant'anni, senza alcuna interruzione, attende

(1) Pervenuta all'Accademia il 13 agosto 1925.

(2) Cfr. «Rendiconti Lincei», 1924, I, fasc. 9.

allo studio di un tale fenomeno con osservazioni quotidiane del diametro solare; ed è l'Osservatorio del Campidoglio a Roma. E poichè la nostra opera si ricollega strettamente a quella degli illustri Astronomi che ci precedettero, sarà utile riassumere brevemente ciò che essi hanno fatto.

II. Le osservazioni del diametro orizzontale del Sole furono iniziate al Campidoglio il 12 dicembre 1873 dal prof. Respighi, servendosi dell'ottimo strumento meridiano di Ertel. Nel periodo 1873-'76 il Respighi fu aiutato in tale incarico dal prof. A. Di Legge, allora suo assistente; e tre anni dopo - adottato il metodo della proiezione che esaminammo nella precedente Nota - prese parte alle osservazioni anche il prof. Giacomelli, e dal 1879, anche il prof. Prosperi.

Il Respighi pubblicò le sue osservazioni negli « Atti » di questa Accademia ⁽¹⁾ in varie riprese; e nel 1885 un'ampia discussione di tutta la prima decade di osservazioni fu pure pubblicata ⁽²⁾ dal prof. A. Di Legge.

Avvenuta nel 1889 la morte del Respighi, il lavoro veniva continuato con lo stesso metodo dal nuovo Direttore dell'Osservatorio Capitolino professore A. Di Legge aiutato dagli astronomi proff. F. Giacomelli e A. Prosperi; e lo stesso prof. Di Legge - per citare solo i lavori principali - pubblicava nel 1889 il secondo decennio ⁽³⁾ di osservazioni.

Infine nel 1920 il compianto prof. A. Prosperi pubblicava ⁽⁴⁾ una Nota, assai importante nella sua brevità, nella quale riassumeva tutti i risultati ottenuti dai tre osservatori Di Legge, Giacomelli e Prosperi, dal 1874 al 1900 incluse. Servendoci di questa Nota, abbiamo costruito il diagramma qui sotto riportato, che vede ora la luce per la prima volta e che mostra chiaramente come una lieve oscillazione nel diametro solare - sia pure senza periodo regolare - possa difficilmente essere negata. A chiarimento del diagramma, ricordiamo che i numeri indici delle macchie solari del Wolf nel triennio 1887-1888-1889, sono rispettivamente uguali a 13.7, a 9.4 ed a 8.9; tornano quindi a salire e nel 1893 raggiungono il valore di 96.1.

La morte prematura del Prosperi, avvenuta nel 1921, gli tolse di poter discutere un altro decennio di osservazioni (1901-1910) a cui erasi appassionatamente dedicato; ma noi crediamo di sapere che l'illustre prof. Di Legge, al quale il Prosperi aveva raccomandato le sue ultime fatiche, attenda ora a questo grave lavoro, che sarà certamente fecondo di buoni risultati per la fisica solare ed onorerà insieme l'attività e lo zelo dei tre valorosi astronomi italiani.

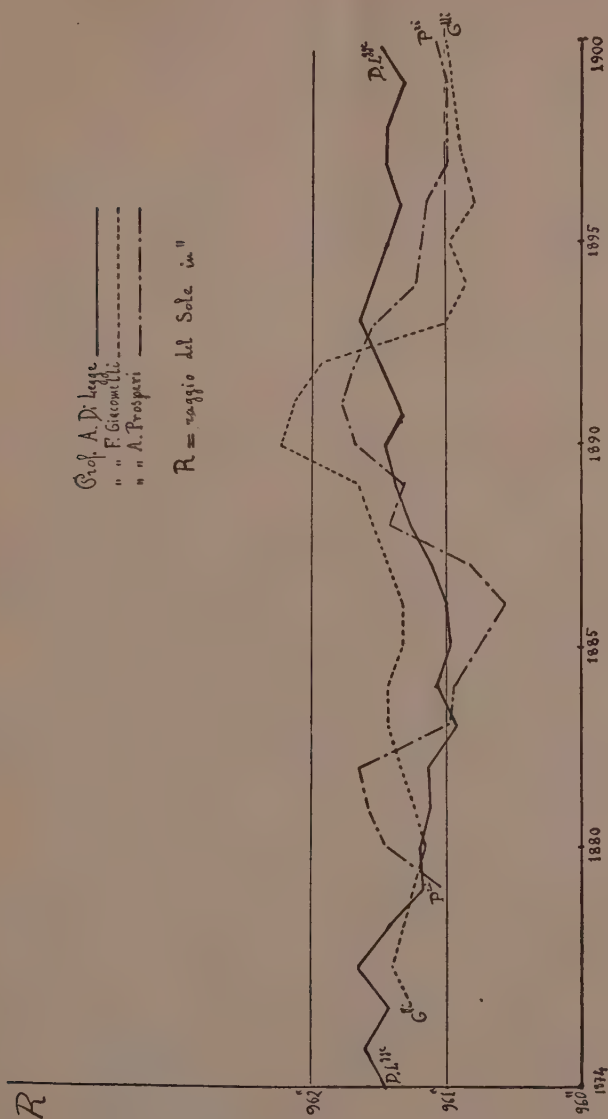
(1) Cfr. « Atti Lincei », serie 2^a, t. II; serie 3^a, vol. I, VIII/e XIII.

(2) Cfr. *Sul diametro solare*, Memoria del prof. A. DI LEGGE in « Mem. della R. Acc. Naz. dei Lincei » (Sc. fis. e mat.), serie 4^a, vol. I.

(3) Cfr. *Sul diametro solare*, Memoria di A. DI LEGGE ed A. PROSPERI in « Soc. Ital. delle Scienze detta dei XL », serie 3^a, tomo XII.

(4) Cfr. *Sopra alcune misure del diametro solare*, Memoria della « Soc. Astr. Ital. », serie 3^a, vol. I, 1920.

III. Più precisamente, indicando con D, G, P i tre osservatori (Di Legge, Giacomelli, Prosperi) e con M la media dei valori, i semidiametri del sole ⁽¹⁾



(1) Per maggiore omogeneità nell'esame del venticinquennio 1876-1900 non consideriamo il quarto osservatore Prof. L. Respighi, giacchè le sue osservazioni abbracciano solo pochi anni.

trovati per ciascun anno — e quindi riferibili alla metà dell'anno in corso essendo le osservazioni continuate — sono riportati dalla seguente

TABELLA I.

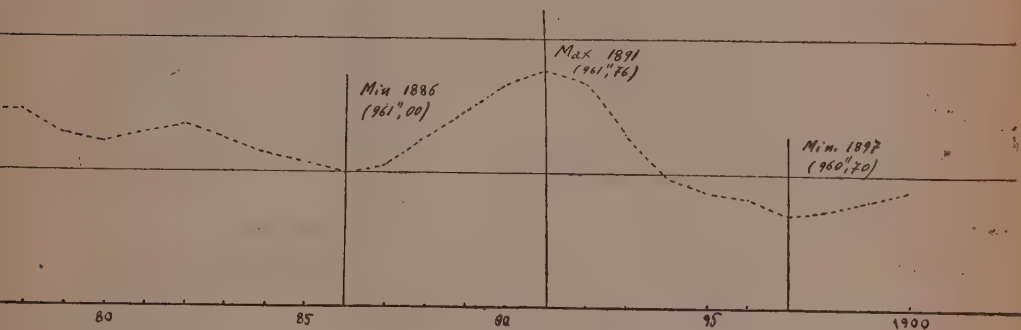
DATA	D	G	P	M	DATA	D	G	P	M
1876.5	961".43	961".27	—	961".35	1889.5	961".38	961".65	961".34	961.46
77.5	961 .69	961 .41	—	961 .55	90.5	961 .47	962 .22	961 .69	961.79
78.5	961 .44	961 .33	—	961 .38	91.5	961 .31	962 .12	961 .79	961.74
79.5	961 .20	961 .25	961.06	961 .17	92.5	961 .00	961 .94	961 .69	961.54
80.5	961 .21	961 .18	961.44	961 .28	93.5	960 .66	961 .01	961 .52	961.06
81.5	961 .13	961 .24	961.60	961 .32	94.5	960 .54	960 .87	961 .24	960.88
82.5	961 .14	961 .36	961.65	961 .38	95.5	960 .44	960 .99	961 .19	960.87
83.5	960 .94	961 .42	961.03	961 .13	96.5	960 .37	960 .80	961 .16	960.78
84.5	961 .09	961 .44	960.95	961 .16	97.5	960 .44	960 .44	961 .00	960.63
85.5	960 .98	961 .32	960.77	961 .02	98.5	960 .48	960 .96	961 .03	960.82
86.5	961 .00	961 .32	960.59	960 .97	99.5	960 .33	961 .00	961 .02	960.78
87.5	961 .12	961 .43	960.82	961 .12	1900.5	960 .50	961 .08	961 .24	960.94
88.5	961 .29	961 .56	961.41	961 .42	—	—	—	—	—

Compensando le osservazioni di due in due anni, per evitare l'influenza del differente stato atmosferico, e prendendo come valore del raggio solare R p. es. per il 1877.0 la media dei valori medi trovati per il 1876.5 e per il 1877.5, abbiamo il seguente prospetto:

ANNI	R	ANNI	R	ANNI	R
1877.0	961".45	1885.0	961".09	1893.0	961".30
78.0	961".47	1886.0	961".00	1894.0	960".97
79.0	961".28	1887.0	961".05	1895.0	960".87
80.0	961".22	1888.0	961".27	1896.0	960".82
81.0	961".30	1889.0	961".44	1897.0	960".70
82.0	961".35	1890.0	961".63	1898.0	960".73
83.0	961".25	1891.0	961".76	1899.0	960".80
84.0	961".14	1892.0	961".64	1900.0	960".86

Come media delle osservazioni si trova per R il valore $961''.18$, che coincide esattamente col valore di Auwers $961''.18$ ora adottato dalle maggiori effemeridi astronomiche.

Dal prospetto ora riportato ricaviamo poi il seguente diagramma, che



riassume i risultati del primo venticinquennio di osservazioni del Campidoglio e mostra come sia fondatamente presumibile un'oscillazione del diametro solare con un periodo poco diverso da undici anni, e cioè dal ciclo delle macchie. Occorre ancora osservare che, in ogni caso — anche ammettendo la perfetta uguaglianza dei periodi — i due fenomeni sono sfasati l'uno rispetto all'altro, avendo luogo il massimo delle macchie solari qualche anno dopo che il diametro dell'astro ha raggiunto il suo più grande valore e quando il sole già comincia a sgonfiarsi.

IV. Col 1° gennaio 1923, dopo che lo scrivente assunse la direzione dell'Osservatorio, lasciato allora per limiti di età dal suo venerato Maestro A. Di Legge, il lavoro venne vigorosamente continuato col nuovo personale e le osservazioni vennero fatte dall'allora assistente, ed ora astronomo, G. Conti Armellini, dal tecnico P. Mignucci e dallo scrivente. Nella precedente Nota ⁽¹⁾ riportammo quelle dell'anno 1923; pubblichiamo ora quelle del 1924 indicando sempre con G. C. A.; G. A. e P. M. i tre osservatori (Gabriella Conti Armellini, Giuseppe Armellini e Pietro Mignucci) e misurando in *mezzi secondi siderali* i tempi impiegati dal passaggio in meridiano del diametro orizzontale del Sole. Per brevità di composizione tipografica abbiamo soppresso la cifra delle centinaia che è sempre uguale a 2, scrivendo, p. es., 83.7 invece di 283.7, ecc.

Ciò posto le osservazioni da noi fatte nel 1924 vengono riassunte nella seguente:

(1) Cfr. *Osservazioni sul diametro del Sole, fatte nel R. Osservatorio di Roma sul Campidoglio*, « Rend. Lincei », 1924, sem. I, fasc. 9.

TABELLA.

Data	G.C.A.	G.A.	P.M.	Data	G.C.A.	G.A.	P.M.	Data	G.C.A.	G.A.	P.M.
1924				1924				1924			
Gennaio 1	83.7	84.1	84.0	Maggio 5	65.2	64.9	65.2	Luglio 16	71.7	71.5	71.3
» 2	84.2	83.7	83.7	» 6	65.6	65.7	65.4	» 17	71.6	71.4	71.1
» 7	82.8	82.7	82.8	» 9	66.8	66.7	66.3	» 22	69.7	—	70.0
» 11	82.0	81.4	81.8	» 13	68.0	67.5	67.6	Agosto 2	66.6	65.8	66.0
» 13	81.0	81.0	81.3	» 14	68.4	—	68.1	» 4	65.4	64.7	65.0
» 18	79.2	79.0	78.9	» 15	68.7	—	68.3	» 5	65.3	65.1	65.1
» 19	79.0	79.5	78.8	» 16	68.1	—	68.7	» 6	64.9	64.8	64.4
» 21	78.1	78.0	77.8	» 17	69.7	69.2	69.2	» 8	63.6	—	63.5
» 22	77.8	77.7	77.8	» 19	69.8	69.6	69.5	» 11	62.8	62.8	—
» 24	77.3	76.9	76.9	» 20	70.0	—	69.8	» 16	61.2	61.2	—
» 26	76.3	76.0	75.7	» 21	70.7	70.4	70.2	Settembre 6	56.9	—	56.6
» 27	75.8	75.4	75.1	» 22	70.4	70.5	70.4	Ottobre 13	60.4	—	60.1
» 28	74.4	74.6	74.5	» 24	71.2	71.4	71.3	» 14	60.8	—	60.7
» 30	74.1	74.0	73.6	» 27	72.0	72.1	72.0	» 15	—	60.4	60.3
» 31	74.1	73.8	73.4	» 28	71.9	72.4	72.2	» 16	—	61.3	60.6
Febbraio 1	73.3	73.2	73.2	» 30	73.2	73.3	72.6	» 17	61.1	—	60.8
» 5	71.9	71.9	71.7	» 31	73.2	—	73.2	» 22	63.7	—	63.3
» 7	70.7	70.4	70.3	Giugno 2	74.0	73.2	73.3	» 27	—	65.3	64.9
» 8	70.7	69.9	70.1	» 4	74.2	74.0	73.7	» 31	66.7	—	67.0
» 9	69.7	69.7	69.6	» 5	74.3	74.4	74.0	Novem. 4	—	68.7	68.9
» 12	68.0	68.0	68.1	» 7	74.5	74.4	74.3	» 5	69.6	—	69.2
» 15	66.8	66.8	66.6	» 9	75.1	74.8	74.8	» 6	70.3	70.0	—
» 25	63.2	63.5	63.2	» 10	74.8	74.9	74.5	» 11	72.7	72.0	72.4
» 28	62.1	—	61.8	» 11	75.4	—	75.1	» 12	72.6	72.6	72.4
Marzo 1	61.8	61.6	61.3	» 12	75.0	75.0	74.7	» 13	73.2	72.7	72.7
» 5	60.6	60.0	60.2	» 16	75.6	—	75.5	» 19	76.1	75.9	75.7
» 8	60.6	60.0	59.4	» 17	75.6	75.7	75.5	» 20	76.7	76.1	76.3
» 10	59.2	58.9	59.2	» 18	75.5	—	75.4	» 21	77.4	—	76.8
» 11	59.3	59.3	58.9	» 19	76.0	75.6	75.3	» 22	77.6	76.8	76.9
» 12	59.4	58.7	58.9	» 25	75.5	75.4	75.4	» 24	78.1	—	77.5
» 13	—	58.5	58.7	» 26	75.6	—	75.4	» 25	78.8	78.5	78.8
» 15	58.7	58.4	58.2	» 27	75.6	75.4	75.0	» 26	79.6	78.7	78.7
» 18	58.3	58.3	57.9	» 28	75.4	—	75.0	» 27	80.4	78.9	79.5
» 19	58.2	57.6	—	» 30	—	75.4	75.0	Dicemb. 12	83.5	—	83.4
Aprile 7	57.8	57.6	57.6	Luglio 1	75.0	—	74.5	» 13	85.0	—	84.5
» 10	58.4	58.8	58.9	» 2	75.1	74.6	74.6	» 15	84.9	—	84.2
» 11	58.2	58.3	58.3	» 3	74.8	74.7	74.4	» 17	84.5	84.4	84.4
» 15	59.3	59.3	59.6	» 4	74.4	74.4	74.2	» 18	84.6	84.7	84.4
» 21	61.3	61.0	60.7	» 5	74.3	74.2	—	» 19	85.2	84.2	84.5
» 22	61.2	61.7	61.2	» 7	74.1	—	73.8	» 20	84.0	84.6	84.6
» 23	61.7	61.6	61.5	» 8	73.6	73.9	73.6	» 22	84.8	—	84.5
» 24	62.4	61.7	61.8	» 9	73.3	73.4	73.1	» 23	85.1	—	84.5
» 25	62.3	62.1	62.1	» 14	71.9	72.2	71.8	» 30	84.7	84.0	84.0
» 28	62.9	63.1	62.9	» 15	72.2	71.8	71.6				

Eseguite le riduzioni, ⁽¹⁾ otteniamo per il raggio R del Sole, alla distanza media aumentato dell'irradiazione, i seguenti valori:

Gab. Armellini Conti	R = 16' 1".17
Giuseppe Armellini	R = 16' 0".46
Pietro Mignucci.	R = 16' 0".40

Come vedemmo per il 1923 si ebbe invece:

Gab. Armellini Conti	R = 16' 1".42
Giuseppe Armellini	R = 16' 1".72
Pietro Mignucci	R = 16' 1".00

Riassumendo, nel 1924 tutti e tre gli osservatori hanno trovato valori minori che nel 1923, ciò che sembrerebbe favorevole all'ipotesi d'Hilfiker e di Lane che il Sole sia in realtà una stella pulsante; come del resto appare presumibile dal primo venticinquennio delle osservazioni del Campidoglio ⁽²⁾.

(1) Il cronometro siderale Dent, adoperato nel 1924, ritardava giornalmente di circa 0^s, 4; ciò che non porta alcuna correzione sensibile nei risultati. Nel passato anno 1923, l'orologio accelerava di 1^s, 7 al giorno, ciò che conduce a diminuire il valore di R di circa due centesimi di secondi di arco.

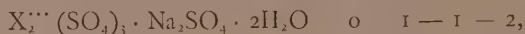
(2) Diciamo «appare presumibile» giacchè è ben noto come l'astronomo che più di ogni altro ha studiato il diametro solare, l'illustre Auwers, nelle sue *Neue Untersuchungen über den Durchmesser der Sonne* («Sitzungsberichte der Berl. Akad.», 1886-1887) non ha potuto affermare alcun movimento di pulsazione.

Occorre però osservare che il materiale trattato da Auwers è assai *meno omogeneo* di quello dato dal nostro Osservatorio, che possiede ormai *mezzo secolo* di osservazioni solari, tutte eseguite con lo stesso metodo, con l'identico strumento e da tre osservatori, *simultaneamente*, posti tutti nelle stesse condizioni. Di più potrebbe obiettarsi che nelle discussioni Auwers confida forse eccessivamente nel metodo delle perequazioni, metodo che se attenua gli errori accidentali può anche mascherare i valori delle deboli eventuali pulsazioni del diametro solare. Per nostro conto, essendo ancora grande la incertezza di dati sopra una eventuale pulsazione del Sole, crediamo più utile di pubblicare integralmente le osservazioni, senza alcuna manipolazione, e di servirci nelle discussioni di diagrammi grafici anzichè di calcoli numerici.

Chimica. — *I solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini.* III. *Solfati doppi di lantanio e sodio*⁽¹⁾. Nota del Socio F. ZAMBONINI e del dott. G. CAROBBI.

I solfati doppi del sodio con i metalli del gruppo del cerio hanno, come è noto, una grande importanza pratica, perchè, analogamente a quanto avviene col potassio, sono praticamente insolubili o quasi in una soluzione satura di solfato sodico, e vengono, perciò, spesso adoperati per separare quantitativamente i metalli del gruppo del cerio da quelli delle terre ittriche, che danno solfati doppi solubili nelle soluzioni sature di solfato sodico.

Mentre già dalle antiche ricerche risultava una grande variabilità di composizione per i solfati doppi dei metalli del gruppo del cerio, opportunamente chiamati lantanidi da V. M. Goldschmidt, col potassio, per esempio, dalle indagini finora eseguite appare, al contrario, una uniformità grandissima per i solfati doppi dei lantanidi col sodio, tanto che si trova descritto un solo tipo di solfato doppio, rispondente alla formula



che si è ottenuto anche per il gadolinio e per l'ittrio, mentre per l'erbio è noto, invece, un sale doppio di formula $I - 5 - 7$.

Continuando le nostre esperienze⁽²⁾ sui solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini, abbiamo intrapreso lo studio sistematico di quelli che si formano, sempre per l'isoterma di 25°, quando il metallo alcalino è il sodio.

Nella presente Nota riferiremo sui risultati ottenuti dallo studio della parte per noi interessante del sistema $La_2(SO_4)_3 - Na_2SO_4 - H_2O$.

Le esperienze furono eseguite con la solita tecnica già ampiamente descritta nei nostri precedenti lavori. Nel caso attuale, però, date le forti variazioni che si hanno nella solubilità del solfato sodico in vicinanza di 25°, occorre badare con la maggiore cura che non intervengano variazioni nemmeno piccole di temperatura durante la separazione del corpo di fondo dalla fase liquida, perchè altrimenti, quando le soluzioni contengono molto solfato sodico, si ha subito un'abbondante formazione di cristalli del decaidrato.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Napoli; pervenuto all'Accademia il 9 settembre 1925.

(2) ZAMBONINI e CAROBBI, « Rend. R. Acc. Lincei » (5°) 1924, XXXIII, 2° sem., 301. ZAMBONINI e CAGLIATI, ibidem 308. ZAMBONINI e CAROBBI, ibidem (6°) 1925, I, 1° sem., 278.

I metodi analitici furono quelli stessi adoperati per il sistema

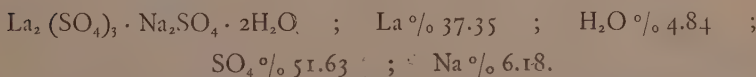


I risultati ottenuti sono riuniti nella seguente

TABELLA I.

N. dell'espe- rienza	Composizione della fase liquida				Composizione del corpo di fondo				Costituenti del corpo di fondo
	Na_2SO_4	$\text{La}_2(\text{SO}_4)_3$	H_2O	$\frac{\text{Na}_2\text{SO}_4}{\text{H}_2\text{O}}$	La	H_2O	SO_4	$\frac{\text{La}_2(\text{SO}_4)_3}{\text{Na}_2\text{SO}_4}$	
1	18.06	—	81.94	0.220	34.68	5.31	53.30	2.94	1 — 1 — 2 + + Na_2SO_4
2	16.28	—	83.72	0.194	37.18	5.20	51.28	3.97	
3	15.06	—	84.94	0.177	37.32	5.26	51.21	4.06	
4	13.86	—	86.14	0.161	37.45	5.30	51.32	4.14	
5	10.46	—	89.54	0.117	37.36	5.27	51.52	4.08	
6	7.13	tracce	92.87	0.077	37.46	5.12	51.29	4.10	1 — 1 — 2
7	5.43	»	94.57	0.057	36.78	5.92	51.90	3.91	
8	3.42	»	96.58	0.035	37.49	4.98	51.51	4.09	
9	0.75	0.09	99.16	0.0076	37.27	5.29	51.22	4.04	
10	0.54	0.19	99.28	0.0054	37.31	5.35	51.67	4.07	

Composizione teorica dal composto ottenuto



Col solito sistema di rappresentazione grafica, i dati della Tabella I sono riuniti nella fig. 1.

Dalla Tabella I e dalla fig. 1 emerge chiaramente che, nelle nostre condizioni sperimentali e per l'isoterma di 25°, si forma un solo solfato doppio di lantanio e di sodio, e, precisamente, quello noto già da lungo tempo, di formula $\text{La}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot \text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$. Questo composto è stato descritto da Cleve⁽¹⁾, che lo aveva ottenuto dai due sali semplici, come una polvere bianca, pesante, indistintamente cristallina. Precisamente sotto questa forma lo abbiamo ottenuto anche noi. Da soluzioni molto diluite, per lenta evaporazione abbiamo ottenuto delle crosticine, le quali al microscopio sono

(1) « Bihang till K. Svenska Vet. Akad. Handl. », 1874, II, n. 7.

risultate costituite da minutissimi prismetti mal conformati, con estinzione parallela alla direzione di allungamento che è otticamente positiva.

Il solfato doppio di lantanio e sodio 1 — 1 — 2 si disidrata con difficoltà. Anche a 150° la perdita di peso non è che di 0.42 % (media di parecchie determinazioni), e rappresenta soltanto acqua igroscopica. Infatti, tutte le nostre determinazioni hanno dato dei valori, per l'acqua, superiori di circa 0.5 % al teorico: eliminando l'acqua che si svolge fino a 150° si ha che quella restante corrisponde esattamente a quanto richiede la teoria per la formula $\text{La}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot \text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$.

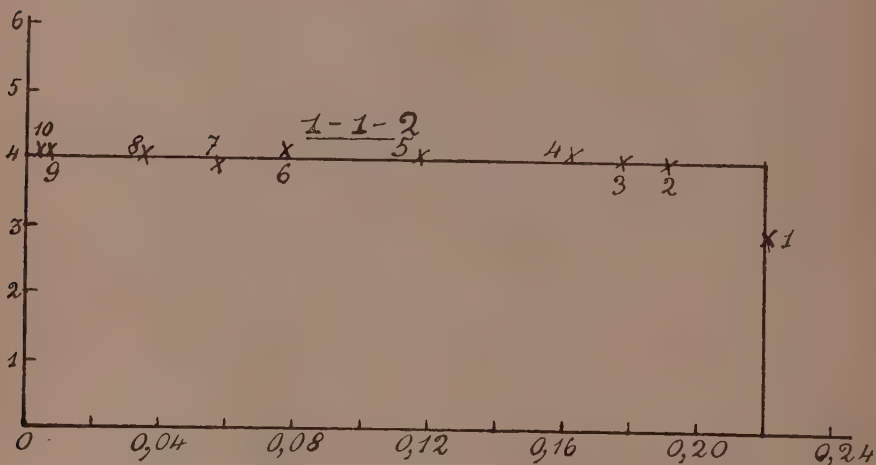


Fig. 1.

Questo composto è stabile, puro, in contatto con soluzioni che contengono da 0.13 a 16.28 % Na_2SO_4 e da 0 a 0.19 % $\text{La}_2(\text{SO}_4)_3$.

La soluzione satura a 25° contiene, come abbiamo accertato con apposita determinazione, in 100 grammi 0.14 La e 0.23 SO_4 , il che corrisponde a 0.28 gr. $\text{La}_2(\text{SO}_4)_3$ e 0.13 % Na_2SO_4 . Si ha, perciò, un lievissimo eccesso di solfato sodico sulla formula 1 — 1 — 2.

È notevole il fatto, che nella esperienza n. 1 il corpo di fondo era costituito dal solfato doppio 1 — 1 — 2 e dal solfato sodico anidro, mentre, essendosi operato a temperatura inferiore di alcuni gradi a quella di trasformazione del decaidrato in sale anidro, ci si sarebbe attesi di trovare, nel corpo di fondo, l'idrato $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$. Ne segue, che la presenza del solfato di lantanio abbassa sensibilmente il punto di trasformazione del decaidrato nel composto anidro.

Ci è grato ringraziare la dott. Noemi Ibba per l'aiuto datoci nella esecuzione delle analisi.

Chimica. — *Ricerche sull'isomorfismo dei molibdati dei metalli delle terre rare con quelli del calcio, dello stronzio, del bario e del piombo.* Nota del Socio F. ZAMBONINI e del prof. R. G. LEVI⁽¹⁾.

III.

DEDUZIONI DALL'ANALISI RÖNTGENOGRAFICA DEI MOLIBDATI DI CA, SR, BA, PB.

Esaminando le tabelle della Nota II, si scorge subito che i quattro composti CaMoO_4 , SrMoO_4 , BaMoO_4 e PbMoO_4 hanno la stessa struttura cristallina. I piani riflettenti si può dire sieno essenzialmente gli stessi, come risulta dal seguente confronto:

	{101}	{002}	{110}	{102}	{112}	{200}	{103}	{113}	{120}	{121}	
CaMoO ₄	+	+	+	+	+	+	+	—	+	+	
SrMoO ₄	+	+	+	—	+	+	+	—	—	+	
BaMoO ₄	+	+	+	—	+	—	+	—	—	+	
PbMoO ₄	+	+	+	+	+	+	—	+	—	+	
	{202}	{004}	{114}	{221}	{122}	{123}	{300}	{301}	{122}	{130}	{204}
CaMoO ₄	+	+	—	—	+	+	+	+	+	+	+
SrMoO ₄	+	—	+	—	—	+	—	+	+	+	+
BaMoO ₄	+	—	—	—	+	+	—	+	—	+	—
PbMoO ₄	+	+	—	+	—	+	+	+	+	+	+
	{105}	{132} {223}	{303}	{231}	{133}	{224} {006}	{400} {106}	{125}	{134}	{233}	{141}
CaMoO ₄	—	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
SrMoO ₄	+	+	+	+	—	+	—	+	+	—	+
BaMoO ₄	—	+	+	+	—	+	+	—	+	—	+
PbMoO ₄	—	+	+	+	—	+	—	+	+	—	+
	{305}	{142}	{126}	{135}	{143}	{332}	{241}	{143}	{240}	{242} {333}	{404}
CaMoO ₄	+	—	—	—	+	+	+	+	+	+	—
SrMoO ₄	+	—	+	+	+	—	—	+	—	+	+
BaMoO ₄	—	—	—	—	—	+	+	—	—	+	+
PbMoO ₄	+	+	—	—	—	+	—	—	+	+	+
	{306} {325}	{136}									
CaMoO ₄	—	—									
SrMoO ₄	+	—									
BaMoO ₅	+	+									
PbMoO ₄	—	—									

(1) Pervenuta all'Accademia il 15 luglio 1925.

I piani riflettenti che si trovano soltanto in alcuni dei composti studiati sono quasi tutti rappresentati nei fotogrammi da curve deboli o molto deboli: fa eccezione, però, {113}, caratteristico del molibdato di piombo, che è, invece, forte. Anche notevoli sono alcuni dei piani riflettenti osservati nel solo molibdato di stronzio, come {126}, {135}.

Le dimensioni della cellula elementare, in base al valore di a determinato dai fotogrammi ed a quello di $a:c$ noto dalle misure cristallografiche, risultano le seguenti:

			V	Peso specifico
CaMoO ₄	$a_0 = 3.67 \text{ \AA}$	$c_0 = 5.69 \text{ \AA}$	76.6	4.28
SrMoO ₄	3.79	5.97	85.8	4.73
BaMoO ₄	3.96	6.43	100.8	4.84
PbMoO ₄	3.80	6.00	86.6	6.95

Nella ipotesi che nella cellula unitaria sia contenuta una molecola di ciascuno dei composti studiati, si ottengono per i rispettivi pesi specifici i valori sopra indicati, i quali si accordano bene con quelli determinati direttamente. Infatti, per CaMoO₄ uno di noi, nel lavoro più volte ricordato, ha trovato $4.25 a + 16$, adoperando cristalli puri: per PbMoO₄ Manross dà 6.811. Per SrMoO₄ e BaMoO₄ Groth riporta i valori di 4.135 — 4.155 e 4.65 — 4.66 rispettivamente, dovuti a Marsh. Data la differenza notevole rispetto a quelli che risultano dall'analisi röntgenografica, ho eseguito delle nuove determinazioni, le quali hanno condotto ad un accordo migliore. Infatti, si è trovato, a $+ 25^\circ \text{C}$, rispetto all'acqua di uguale temperatura, 4.83 per il molibdato di bario, un valore, cioè, praticamente uguale a quello risultante dai röntgenogrammi, e 4.54 per il molibdato di stronzio.

La cella unitaria ha, praticamente, le stesse dimensioni nel molibdato di piombo ed in quello di stronzio: si conferma, così, il risultato al quale era pervenuto Becke molti anni fa, che, cioè, il volume molecolare e gli assi tipici dei composti di piombo sono vicinissimi ai valori dei corrispondenti composti di stronzio, purchè, naturalmente, si tratti di fasi isomorfe e non in relazione di isopolimorfismo.

Notevole è il fatto che per i tre composti CaMoO₄, SrMoO₄, BaMoO₄ i valori di a_0 rappresentano con grandissima approssimazione una funzione lineare dei pesi atomici degli elementi vicarianti Ca, Sr, Ba. Infatti, dai valori trovati per i composti di calcio e di bario si calcola per quello di stronzio $a_0 = 3.81 \text{ \AA}$, mentre si è trovato 3.79 \AA , ossia un valore praticamente identico.

Lo stesso fatto si verifica per i lati del cubo unitario nei nitrati di Ca, Sr, Ba studiati da Vegard, il quale dà: Ca(NO₃)₂, $a_0 = 7.60 \text{ \AA}$, Sr(NO₃)₂, $a_0 = 7.81$, Ba(NO₃)₂, $a_0 = 8.11 \text{ \AA}$. Dal primo e dall'ultimo valore

segue, per il composto di stronzio, $a_0 = 7.85$. È opportuno insistere sulla circostanza che non si tratta di una regola precisa, ma, invece, soltanto approssimativa, come risulta dal fatto che, sia per i molibdati, che per i nitrati, il valore calcolato per il composto di stronzio, partendo dai dati sperimentali per quelli di calcio e di bario, è superiore a quello effettivamente trovato. Sia nell'uno, che nell'altro caso l'errore in più è del 0.5 %.

Più considerevole è l'errore nei nostri tre molibdati dei metalli alcalino-terrosi per quanto si riferisce a c_0 . Sempre nell'ipotesi di una variazione lineare in funzione dei pesi atomici degli elementi vicarianti, si calcola per il molibdato di stronzio $c_0 = 6.05 \text{ \AA}$, mentre si è trovato 5.97 \AA . L'errore è dell'1.3 %, ma è da notare che i valori di c_0 sono dedotti da a_0 e dal rapporto $\frac{c}{a}$, calcolato in base alle misure angolari. Salvo il caso di com-

pensazioni, essi sono, perciò, affetti da un errore ben più forte di quello che inquinava a_0 . Basta pensare che per il molibdato di bario si ha $c_0 = 6.43$

o 6.385 a seconda che la costante cristallografica $\frac{c}{a}$ si deduce dall'uno o dall'altro dei due angoli $(111):(1\bar{1}\bar{1})$ e $(111):(1\bar{1}1)$ misurati da Hiortdahl.

Tutton ha osservato, che, nei composti isomorfi nei quali gli elementi vicarianti appartengono ad una stessa serie di un gruppo del sistema periodico, gli assi tipici variano regolarmente col peso atomico degli elementi isomorfogeni che si sostituiscono, ma non linearmente. Altrettanto accade, evidentemente, per le dimensioni della cella unitaria, ma nei composti di Ca, Sr, Ba da noi considerati si verifica la variazione lineare, in funzione dei pesi atomici dei tre elementi indicati, con l'approssimazione dell'1 % circa. Se quanto vale per i molibdati ed i nitrati di Ca, Sr, Ba potesse estendersi alle fasi isomorfe di tutti i composti di questi elementi, sarebbe evidentemente possibile poter calcolare le dimensioni della cella unitaria anche per quelle fasi che per la loro labilità si sottraggono alle nostre indagini.

È opportuno notare che le regolarità osservate valgono, sensibilmente con la stessa approssimazione, se ci si riferisce ai numeri d'ordine del calcio, dello stronzio e del bario anziché ai pesi atomici. Questo fatto è la naturale conseguenza dell'essere il numero d'ordine dello stronzio (38) uguale esattamente alla media aritmetica di quelli del calcio (20) e del bario (56), e che altrettanto accade approssimativamente per il peso atomico⁽¹⁾.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle linee piane di cui è data, in coordinate polari, la lunghezza dell'arco in funzione dell'anomalia dell'estremo.*
Nota di MINEO CHINI, presentata dal Socio L. BIANCHI⁽¹⁾.

Tra i vari modi d'individuare una linea piana (o più generalmente un sistema di linee piane), mediante un'equazione differenziale che ne esprima una proprietà caratteristica, si può adoperare quello che consiste nel dare la lunghezza dell'arco della linea, contato da un punto fisso, in funzione di uno degli elementi della curva corrispondenti all'estremo dell'arco: per esempio, nel supporre che l'arco sia una certa funzione del raggio di curvatura, oppure della lunghezza della tangente, della normale, ecc.

Quando si supponga che la lunghezza s dell'arco sia uguale ad una funzione nota di una delle coordinate del suo estremo, nel sistema cartesiano ortogonale o polare, i casi che possono presentarsi sono i seguenti:

$$s = f(x) \quad , \quad s = f(y) \quad , \quad s = f(\theta) \quad , \quad s = f(\rho) .$$

E corrispondentemente si hanno le equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \sqrt{f'^2(x) - 1} \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{f'^2(y) - 1}} , \\ \frac{d\rho}{d\theta} &= \sqrt{f'^2(\theta) - \rho^2} \quad , \quad \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\rho}{\sqrt{f'^2(\rho) - 1}} , \end{aligned}$$

dove il radicale quadratico deve intendersi suscettibile del doppio segno.

Ora, mentre la prima, seconda e quarta di queste equazioni sono immediatamente integrabili, perchè in esse è ovvia la separazione delle variabili, si presenta invece irta di difficoltà l'integrazione della terza equazione differenziale.

La determinazione delle linee piane che, in coordinate polari, sono individuate da un'equazione della forma:

$$(1) \quad s = f(\theta) - f(\alpha) ,$$

dove s indica la lunghezza dell'arco della linea contato da un punto fisso, di anomalia α , equivale dunque all'integrazione dell'equazione differenziale:

$$(2) \quad \rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 = f'^2(\theta) ,$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 17 agosto 1925.

il cui integrale generale si sa determinare con semplici quadrature solo quando la funzione $f(\theta)$ sia assegnata in modo speciale.

Osservisi ora che l'equazione (2) è della forma:

$$(3) \quad y^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = F(x),$$

la quale, mediante la sostituzione:

$$(4) \quad y = \zeta \sqrt{\frac{F}{1 + \zeta^2}},$$

diventa:

$$(5) \quad \left(\frac{\zeta'}{1 + \zeta^2} + \frac{\zeta F'}{2F}\right)^2 = 1.$$

Perciò, trovato l'integrale generale dell'equazione

$$(6) \quad \frac{d\zeta}{dx} = (1 + \zeta^2) \left(1 - \frac{\zeta F'}{2F}\right),$$

è evidente che si otterrà quello della (5) sostituendo $\pm \zeta$ al posto di ζ nell'integrale precedente.

E poichè dalla (4) si ricava:

$$\zeta = \pm \frac{y}{\sqrt{F - y^2}},$$

concludiamo che, se riusciremo ad integrare l'equazione (6), si avrà l'integrale generale della (3) sostituendo in quello della (6), al posto di ζ , l'espressione ora scritta.

Dopo ciò possiamo dire che l'integrazione dell'equazione (2) equivale a quella dell'equazione:

$$(7) \quad \frac{d\zeta}{d\theta} = (1 + \zeta^2) \left(1 - \frac{\zeta f''}{f'}\right).$$

Concludiamo pertanto:

La determinazione delle linee piane di cui si conosca, in coordinate polari, la lunghezza dell'arco in funzione dell'anomalia dell'estremo, può farsi dipendere dall'integrazione di una equazione della forma:

$$\frac{d\zeta}{d\theta} = (1 + \zeta^2) (1 + A\zeta),$$

dove A è una funzione nota della variabile θ .

*
* *

Supposto che nella (1) si prenda

$$f(\theta) = a\theta,$$

con a quantità costante (non nulla), la (2) diventa

$$(8) \quad \rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 = a^2,$$

il cui integrale generale è:

$$\rho = a \sin(\theta + C).$$

Le linee individuate dal detto integrale generale sono evidentemente dei cerchi di raggio $a/2$ passanti per il polo. Ma l'equazione (8) ammette anche le due soluzioni singolari

$$\rho = \pm a,$$

che rappresentano entrambe un cerchio di raggio a (supposto $a > 0$) col centro nel polo. E dopo ciò concludiamo:

Le linee piane che, in coordinate polari, hanno per equazione

$$s = a(\theta - \alpha),$$

cioè l'arco delle quali è proporzionale all'angolo compreso fra i raggi vettori degli estremi dell'arco stesso, sono rappresentate dai cerchi di raggio $a/2$ passanti per il polo, e dal cerchio di raggio a avente il centro nel polo.

Suppongasi invece nella (1):

$$f(\theta) = ke^{a\theta},$$

con a e k quantità costanti (non nulle). Allora l'equazione (2) diventa:

$$(9) \quad \rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 = a^2 k^2 e^{2a\theta},$$

e la corrispondente trasformata (7) sarà:

$$\frac{dz}{d\theta} = (1 + z^2)(1 - az),$$

il cui integrale generale si riconosce facilmente, dopo la separazione delle variabili, che è:

$$\operatorname{arctang} z - a \log \frac{1 - a\tilde{z}}{\sqrt{1 + \tilde{z}^2}} = (1 + a^2) \theta + C.$$

Conseguentemente, l'integrale generale dell'equazione (9) sarà:

$$(10) \quad \operatorname{arcsen} Y - a \log \left(\sqrt{1 - Y^2 - aY} \right) = (1 + a^2) \theta + C,$$

avendo posto:

$$Y = \pm \frac{\rho e^{-a\theta}}{ak}.$$

Possiamo perciò dire che l'integrale generale dell'equazione (9) è:

$$\rho = \pm ake^{a\theta} Y,$$

essendo Y la funzione di θ (e di C) individuata dall'equazione (10).

Osservisi ora che l'equazione (9) ammette anche le soluzioni singolari:

$$\rho = \pm \frac{ak}{\sqrt{1 + a^2}} e^{a\theta}.$$

Perciò concludiamo:

Le linee piane per cui risulti:

$$s = k(e^{a\theta} - e^{a\alpha})$$

sono rappresentate dalla spirale logaritmica:

$$\rho = \frac{ak}{\sqrt{1 + a^2}} e^{a\theta}$$

e dalle linee di equazione:

$$\rho = ake^{a\theta} Y,$$

dove Y è la funzione di θ (e di C) individuata dall'equazione (10).

Un terzo caso in cui si sa integrare l'equazione (2), e si possono quindi determinare le corrispondenti linee individuate dalla (1), è quello in cui si prenda:

$$f(\theta) = k \int \sqrt{\sec \frac{2}{3} \theta} d\theta,$$

cioè quando l'arco s delle linee cercate abbia l'espressione:

$$s = k \int_a^{\theta} \sqrt{\sin \frac{2}{3} \theta} d\theta,$$

con k quantità costante.

Infatti, l'equazione (2) diventa in tal caso:

$$(11) \quad \rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 = k^2 \sin \frac{2}{3} \theta.$$

E la corrispondente equazione (7) è:

$$(12) \quad \frac{d\chi}{d\theta} = (1 + \chi^2) \left(1 - \frac{\chi}{3} \cot \frac{2}{3} \theta \right).$$

Di questa - e conseguentemente dell'equazione (11) - si conosce, in termini finiti, l'espressione dell'integrale generale, come dimostrai in altra mia Nota ⁽¹⁾.

*
* *

Passiamo infine a segnalare un problema pratico nel quale si tratta appunto di determinare una linea piana che, in coordinate polari, è individuata da un'equazione del tipo (1). Esso è il seguente:

Una nave nemica (che si suppone rappresentata da un punto materiale N), partendo da una stazione A, segue una determinata rotta rettilinea AB con moto uniforme, alla velocità v , per raggiungere un'altra stazione B. Affinchè essa, nel suo cammino, non scorga una nostra stazione navale O, esce da questa, nel medesimo istante in cui N parte da A, una nave P, che sprigiona molto fumo, e che avendo per obiettivo di nascondere alla nave N la stazione O, deve mantenersi costantemente allineata con O e con N. Se il moto di P si suppone uniforme, con la velocità V , trattasi di determinare la rotta della nostra nave P.

Supposto di riferire le successive posizioni di P ad un sistema di coordinate polari, aventi O come polo e la direzione OA come asse polare, e supposto d'indicare con a la lunghezza del segmento OA (cioè il raggio vettore del punto A), con φ l'angolo OAB, avremo evidentemente - a causa del teorema dei seni - per ogni posizione dei punti P e N, cioè per ogni valore del tempo t contato dall'inizio dei due movimenti:

$$\frac{vt}{\sin \theta} = \frac{a}{\sin (\theta + \varphi)} \quad , \quad s = Vt,$$

(1) Sulla determinazione delle geodetiche di talune superficie. «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», giugno 1925 (Nota I).

dove s indica la lunghezza dell'arco, contato dal polo O , della traiettoria descritta da P .

Per tale curva si ha quindi:

$$s = \frac{aV}{v} \frac{\sin \theta}{\sin (\theta + \varphi)};$$

o ciò che è lo stesso:

$$s = k \{ \cot \varphi - \cot (\theta + \varphi) \},$$

essendo:

$$k = \frac{aV \sin \varphi}{v}.$$

La traiettoria di P risulta dunque individuata da un'equazione della forma (1), avendosi in questo caso:

$$f(\theta) = -k \cot (\theta + \varphi) \quad , \quad \alpha = 0.$$

La corrispondente equazione (2) sarà quindi:

$$\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 = \frac{k^2}{\sin^2 (\theta + \varphi)}.$$

Cambiando θ in $\theta - \varphi$ (cioè assumendo come asse polare la direzione opposta ad AB , uscente da O), si ha:

$$s = k (\cot \varphi - \cot \theta) \quad , \quad \rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 = \frac{k^2}{\sin^2 \theta}.$$

La trasformata (7) corrispondente a quest'ultima equazione è:

$$(13) \quad \frac{d\chi}{d\theta} = (1 + \chi^2) (1 + 2\chi \cot \theta),$$

ma questa, a differenza della (12) - alla quale è tuttavia molto simile - non sembra si possa integrare con semplici quadrature.

Integrata la (13), l'equazione della traiettoria di P sarebbe:

$$(14) \quad \rho = \frac{k}{\sin^2 \theta} \sqrt{\frac{\chi}{1 + \chi^2}},$$

con la condizione che, per $\theta = \varphi$, deve risultare: $\rho = 0$. Il che significa che nella (14) devesi prendere per χ quel particolare integrale della (13) che si annulla per $\theta = \varphi$.

Matematica. — *Il potenziale semplice, ed il problema di Neumann.* Nota di G. C. EVANS, presentata dal Socio VOLTERRA⁽¹⁾.

1. Cominciamo dal considerare l'integrale

$$(1) \quad v(M) = \frac{a}{\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{MP} dF(\varphi_P) + A,$$

ossia

$$(1') \quad v(r, \theta) = -\frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi - \theta)) dF(\varphi) + A,$$

A costante, il quale rappresenta il potenziale dovuto alla disposizione più generale di masse semplici, distribuite sulla circonferenza di un cerchio di raggio a .

La $F(\varphi)$ è funzione a variazione limitata, non necessariamente continua. Osservando però che nel caso particolare $F(\varphi) = c\varphi$ il potenziale risulta una costante, e che tale costante può essere compresa nella A , noi possiamo supporre con perfetta generalità che la $F(\varphi)$ sia periodica, di periodo 2π .

Inoltre possiamo fissare i valori della $F(\varphi)$ nelle discontinuità, prescrivendo valori *regolari* (e cioè del tipo di quelli di una serie di Fourier), siccome il valore dell'integrale di Stieltjes (1) non dipende dai valori della $F(\varphi)$ nelle discontinuità, purchè la $F(\varphi)$ resti di variazione limitata. In tal modo la $F(\varphi)$, come vedremo, risulterà univocamente determinata, data la $v(r, \theta)$.

Dimostreremo in primo luogo che *condizione necessaria e sufficiente perchè la $v(r, \theta)$, armonica dentro il cerchio, sia data dalla (1) è che esista una costante N tale che si abbia*

$$(2) \quad \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial v(r, \theta)}{\partial r} \right| d\theta < N \quad , \quad r < a.$$

Essendo la $F(\varphi)$ periodica, la (1') è equivalente, per mezzo di un'integrazione per parti, alla seguente:

$$v(r, \theta) = \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2ar \sin(\varphi - \theta)}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi - \theta)} F(\varphi) d\varphi + A,$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 10 settembre 1925.

la quale rappresenta la funzione coniugata alla funzione

$$u(r, \theta) = -\frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - r^2)}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi - \theta)} F(\varphi) d\varphi + B,$$

B costante. Facciamo ora una derivazione rispetto a θ , seguendola con un'integrazione per parti e tenendo conto della periodicità della $F(\varphi)$. Si avrà

$$(3) \quad r \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - r^2) dF(\varphi)}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi - \theta)}.$$

Reciprocamente, dalla (3) si otterrà la (1'), essendo la $v(r, \theta)$ uniforme dentro il cerchio.

Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione armonica sia rappresentabile per mezzo di un integrale (3) è che l'integrale del suo valore assoluto sopra la circonferenza di un cerchio di raggio r resti limitato, $r < a$ ⁽¹⁾. Ma nel caso dato dalla (3) questa condizione è precisamente la (2).

2. Ulteriori applicazioni dei risultati delle note citate ci permettono di constatare i fatti notevoli seguenti:

$$(\alpha) \quad \lim_{r=a} \frac{\partial v(r, \theta)}{\partial r} = F'(\theta), \text{ quasi dappertutto sulla circonferenza}$$

$$r = a \text{ }^{(2)}.$$

$$(\beta) \quad \lim_{r=a} \int_0^\theta \frac{\partial v}{\partial r} d\theta = F(\theta) - F(0), \theta \text{ qualsiasi.}$$

(γ) Condizione necessaria e sufficiente per la (1) è che la $v(r, \theta)$ sia la differenza di due funzioni, ciascuna armonica dentro il cerchio e monotona come funzione della r .

(δ) Condizione necessaria e sufficiente perchè la $F(\varphi)$ sia assolutamente continua, e cioè l'integrale della sua derivata, è che la continuità assoluta dell'integrale $\int_0^\theta \partial v / \partial r d\theta$ sia uniforme, $r < a$.

(1) G. C. EVANS ed H. E. BRAY, «Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences», t. 176, pp. 1042, 1368 et t. 177, p. 241 (1923).

(2) Infatti, $F \partial v(r, \theta) / \partial r$ ha il valore limite $F'(\theta_0)$, se $F'(\theta_0)$ esiste ed è univoca ed il punto (r, θ) tende verso (a, θ_0) rimanendo dentro il campo limitato da due secanti del cerchio che passano per (a, θ_0) .

Nel caso della condizione (δ), la $v(r, \theta)$ vien data dalla formula

$$(4) \quad v(r, \theta) = -\frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi - \theta)) f(\varphi) d\varphi + A,$$

dove si ha $\int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0$ per mezzo di una scelta opportuna della A .

Infatti si ha $F(\varphi) = \int f(\varphi) d\varphi + \text{cost.}$

La (4) risolve il problema di Neumann per la classe di funzioni (δ); i valori $f(\varphi)$ della derivata normale della $v(r, \theta)$ sul contorno sono arbitrarie, purchè sommabili nel senso di Lebesgue (vedi (α)) e tali che $\int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0$. La $v(r, \theta)$ viene determinata tranne una costante arbitraria additiva. Un caso speciale della (δ) è dato dalla classe di funzioni armoniche, le cui derivate rispetto ad r sono funzioni limitate, $r < a$.

La (1) risolve un problema di Neumann generalizzato. Fra le funzioni per le quali il flusso assoluto $\int_0^{2\pi} |\partial v / \partial r| d\theta$ è limitato, $r < a$, esiste una e una sola, tranne una costante additiva, la quale soddisfa alla (β), data la $F(\varphi)$ di variazione limitata, periodica di periodo 2π , e regolare nei punti di discontinuità.

3. È lecito domandare se la classe di funzioni del teorema dell'articolo 1, che risolve il problema di Neumann generalizzato, sia o no più generale di quella che risolve il problema di Dirichlet generalizzato, definita in modo analogo dall'integrale di Poisson-Stieltjes

$$(5) \quad u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi - \theta)} dF(\varphi).$$

Questa formula definisce la classe di funzioni, armoniche dentro il cerchio, che sono la differenza di due funzioni armoniche e non negative⁽¹⁾.

La questione è semplice. Infatti, se $\int_0^{2\pi} |\partial v / \partial r| d\theta < N$, ne segue che $\partial v / \partial r$ è sommabile sul campo a due dimensioni definito dal contorno $r = a$, e quindi che la $v(r, \theta)$ è data da una formula del tipo

$$(6) \quad v(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi - \theta)} g(\varphi) d\varphi,$$

ove la $g(\varphi)$ è sommabile⁽²⁾. Ma la (6) è un caso speciale della (5).

(1) Vedi le Note citate.

(2) È un teorema delle Note citate.

Si posa dunque una questione ulteriore. Sono le funzioni armoniche, di carattere, si può dire, *fisico* - e cioè date da una formula (5) - le sole possibili? La risposta è negativa. Ci sono per esempio delle funzioni che sono le derivate rispetto a θ delle funzioni (5), le quali non sono del tipo (5). Queste si danno per mezzo dell'equazione

$$(7) \quad u(r, \theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} r^n (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta),$$

nella quale le α_n, β_n sono delle costanti dell'ordine di grandezza di una potenza positiva di n . Ma ci sono delle funzioni, armoniche dentro il cerchio, le quali non sono derivate di qualsiasi ordine di una funzione del tipo (5). Si consideri per esempio la funzione data dalla (7) se le α_n, β_n sono dell'ordine di grandezza delle quantità $b \sqrt[n]{n}$, $b > 1$.

Non è necessario di parlare dell'applicazione a questi risultati del metodo della trasformazione conforme. Questa si riferisce ai campi generali semplicemente connessi. Ma da un altro canto, si può estendere questa trattazione agli spazi di dimensione > 2 , e questa estensione costituisce una bella applicazione della teoria delle funzioni di linee e delle equazioni integrali. Infatti i limiti delle funzioni assolutamente continue, che si debbono considerare, risultano funzioni di linee additive, le quali non sono funzioni additive di insiemi di punti.

Astronomia. — *Orbita del sistema binario OΣ 535 dedotta da misure interferometriche.* Nota di MENTORE MAGGINI presentata dal Socio CORRISP. AZEGLIO BEMPORAD⁽¹⁾.

Il sistema binario OΣ 535 = βGC 10829 AB costituisce la componente principale della doppia Σ 2777 = δ *Equulei*; esso è uno degli oggetti più difficili a misurare col micrometro, giacchè nelle epoche di massima separazione le sue componenti non distano più di tre decimi di secondo, mentre per una gran parte della sua orbita può appena distinguersi allungato coi più grandi strumenti. Questa difficoltà all'osservazione ha fatto sì che solo da pochi anni se ne sia potuta ottenere un'orbita soddisfacente. I primi elementi, dedotti dal Wroublewsky e dal See, dettero un periodo di rivoluzione di circa 11.4 anni, ma nel 1901 l'Hussey, avendo potuto seguire il moto del sistema col grande rifrattore dell'Osservatorio Lick anche nelle posizioni più serrate, riconobbe che il periodo doveva essere ridotto alla metà, cioè 5.7 anni, valore adottato di poi anche da Aitken. Con ciò la OΣ 535 veniva ad essere il sistema dotato del periodo di rivoluzione il più corto conosciuto. Nel prospetto seguente riporto i vari elementi ora citati.

(1) Pervenuta all'Accademia il settembre 1925.

Autorità	T	P	<i>e</i>	<i>a</i>	ω	<i>i</i>	Ω	Fonte
Wroublewsky	1892.03	11.478	0.20	0".41	153°.4	81°.8	24°.1	A. N. 2771
See	1892.80	11.45	0.14	0.45	180.0	79.1	22.2	A. N. 3290
See	1892.80	11.45	0.17	0.45	180.0	79.0	22.2	Stellar systems, v. I.
Hussey	1901.18	5.70	0.54	0.25	181.0	74.5	24.1	Lick Publ., vol. V.
Lewis	1901.25	5.70	0.36	0.31	159.4	77.3	19.3	Mem. Roy. Soc. LVI.
Aitken	1901.35	5.70	0.39	0.27	164.5	81.0	21.0	Lick Publ., vol. XII.

Ho voluto vedere fino a qual punto l'Interferometro applicato al rifrattore Merz di Catania permettesse di eseguire misure su questo sistema ed a tale scopo ho cercato di osservarlo con assiduità, insieme ad altri del pari meritevoli (β GC 314 = 13 *Ceti*; β GC 11222 = α *Pegasi*) durante le misure correnti di doppie. Dato lo splendore dell'astro, ho potuto diminuire la lunghezza d'onda effettiva della sua luce per mezzo di un filtro azzurro, nelle quali circostanze, oltre a venire eliminato l'effetto dannoso della dispersione atmosferica, il nostro Interferometro rende possibile la misura fino a 0".15; allora il sistema rimane inaccessibile soltanto in poche posizioni che, del resto, sono inaccessibili a qualsiasi strumento.

Dall'epoca delle prime misure, che eseguii nell'autunno del 1922, ad oggi, il compagno ha compiuti circa i $\frac{4}{5}$ della intera sua rivoluzione, così che fino da ora è possibile calcolarne un'orbita, basata tutta su valori interferometrici.

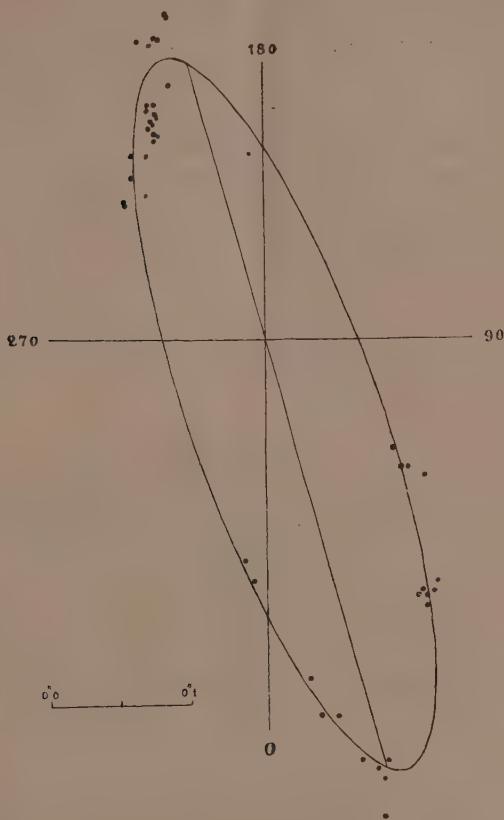
Perequando tanto gli angoli che le distanze osservate, ho ottenuta la seguente orbita apparente:

Lunghezza dell'asse maggiore	0".54
Lunghezza dell'asse minore	0".13
Angolo di posizione dell'asse maggiore	201°
Angolo di posizione del periastro	195°
Distanza della stella dal centro	0".06

Da cui, col metodo di Zwiers, ho dedotto gli elementi:

$$\begin{aligned}
 P &= 5.67 \text{ anni} \\
 T &= 1924.158 \\
 e &= 0.22 \\
 a &= 0".27 \\
 \omega &= 156°.0 \\
 i &= 75.2 \\
 \Omega &= 21.8 \\
 \text{Moto retrogrado.}
 \end{aligned}$$

La figura qui unita dà un'idea dell'orbita apparente di questo sistema ed insieme mostra quanto gli elementi trovati soddisfano le mie osservazioni.



Dal confronto con gli elementi calcolati dagli altri osservatori, si vede che l'eccentricità 0.22, dedotta in base alle misure interferometriche, è più piccola di quella ottenuta da Hussey, Lewis ed Aitken e si avvicina ai valori del Wroublewsky e del See, mentre la lunghezza del semiasse maggiore coincide con quella trovata da Aitken. Anche la inclinazione è minore di quella che risultò ad Aitken, il che fa sì che l'orbita apparente da me ottenuta sia meno schiacciata. Questi due fatti sono probabilmente dovuti ad una causa comune, già rilevata altra volta ⁽¹⁾, all'essere cioè le distanze misurate con l'Interferometro, quando il sistema è molto serrato, leggermente superiori a quelle micrometriche, non intervenendo, nel primo caso,

(1) Cfr. in questi « Rendiconti », vol. XXXIII, serie 5^a, 1^o sem., fasc. 5^o, 1924.

i fenomeni di diffrazione; infatti nelle posizioni intorno al periastro ed in quelle del secondo e quarto quadrante, le distanze da me ottenute furono sempre più grandi di quelle predette dall'effemeride di Aitken.

La durata della rivoluzione risulta inferiore di tre centesimi di anno a quella ammessa dagli osservatori più recenti; l'epoca del passaggio al periastro coincide con l'epoca che si otterrebbe dagli elementi di Aitken, ma questo accordo fra i tempi è solo apparente, perchè gli angoli di posizione dei due periastri non sono i medesimi.

Con gli elementi dell'orbita ora trovati e con la parallasse trigonometrica assoluta del sistema, ammessa da Jackson⁽¹⁾ in base alle determinazioni di tre diversi osservatori, cioè:

$$\pi_t = 0''.053,$$

si deduce come somma delle masse delle componenti e come grandezza assoluta M_t della componente A:

$$(m_A + m_B) = 4.1 \quad M_t = + 3.9.$$

D'altra parte, per questo stesso sistema, il prof. G. Abetti⁽²⁾ ha determinato la classe spettrale e la parallasse spettroscopica col riflettore prismatico di Arcetri, ottenendo rispettivamente:

$$F_{4n} \quad \pi_s = 0''.029,$$

da cui la grandezza assoluta della componente A è risultata:

$$M_s = + 2.6.$$

Per le considerazioni d'ordine fisico che possono scaturire dal confronto dei valori trigonometrici e spettroscopici, rimando alla Nota del prof. Abetti.

Chiuderò questa mia Nota riportando il medio degli O — C che forniscono le misure interferometriche che ho potuto eseguire l'estate scorsa confrontate con la mia orbita:

$$+ 0^{\circ}.7 \quad - 0''.03.$$

Sarebbe interessante misurare questo sistema in tutte le posizioni della sua orbita, anche nelle più strette, quando la distanza fra le componenti è di soli $0''.06$, ciò che dovrebbe essere possibile con l'Interferometro applicato al riflettore di m. 2.50 di Monte Wilson.

(1) GREENWICH, *Catalogue of double stars*, p. XII, 1921.

(2) Cfr. questi « Rendiconti », vol. XIII, serie 5^a, 2^o sem., 1924.

Astrofisica. — *L'interferometro oculare.* Nota di V. RONCHI, presentata dal Socio A. GARBASSO ⁽¹⁾.

Constatato il successo dei reticoli rettilinei come interferometro stellare, sia nelle prove su stelle artificiali ⁽²⁾, sia sul cielo ⁽³⁾, abbiamo subito pensato alla opportunità di usare un tipo di reticolo più adatto allo scopo, più *naturale*.

Infatti, come appare anche dai risultati esposti in un'altra Nota ⁽⁴⁾, i reticoli rettilinei trovano il loro naturale impiego con lenti e strumenti a orlo rettangolare e nello studio, diciamo così, di oggetti ad una sola dimensione, come ad esempio le righe spettroscopiche ⁽⁵⁾. Ma per la risoluzione delle stelle doppie e in generale per l'esame di strutture puntiformi o comunque a due dimensioni, la forma più adatta per le lenti è quella circolare, e quindi anche per i reticoli.

Basti notare che nell'esame delle stelle doppie con reticoli rettilinei, occorre ruotarli attorno all'asse dell'obbiettivo; perciò è prevedibile subito che un reticolo, i cui tratti presentano contemporaneamente tutte le orientazioni in un piano, debba mostrare tutto insieme quello che i reticoli rettilinei mostrano successivamente durante la rotazione.

Queste considerazioni sono rimaste sospese in attesa di un reticolo circolare con 30 tratti per mm., frequenza sufficiente per eseguire delle prove in condizioni assai favorevoli. I risultati che riferiamo sono stati ottenuti osservando stelle artificiali con un obbiettivo di 28.5 cm. di distanza focale e di apertura variabile da 3 a 49 mm. per portarsi ora al disopra ora al disotto del potere risolutivo necessario per la coppia esaminata. La quale era la stessa che aveva servito nelle esperienze con reticoli rettilinei, cioè composta di due forellini uguali di 0.022 cm. di diametro e coi centri distanti di cm. 0.093. Sono state però osservate anche altre coppie con distanze diverse e coi forellini di diametro diverso. La distanza tra l'obbiettivo e le stelle poteva raggiungere 45 m. Il reticolo era sopra un supporto mobile mediante viti micrometriche secondo due direzioni ad angolo retto fra loro e rispetto all'asse dell'obbiettivo e scorrevole sopra un banco parallelo a quest'asse.

Quando un obbiettivo perfetto è attraversato da un'onda luminosa piana e normale all'asse (o anche sferica, purchè col centro sull'asse), ne emerge

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Firenze. Arcetri.

(2) V. RONCHI, «Rend.», vol. I, serie 6^a, I^o sem., fasc. II, giugno 1925, p. 659.

(3) V. RONCHI, «Rend.», vol. I, serie 6^a, II sem., fasc. 7-8, 1925, p. 257.

(4) V. RONCHI, «Nuovo Cimento», nuova serie, 3^o trimestre 1925.

(5) V. RONCHI, «Nuovo Cimento», nuova serie, 1^o trimestre 1925.

un'altra onda sferica col centro nel fuoco (o in un altro punto dell'asse), la quale, se raccolta sopra uno schermo, pure normale all'asse, vi forma un disco luminoso di diametro proporzionale alla sua distanza x dal centro dell'onda. Se alla distanza y dallo stesso centro si pone un reticolo circolare di frequenza m (= numero di cerchi per unità di misura contata lungo il raggio) normale all'asse e centrato, sullo schermo si formano delle frange d'interferenza circolari, concentriche e coi raggi in progressione aritmetica (o, come diremo brevemente, *equidistanti*) con una frequenza data dalla formula $M = mx/y$, la stessa che vale per i reticoli rettilinei.

Riservandoci di tornare in seguito con maggiori dettagli sull'ottica di questo fenomeno, per ora noteremo soltanto che le limitazioni a cui va soggetta la frequenza del reticolo per formare le frangie sono le stesse come per quelli rettilinei. Cioè per $m \geq 2\alpha/\lambda$, essendo α la semiapertura angolare dell'obiettivo, non si hanno più frangie; si hanno in una parte del campo per m compreso tra $2\alpha/\lambda$ e α/λ ; per m inferiore o uguale a quest'ultimo valore si hanno in tutto il campo. In generale l'aspetto che questo assume con un reticolo circolare si può pensare ottenuto ruotando nel suo piano attorno all'asse la figura che si ottiene con un reticolo rettilineo di ugual frequenza, ridotto ad una strisciolina elementare, normale ai tratti.

Ne segue che, per $m \geq \alpha/\lambda$, la frangia passante per il centro viene a formare un circoletto, in cui è concentrata l'intensità luminosa che per le altre frangie è distribuita in una corona circolare. In altri termini, l'immagine sullo schermo o anche quella che si osserva ad occhio guardando l'obiettivo di dietro il reticolo consta di un dischetto luminoso centrale, contornato da anelli luminosi ed oscuri concentrici ed equidistanti; così si vede l'immagine della stella e si hanno le frangie d'interferenza.

Se il reticolo non è perfettamente centrato o se la stella è un po' discosta dall'asse, la figura interferenziale, pur cambiando posizione, non si deforma in modo sensibile, purchè gli spostamenti non siano grandi. Invece se il reticolo è molto scentrato, il campo ha l'aspetto come con un reticolo rettilineo coi tratti normali all'asse e alla normale abbassata su questo dal centro del reticolo circolare; salvo qualche deformazione che va sempre più riducendosi al crescere della scentratura. D'altra parte se la stella osservata è molto lontana dall'asse, le frangie, in più del caso precedente, subiscono le deformazioni dovute all'astigmatismo dell'obiettivo.

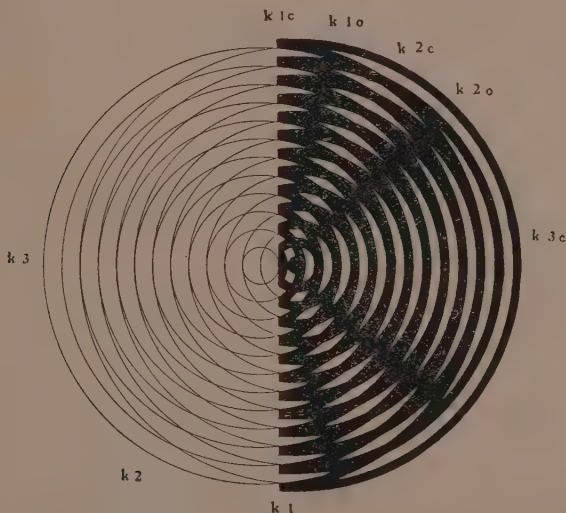
Se però si hanno due stelle contemporaneamente, così poco distanti che l'obiettivo la risolva appena nella visione ordinaria coll'oculare più conveniente, con un reticolo circolare disposto come si è detto si hanno insieme due figure interferenziali uguali e un pochino spostate una rispetto all'altra. Cioè si vedono le immagini delle due stelle come due circoletti brillanti, circondate da due sistemi di cerchi concentrici, equidistanti e di ugual frequenza; e un sistema è spostato sull'altro di un tratto uguale alla distanza delle immagini centrali.

Ora, come è stato dimostrato in precedenza ⁽¹⁾, due reticoli circolari in queste condizioni danno luogo a delle frangie di combinazione di forma iperbolica, coi fuochi nei due centri; e perciò, data la piccolezza della loro distanza focale, i rami sono sensibilmente rettilinei e confusi cogli assintoti. L'angolo θ che un ramo di iperbola fa così colla congiungente i centri è dato da

$$\cos \theta = (k - 1)/md \quad (k = 1, 2, \dots)$$

essendo k il numero d'ordine della frangia considerata, a cominciare da quella degenerata in una retta che è normale nel punto di mezzo alla congiungente i due centri; d la distanza di questi e m la comune frequenza dei reticoli.

Questa formula vale per le frangie luogo dei punti di intersezione dei cerchi considerati come linee; quando invece il reticolo è costituito da anelli chiari ed oscuri di uguale spessore o quasi, bisogna distinguere fra le frangie di *congiunzione* o *chiare* e quelle di *opposizione* o *oscur*e (corrispondenti ai massimi e ai minimi di nettezza rispettivamente, nelle misure coi reticoli rettilinei).



La formula si scinde così in due, come mostrò facilmente l'unita figura:

$$\cos \theta_{2k-2} = \frac{2k-2}{2md}, \quad \cos \theta_{2k-1} = \frac{2k-1}{2md}$$

valevoli rispettivamente per le frangie chiare ed oscure.

(1) V. RONCHI, Questi « Rend. », XXXIII, serie 5ª, 1º semestre 1924, I, p. 23,

Conoscendo θ , la distanza angolare γ delle due stelle, supposte a distanza infinita, essendo uguale a d/f (f = distanza focale dell'obiettivo) è espressa da

$$\gamma = \frac{2k-2}{2mf \cos \theta_{2k-2}} \quad \gamma = \frac{2k-1}{2mf \cos \theta_{2k-1}}$$

formule identiche a quelle trovate per i reticoli rettilinei, tenuto conto che l'angolo allora indicato con φ è proprio complementare di θ .

Ne segue che i reticoli circolari hanno tutte le proprietà di quelli rettilinei, col duplice vantaggio in più di *vedere le stelle* e di vedere tutte insieme le direzioni di massima e di minima nettezza delle frangie; in altri termini riuniscono in sé le proprietà dell'oculare e dell'interferometro a reticolo rettilineo.

Dobbiamo notar subito che le frangie di congiunzione e di opposizione, mentre sono visibilissime nella figura riportata e in generale tutte le volte che si sovrappongono due reticoli materiali o comunque illuminati o formati di luce coerente ⁽¹⁾, sono poco visibili quando, come in questo caso; i reticoli sono dovuti a due onde distinte. Però una volta individuate le frangie iperboliche, possiamo spostare il centro del reticolo secondo le loro direzioni e controllare, come si è detto, la nettezza delle frangie utilizzando il reticolo come se fosse rettilineo.

Inoltre la distanza delle immagini delle due stelle varia in modo inversamente proporzionale a y e s'invverte per $y = 0$. In altri termini il reticolo circolare funziona come un oculare divergente quando è intrafocale, come uno convergente quando è ultrafocale; e in ambedue i casi l'ingrandimento è variabile a piacere entro certi limiti.

Cosicchè non solo possiede riunite le proprietà di un oculare e di un reticolo rettilineo, ma le possiede entrambe in grado superiore.

Per queste ragioni ci sembra conveniente assegnare a un reticolo circolare così usato il nome di *interferometro oculare*.

Non insistiamo nella descrizione delle prove eseguite, che del resto hanno confermato del tutto le previsioni. Ma ci riserbiamo, come si è detto, di tornare sull'argomento più estesamente per chiarire con maggiori particolari, il funzionamento ottico del dispositivo, per dimostrarne le numerose proprietà, a cui ora abbiamo accennato, sia col calcolo sia con una conveniente documentazione fotografica, e infine per riferire sul risultato delle prove che ci ripromettiamo di eseguire appena possibile nel campo astronomico.

(1) V. RONCHI, *La prova dei sistemi ottici*, Bologna, Zanichelli, 1925.

Fisica. — *Effetto del legame chimico sull'energia dei livelli intratomici.* Nota di RITA BRUNETTI presentata dal Socio A. GARBASSO ⁽¹⁾.

1. Se un elemento viene legato in molecola, le discontinuità d'assorbimento ad alta frequenza subiscono uno spostamento verso le lunghezze d'onda brevi. In base ai risultati ottenuti con composti in cui cloro, iodio e solfo presentano varia valenza si è pensato che la valenza sia in qualche modo connessa col fenomeno. Le osservazioni su composti di fosforo e potassio e sulle forme allotropiche di fosforo e solfo, hanno in seguito diretta l'attenzione sulla struttura della molecola e del cristallo di cui l'elemento fa parte ⁽²⁾.

Nella presente Nota mi propongo dimostrare che le due interpretazioni fin qui vaghe del fenomeno, possono esser messe in valore per una descrizione teorico empirica del meccanismo a cui esso è dovuto almeno nei composti polari, pur di tener conto della diversa funzione che hanno le varie parti della struttura fina che si trova al bordo delle discontinuità d'assorbimento d'alta frequenza.

2. Ricordiamo che precisando alcune vedute del Kossel in una precedente Nota ⁽³⁾ si è stabilito che l'ultimo minimo di densità dopo il bordo della discontinuità ha il significato di limite vero di una serie ad alta frequenza, mentre i minimi precedenti rappresentano posizioni molto prossime a righe semiottiche invertite. Ora la variazione di posizione del limite dipende dalla variazione che il lavoro necessario a strappare un elettrone dall'orbita di convergenza della serie e portarlo all'infinito senza imprimergli velocità, subisce in dipendenza della struttura molecolare e cristallina, mentre le altre, pel meccanismo dell'assorbimento secondo Bohr, corrispondono all'influsso che la stessa struttura ha sopra due orbite connesse con le radiazioni invertite, quella di partenza e quella di arrivo dell'elettrone.

È dunque naturale occuparci anzitutto del comportamento del limite vero della serie e studiare le condizioni in cui si trova l'elettrone su una delle orbite interne dell'atomo, in confronto con le condizioni stesse per l'atomo legato in molecola.

(1) Pervenuta all'Accademia il 21 settembre 1925.

(2) M. SIEGBAHN, *Spektroskopie der Röntgenstrahlen*, Berlin, 1924, p. 137; O. STELLING, « ZS. f. An. u. Allg. Chemie », 131, 48, 1923; A. E. LINDH, « Arkiv för Mat. Astr. och Fysik », 18-14-12, 1924.

(3) R. BRUNETTI, « Rend. R. Acc. Lincei », S. VI, 2, ottobre, 1925.

Il lavoro necessario per portare un elettrone dalla propria orbita all'infinito senza imprimergli velocità è per l'atomo normale, trascurando la correzione relativistica ⁽¹⁾,

$$W = R \cdot h \cdot \frac{Z^{*2}}{n^2}$$

ove R è il numero di Rydberg, h la costante di Planck, n il « numero quantico principale » dell'orbita considerata, Z^* il « numero atomico efficace » dell'elemento. Il numero atomico efficace dipende: 1° dal numero atomico vero Z ; 2° dagli elettroni che si trovano sulla stessa orbita n dell'elettrone luminoso; 3° dagli elettroni che si trovano su orbite più vicine al nucleo; 4° da quelli che si trovano su orbite più lontane.

I ($Z - 1$) elettroni dell'atomo esercitano repulsioni sopra quello luminoso, cioè agiscono in senso contrario a quello del nucleo di carica positiva Ze . Perciò Z si può considerare diminuito di un valore α (numero di schermo interno) comprendente le azioni degli elettroni di cui ai numeri 3 e 4; e di un valore β (numero di schermo esterno) per gli elettroni del numero 4. Se $\alpha + \beta = \epsilon$, che chiameremo numero di schermo totale, si avrà

$$(1) \quad W = R \cdot h \cdot \frac{(Z - \epsilon)^2}{n^2}.$$

3. Nella formazione di un composto polare dobbiamo distinguere due processi che particolarmente interessano il problema che stiamo trattando:

a) trasformazione degli elementi in ioni per aggiunta o sottrazione di uno o più elettroni;

b) aggregazione di due o più ioni in un reticolo cristallino.

La prima trasformazione implica essenzialmente una variazione del numero di schermo esterno da β in β' ; ma non si può affermare che il numero di schermo interno rimanga inalterato a causa di eventuali cambiamenti di volume dell'interno dell'atomo; quindi supporremo che α si muti in α' . Poniamo $\alpha' + \beta' = \epsilon'$.

Il processo di aggregazione degli ioni in un reticolo rende necessaria la introduzione di un ulteriore numero di schermo, γ , che potremo chiamare molecolare e che corrisponde a una nuova variazione fittizia di Z determinata dal complesso di azioni attrattive e repulsive da parte degli ioni esterni su quello considerato.

(1) Secondo Landé i livelli X corrispondono ai livelli degli spettri d'arco dei metalli alcalini. Questa classificazione suggestiva, perchè stabilisce una continuità fra i livelli X e quelli ottici, fornisce un principio di selezione soddisfacente, offre modo di giustificare l'intensità delle radiazioni X e toglie il carattere di necessità che in precedenza aveva la rappresentazione relativistica dell'energia degli stati quantici interni dell'atomo.

Per un ione introdotto nel reticolo cristallino si avrà allora

$$(2) \quad W' = R \cdot h \cdot \frac{(Z - \epsilon' - \gamma)^2}{n^2}.$$

La (1) e la (2) si riferiscono all'elemento e al relativo ione non libero; per dedurre da esse la variazione complessiva del numero di schermo nel passaggio dell'elemento dallo stato libero a quello molecolare in composto polare, poniamo $W = h\nu$, $W' = h\nu'$; con calcolo semplice otteniamo

$$(3) \quad n \sqrt{\frac{\nu}{R}} = Z - \epsilon, \quad n \sqrt{\frac{\nu'}{R}} = Z - \epsilon' - \gamma$$

da cui

$$\epsilon = Z - n \sqrt{\frac{\nu}{R}}, \quad \epsilon' + \gamma = Z - n \sqrt{\frac{\nu'}{R}}$$

e per differenza

$$(4) \quad \epsilon' - \epsilon + \gamma = n \left(\sqrt{\frac{\nu}{R}} - \sqrt{\frac{\nu'}{R}} \right).$$

4. Per discriminare fra la variazione del numero di schermo molecolare, γ , e quella degli altri numeri di schermo, osserviamo che l'elettrone di cui si tratta al momento di essere strappato dalla sua orbita, si trova sotto l'azione del potenziale elettrostatico ΔV , creato dalle cariche ioniche esterne allo ione considerato e regolarmente distribuite ai vertici del reticolo spaziale. Per portare all'infinito un elettrone che si trovi entro lo ione bisognerà compiere un lavoro $e \cdot \Delta V$, che nel caso specifico si aggiunge a quello necessario per rompere l'orbita a cui l'elettrone appartiene.

Quando si conosca il potenziale del reticolo cristallino, si può allora coll'aiuto della relazione di Einstein calcolare lo spostamento di frequenza del limite della serie, $\Delta\nu = \frac{e \cdot \Delta V}{h}$, dipendente dalla presenza del solo reticolo cristallino, e di qui ottenere facilmente il valore dello schermo molecolare. Infatti, se supponiamo per un momento che lo ione del cristallo sia sostituito dall'atomo, *coeteris paribus*, si avrà

$$W'' = R \cdot h \cdot \frac{(Z - \epsilon - \gamma)^2}{n^2}$$

o anche per $W'' = h\nu''$ in prima approssimazione

$$n^2 \frac{\nu''}{R} = (Z - \epsilon)^2 - 2(Z - \epsilon)\gamma$$

e per la prima delle (3)

$$n^2 \frac{v'' - v}{R} = -2n \sqrt{\frac{v}{R}} \cdot \gamma$$

da cui

$$(5) \quad \gamma = -n \cdot \frac{v'' - v}{2R \sqrt{\frac{v}{R}}} = -n \frac{\Delta v}{2R \sqrt{\frac{v}{R}}}.$$

Nelle formule precedenti γ è supposto un numero algebrico il cui segno dipende da quello di Δv e quindi di ΔV . Se $\Delta V > 0$, per portare un elettrone dal punto dato all'infinito si compie un lavoro positivo. In tal caso W'' e quindi v'' è più grande che per l'elemento libero da legame molecolare, deve essere $Z - \epsilon - \gamma > Z - \epsilon$, cioè $\gamma < 0$. L'inverso si verificherà quando $\Delta V < 0$.

5. La determinazione di ΔV si farà in prima approssimazione mediante la relazione di Born⁽¹⁾

$$(6) \quad \Delta V = a \cdot \frac{x - 1}{x} \cdot \frac{pe}{\delta} \text{ U. E. S.}$$

ove a è una costante caratteristica del tipo di reticolo cristallino calcolabile col metodo del Madelung⁽²⁾, x un numero ricavato dalla compressibilità del cristallo, δ la distanza fra gli ioni del reticolo in cm. dedotta dalla analisi coi raggi X della struttura del cristallo, pe la carica ionica in U. E. S.

Quando i dati relativi a questa formula manchino si può ricorrere alla relazione termochimica⁽³⁾ di Born e Fajans

$$(7) \quad U_{RX} = Q_{RX} + S_R + J_R + S_X - E_X$$

ove U_{RX} è l'energia del reticolo che contiene gli ioni R e X espressa in calorie e riferita a una grammo-molecola, Q_{RX} è il calore di formazione del solido RX, S_R e S_X i calori di sublimazione dei solidi R e X, J_R il lavoro di ionizzazione di R, E_X l'affinità elettrochimica di X.

U_{RX} sarà ridotto in U. E. S. volt e riferito a una molecola mediante la relazione

$$(7') \quad \Delta V = \frac{j \cdot Q_{RX}}{N \cdot e} \text{ U. E. S.}$$

(1) *Atomtheorie des festen Zustandes*, II Aufl., Berlin, 1923, p. 745.

(2) « Phys. ZS. », 19, 524, 1918.

(3) Loc. cit., p. 748. La formula sopra scritta è puramente figurativa; sono evidenti le ipotesi sulle proprietà degli elementi ideali R e X cui essa si riferisce.

ove N è il numero di Avogadro, j l'equivalente meccanico per la conversione di *erg* in calorie.

Il ΔV ottenuto dalla (7) esprime il lavoro per scindere la molecola, cioè trasportare all'infinito uno ione di valenza p . Per avere il lavoro necessario a portar via un solo elettrone prossimo al nucleo si dividerà per p il valore del potenziale ottenuto.

6. Il valore di $\epsilon' - \epsilon$ si ricava dalle (4) e (5)

$$(8) \quad \epsilon' - \epsilon = n \left(\sqrt{\frac{v}{R}} - \sqrt{\frac{v'}{R}} - \frac{\Delta v}{2R \sqrt{\frac{v}{R}}} \right).$$

La variazione del numero di schermo totale per la soia trasformazione atomo \rightarrow ione proviene, come si è detto, da aggiunta o sottrazione di uno o più elettroni all'atomo, ma è intuitivo pensare collegato a questo un processo di dilatazione o contrazione delle schiere elettroniche che circondano il nucleo, a seconda che la carica negativa esterna supera quella positiva del nucleo o le è inferiore.

Ora aumento del numero di schermo totale, $\epsilon' - \epsilon > 0$, corrisponde all'aggiunta di un elettrone con o senza variazione del volume racchiuso dalle schiere elettroniche o sottrazione di un elettrone con prevalenza dell'effetto di contrazione. Diminuzione del numero di schermo totale, cioè $\epsilon' - \epsilon < 0$, significa sottrazione di un elettrone con o senza contrazione delle schiere elettroniche o aggiunta di un elettrone con prevalere di una azione di dilatazione del sistema elettronico dello ione.

Si deduce di qui che il segno di $\epsilon' - \epsilon$ ci offre un mezzo per decidere circa il volume dello ione in confronto con quello dell'atomo.

È probabile che in uno dei tanti modelli atomici escogitati si possa ricavare da $\epsilon' - \epsilon$ indicazioni quantitative sulla variazione di volume dell'atomo nel passaggio allo stato di ione. Queste considerazioni escono tuttavia dai limiti che ci siamo proposti.

Anche l'esame di casi concreti, non può trovar posto nel presente lavoro.

7. A complemento di quanto si è detto sin qui, ricordiamo che le righe di emissione della regione X pura risultano dai salti elettronici fra due livelli intraatomici; le energie di questi nella molecola differiscono da quelli dell'atomo per quantità derivanti dalla variazione del numero di schermo totale e dall'aggiunta del numero di schermo molecolare. Ora anche se quest'ultimo si considera prossimamente costante entro lo ione, il primo andrà crescendo dall'interno verso l'esterno. Segue di qui che le righe d'emissione dello spettro X dell'elemento semplice saranno spostate rispetto alle stesse per l'elemento legato in molecola. Questi spostamenti, risultando

tuttavia da differenze di valori con variazioni vicine e a segno concorde, debbono essere inferiori a quelli segnalabili per i limiti delle serie corrispondenti ai due livelli impegnati.

Questo ordine di idee si accorda coi recentissimi risultati sperimentali ottenuti da E. Bäcklin confrontando la posizione delle righe α e β dello spettro K di Al, Si, Ph, e S con la posizione delle stesse radiazioni per alcuni composti di questi elementi. Gli spostamenti notati per le righe sono circa $1/10$ di quelli osservati per la banda K relativa⁽¹⁾.

È invece da pensare, così come dice l'esperienza, che le righe semi-ottiche, e quindi i minimi di densità che precedono il limite delle serie, possano subire uno spostamento più notevole di quello che subiscono le righe X pure. Per esse infatti, mentre il livello finale rimane quello del limite della serie con le eventuali variazioni dovute al legame molecolare, il livello iniziale ottico non è più quello dell'atomo normale, ma quello dello ione positivo o negativo in cui l'atomo entrando a far parte della molecola si è trasformato. Disgraziatamente non esiste materiale sperimentale adatto ad appoggiare le considerazioni che a questo proposito potrebbero farsi.

Se col presente saggio di interpretazione dei fenomeni che le discontinuità d'assorbimento continuo presentano, non mi posso illudere di aver risolto in modo esauriente il problema che essi propongono, mi pare di aver almeno indicato concetti che possono riuscire di utile guida a ulteriori ricerche.

I miei ringraziamenti al prof. E. Fermi per la suggestiva discussione a cui si è prestato circa le conclusioni di questo lavoro.

Fisica. — *Sull'orientamento in un campo elettrico o magnetico costante nella ipotesi della anisotropia molecolare.* Nota⁽¹⁾ di A. PONTREMOLI presentata del Socio CORBINO⁽⁴⁾.

Si abbia un gas costituito da molecole con la simmetria di un ellissoide di rotazione per le proprietà dielettriche o diamagnetiche. L'energia potenziale di una molecola in un campo (elettrico o magnetico) è data in valore assoluto dal semiprodotto scalare del momento acquistato dalla molecola stessa per l'intensità del campo, in generale diverso dal campo esterno

(1) «ZS. f. Phys.», 33, 547, 1925. Vedi anche i risultati di B. RAY, «Phil. Mag.», 50, 505, 1925, per S e composti (righe $K\alpha_1$ e $K\alpha_2$).

(2) «Phys. Rev.», 16, 202, 1920.

(3) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica Complementare della R. Università di Milano.

(4) Pervenuta all'Accademia l'8 ottobre 1925.

per l'azione delle molecole circostanti, ma diretto come esso per ragioni di simmetria.

Se W è tale energia potenziale, H il campo effettivamente agente, θ l'angolo che l'asse polare della molecola forma col campo, avremo

$$W = -\frac{I}{2} (P \cos^2 \theta + E \sin^2 \theta) H^2$$

ove $P \cos \theta$ ed $E \sin \theta$ sono i momenti che la molecola acquisterebbe rispettivamente lungo l'asse polare e nella direzione ad esso normale (nel piano dell'asse e di H) per l'azione di un campo orientante unitario diretto come H . Naturalmente P ed E avranno valori diversi secondo che si sottopone la stessa molecola ad un campo elettrico o magnetico e, per le imposte ragioni di simmetria, sarà sempre $P > E$.

Considerando come l'agitazione termica si opponga all'orientamento completo, che si otterrebbe per il disporsi delle molecole in modo che sia minima la loro energia potenziale rispetto ad H , e applicando la formula di Boltzmann per ricavare la nuova distribuzione statistica che si forma per la presenza di questo campo orientante, il Langevin⁽¹⁾ ha formato la base di quella teoria sulla birifrangenza elettrica e magnetica che ancora oggi vale, malgrado alcune discrepanze sperimentali, le quali spesso si presentano quando si vogliono applicare a' liquidi conseguenze teoriche della teoria cinetica dei gas e provengono dalla pratica non trascurabilità delle relazioni mutue fra le molecole.

In generale, se avremo N molecole per unità di volume, il numero dN di quelle il cui asse polare forma con H un angolo compreso tra θ e $\theta + d\theta$, sarà dato, per un campo costante, da

$$(1) \quad dN = N \frac{e^{\frac{(P-E) \cos^2 \theta}{2kT} H^2} \cdot \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi e^{\frac{(P-E) \cos^2 \theta}{2kT} H^2} \cdot \sin \theta d\theta}$$

ove T è la temperatura assoluta del gas e k la costante di Boltzmann.

In assenza del campo orientante la distribuzione è isotropa, sarà $dN_0 = \frac{N}{4\pi} d\omega$, se dN_0 è il numero di molecole nell'unità di volume il cui asse si trova nell'angolo solido $d\omega$; fissiamo come asse di riferimento la stessa direzione di H , avremo facilmente

$$(2) \quad dN_0 = \frac{N}{2} \sin \theta d\theta$$

come si ricava anche dalla (1) per $H = 0$.

(1) *Le Radium*, t. VII, p. 249, 1910.

Ora può porsi il problema: esiste una particolare direzione θ_0 per cui $dN = dN_0$? Ossia esiste una direzione tale che il numero di molecole per unità di volume, aventi i rispettivi assi polari nell'angolo compreso tra θ_0 e $\theta_0 + d\theta$, non muti con e senza il campo orientante?

Dal punto di vista fisico la risposta è immediata e si può prevedere che θ_0 dovrà diminuire col crescere di H o col diminuire della temperatura assoluta; tuttavia la nota preponderanza della agitazione termica sull'azione orientante dei campi esterni (se si prescinde dalle formulazioni quantistiche che vorrebbero l'orientamento completo, ma che non sono ancora a punto per questo genere di applicazioni) fa presumere che, almeno in prima approssimazione, dovrà esistere un angolo costante e tale che $dN = dN_0$, qualunque sia l'intensità del campo orientante.

Poniamo dunque, eguagliando la (1) alla (2)

$$\frac{N}{2} \sin \theta d\theta = N \frac{e^{\frac{(P-E) \cos^2 \theta}{2kT}} H^2}{\int_0^\pi e^{\frac{(P-E) \cos^2 \theta}{2kT}} H^2 \cdot \sin \theta d\theta} \cdot \sin \theta d\theta$$

e sia, abbreviatamente, $a = \frac{(P-E)}{2kT} \cdot H^2$; cerchiamo le radici della equazione integrale

$$(3) \quad \int_0^\pi e^{a \cos^2 \theta} \cdot \sin \theta d\theta = 2e^{a \cos^2 \theta}.$$

Integrando si ottiene

$$(4) \quad e^{-a \sin^2 \theta} (1 + 2a \cos^2 \theta) = 1$$

le cui radici θ_0 , dovranno soddisfare alle condizioni del problema.

Ma pei campi utilizzabili in queste ricerche non si superano i 100.000 volt per centimetro e certo i 100.000 gauss; ne deriva che, alle temperature ambientali, a è al più dell'ordine di un decimillesimo⁽¹⁾; allora sviluppando in serie l'esponenziale della (4) e limitandoci alla prima potenza di a , si ricava

$$\cos \theta_0 = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Cioè, non solo esiste la direzione particolare cercata, ma essa, nelle condizioni in cui si esperimenta abitualmente, non dipende dall'intensità del campo, nè dalla maggior o minor asimmetria dielettrica o diamagnetica, purchè, in questi riguardi, la molecola del gas non sia sferica, nè abbia un momento elettrico permanente.

(1) LANGEVIN, loc. cit.

Nelle abituali condizioni di esperienza e colle limitazioni ora citate, esiste quindi un cono retto di apertura $54^{\circ}44'7''$, avente per asse la direzione del campo orientante e sulla cui superficie la distribuzione statistica degli assi polari delle molecole è invariante in campi costanti qualsiasi anche nulli.

Vedremo in alcune prossime Note, come questo cono sia sede di singolarità fisiche caratteristiche in alcuni fenomeni ove intervengono campi orientanti.

Fisica. — *Determinazione della costante di Avogadro per mezzo di soluzioni birifrangenti di ferro dializzato* ⁽¹⁾. Nota di L. TIERI presentata dal Socio CORBINO ⁽²⁾.

In una Nota pubblicata su questi « Rendiconti » ⁽³⁾, accennai alla possibilità di determinare la costante di Avogadro, utilizzando soluzioni di ferro dializzato a forte birifrangenza magnetica. Un esame preliminare di dodici campioni di ferro dializzato di epoca e di provenienza diversa, mi portò a scartare cinque di essi, perchè alcuni presentavano una birifrangenza magnetica troppo debole, altri presentavano nettamente il fenomeno dell'inversione.

Gli altri sette campioni furono sottoposti ad un accurato esame ultramicroscopico, che mi condusse a scartare altri tre campioni, perchè in ciascuno di essi esistevano granuli aventi velocità diversa. La forma dei granuli appariva abbastanza regolare in tutti i campioni.

Le mie ricerche si limitarono pertanto allo studio di tre campioni di ferro dializzato a pura birifrangenza positiva e a granuli regolari e sensibilmente della stessa grandezza per ciascuno di essi, e ad un liquido a birifrangenza negativa con due specie di granuli.

Di ciascun campione, opportunamente diluito con acqua distillata e rinchiuso in una vaschetta di vetro a sezione rettangolare, determinai la birifrangenza magnetica alla temperatura di 23° in un campo di 4000 gauss.

Indicando per brevità con A, B, C, i tre liquidi a birifrangenza positiva e con N quello a birifrangenza negativa, si ottenne:

Liquido	A:	birifrangenza in lunghezza d'onda nel rosso				0.6
»	B:	»	»	»	»	0.94
»	C:	»	»	»	»	0.27
»	N:	»	»	»	»	— 2.3

(1) È qui un sunto del lavoro che sarà pubblicato per esteso sul « Nuovo Cimento ».

(2) Pervenuta all'Accademia il 29 settembre 1925.

(3) « Rend. Acc. Lincei », Vol. XXXII. serie 5^a, 2^o sem. 1923, p. 155.

Le vaschette, mantenute a temperatura pressochè costante (23°), furono lasciate in riposo per 90 giorni, tempo più che sufficiente perchè le particelle in sospensione raggiungessero l'equilibrio statistico; dopo di che, successivamente e con precauzione, furono poste fra le espansioni polari dell'elettrocalamita su un sostegno con vite micrometrica, che permetteva di spostare la vaschetta verticalmente. In modo che era possibile di determinare la birifrangenza in strati della soluzione situati a diversa altezza, portando detti strati successivamente nella parte centrale del campo magnetico, con che si era sicuri che il campo avesse sempre la stessa intensità. Si ebbero in tal modo i valori riportati nella seguente tabella:

Distanza dal fondo della vaschetta in mm.	Birifrangenza in lunghezza d'onda nel rosso			
	Liquido A	Liquido B	Liquido C	Liquido N
2	1.40	1.64	0.75	—
4	0.90	1.10	0.42	— 0.6
6	0.62	0.79	0.25	— 1.09
8	0.43	0.58	0.15	— 1.16
10	0.30	0.42	0.08	— 1.12
12	0.21	0.31	0.05	— 1.03
14	0.14	0.22	0.03	— 0.91
16	0.10	0.16	—	— 0.80
18	0.07	0.12	—	— 0.67
20	0.05	0.09	—	—

Da essa risulta che per i liquidi A e B, in equilibrio statistico, è praticamente valida la legge di Laplace circa la distribuzione dei granuli con l'altezza; purchè si trascurino gli strati prossimi al fondo, per i quali la birifrangenza varia più rapidamente. Per il liquido C la birifrangenza varia più rapidamente di quello che vorrebbe la legge di Laplace, fino a mm. 10 dal fondo. Particolare interesse presenta il liquido N: siccome in esso esistono granuli a birifrangenza positiva e granuli a birifrangenza negativa, raggiunto l'equilibrio statistico, ciascuna specie di granuli è distribuita secondo la legge di Laplace; e la concentrazione decresce con l'altezza più rapidamente per i granuli a birifrangenza positiva, perchè più grandi. Ne segue, che per ogni strato la birifrangenza osservata è data dalla somma algebrica delle birifrangenze dovute alle due specie di granuli; e il diagramma relativo ai numeri dell'ultima colonna della precedente tabella, può decomporci in due curve esponenziali: l'una relativa alla variazione della birifran-

genza con l'altezza se nel liquido esistessero le sole micelle positive, l'altra relativa alla stessa variazione se nel liquido vi fossero i soli granuli a birifrangenza negativa.

Per ciascuna delle due soluzioni A, B determinai la densità dei granuli col metodo del picnometro, e la velocità di caduta dei granuli stessi rinchiudendo le soluzioni in esame in lunghi tubi capillari disposti verticalmente e tenuti a temperatura pressochè costante (23°).

Supponendo i granuli di forma sferica e applicando la legge di Stookes, dedussi il raggio dei granuli per ciascuno dei liquidi in esame. Ed essendo il rapporto fra i numeri n_0 e n dei granuli in due strati posti a diversa altezza, eguale al rapporto delle birifrangenze magnetiche negli strati stessi, dai numeri della precedente tabella si ottennero i valori di $\frac{1}{h} \log_e \frac{n_0}{n}$. I risultati sono riportati nel seguente specchietto:

Soluzione	Densità Δ dei granuli	Densità efficace $\Delta - \delta$	Velocità di caduta dei granuli	Raggi r dei granuli	$\frac{1}{h} \log_e \frac{n_0}{n}$
A	3.1	2.1	$2 \cdot 10^{-7}$	$1.980 \cdot 10^{-6}$	1.80
B	3.1	2.1	$2.2 \cdot 10^{-7}$	$2.081 \cdot 10^{-6}$	1.58

Dalla (1) della Nota citata, si ottiene:

$$N = \frac{RT \cdot \log_e \frac{n_0}{n}}{\frac{4}{3} \pi r^3 (\Delta - \delta) g h}$$

Ponendo: $R = 8.3157 \cdot 10^7$, $T = 296$, $g = 980$ e sostituendo a $\Delta - \delta$, r e $\frac{1}{h} \log_e \frac{n_0}{n}$ i rispettivi valori su riportati, si ottiene:

$$\begin{aligned} \text{per il liquido A: } N &= 66 \cdot 10^{22} \\ \text{» } \text{ » } \text{ B: } N &= 50 \cdot 10^{22}. \end{aligned}$$

Nella determinazione della birifrangenza in strati situati a diversa altezza nella soluzione colloidale, oltre a mantenere costante il campo magnetico, è necessario mantenere rigorosamente costante la temperatura del liquido, avendo essa una grande influenza sulla birifrangenza.

I numeri della precedente tabella stanno a dimostrare che anche i liquidi che nell'esame ultramicroscopico appaiono avere in sospensione una

sola specie di granuli, contengono granuli di diversa grandezza. Ne consegue un maggiore addensamento di granuli nel fondo; e quindi una birifrangenza, per gli strati più bassi, maggiore di quella che vorrebbe la legge di Laplace. Gli scarti da questa legge sono molto marcati per il liquido C. Per gli altri due liquidi sono trascurabili oltre i sei millimetri dal fondo della vaschetta. E la differenza fra i valori ottenuti per N, è probabilmente dovuta, in massima parte, alla ipotesi fatta sulla forma dei granuli.

Chimica-fisica. — *Sulla statica chimica dei fenomeni elettronici*
Nota di LUIGI ROLLA e GIORGIO PICCARDI presentata dal Socio GARBASSO⁽¹⁾.

Ammissa la validità della legge dell'azione di massa per la ionizzazione di due specie atomiche A e B, ossia ammesso per le reazioni



(dove $[A^+] = [e]_A$ e $[B^+] = [e]_B$)

$$K_A = \frac{[A^+] \cdot [e]_A}{[A]} = \text{costante} \quad K_B = \frac{[B^+] \cdot [e]_B}{[B]} = \text{costante},$$

nel caso della miscela delle due specie atomiche A e B, ossia della loro simultanea ionizzazione, si ha, ponendo

$$[e] = [A^+] + [B^+]$$

$$K_A = \frac{[A^+] [e]}{[A]} \quad e \quad K_B = \frac{[B^+] [e]}{[B]}$$

dalle quali

$$\frac{[A^+]}{[A]} = \frac{K_A}{[e]} \quad e \quad \frac{[B^+]}{[A]} = \frac{K_B}{[e]}.$$

Ma

$$\frac{[A^+]}{[A]} = X_A = \text{coefficiente di dissociazione della specie A}$$

e

$$\frac{[B^+]}{[B]} = X_B = \text{coefficiente di dissociazione della specie B}$$

quindi

$$X_A = \frac{K_A}{[e]} \quad e \quad X_B = \frac{K_B}{[e]}$$

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica-fisica della R. Università di Firenze; pervenuto all'Accademia il 3 ottobre 1925.

da cui

$$(1) \quad \frac{X_A}{X_B} = \frac{K_A}{K_B}.$$

Nella ionizzazione di una miscela di due specie atomiche, i coefficienti di dissociazione delle singole specie sono proporzionali alle rispettive costanti di dissociazione.

L'espressione (1) è identica a quella, ben nota, valevole per le soluzioni isoioniche.

D'altra parte:

$$[A^+] = \frac{[A] \cdot K_A}{[e]} \quad \text{e} \quad [B^+] = \frac{[B] \cdot K_B}{[e]},$$

ma

$$[e] = [A^+] + [B^+]$$

per cui

$$(2) \quad [e] = \sqrt{[A] \cdot K_A + [B] \cdot K_B}.$$

Poichè le quantità $[e]$, $[A]$, $[B]$, K_A , K_B si ricavano tutte dall'esperienza, noi possiamo calcolare una di esse, servendoci delle altre quattro, e confrontare il valore così ottenuto col valore osservato.

Verificata la relazione (2) resta di conseguenza verificata anche la relazione (1).

Si noti che si possono ricavare $[A]$ e $[B]$ dall'esperienza, soltanto se $[A^+]$ e $[B^+]$ sono trascurabili rispetto a $[A]$ e $[B]$: nelle condizioni delle nostre esperienze le concentrazioni di A e B sono da 1000 a 100.000 volte più piccole di quelle di A e di B.

Nelle esperienze di cui appresso, abbiamo ricavato il valore di $[e]$ e lo abbiamo confrontato col valore osservato, trovando sempre un ottimo accordo fra tali valori.



Concentrazione media . . Ba $5,80 \cdot 10^{15}$ atomi/sec.

» » . . Sr $4,47 \cdot 10^{15}$ »

Nelle stesse condizioni abbiamo trovato:

per il Bario: $K = 3,22 \cdot 10^{10}$ e per lo Stronzio: $K = 5,15 \cdot 10^9$.

Da questi dati si calcola il valore della corrente media e si trova

$$[e] \ 1,21 \cdot 10^{13} \text{ elettroni/sec.}$$

Il valore osservato era:

$$[e] \ 1,15 \cdot 10^{13} \text{ elettroni/sec.}$$



Concentrazione media	Li	$4,33 \cdot 10^{17}$	atomi/sec.
»	Na	$1,17 \cdot 10^{17}$	»

Valori delle costanti di equilibrio:

$$\text{Li} : K = 1,83 \cdot 10^7$$

$$\text{Na} : K = 4,07 \cdot 10^9$$

Corrente media osservata	[e]	$1,75 \cdot 10^{13}$	elettroni/sec.
»	calcolata	$2,10 \cdot 10^{13}$	»



Concentrazione media	Na	$3,88 \cdot 10^{15}$	atomi/sec.
»	Mo	$1,94 \cdot 10^{15}$	»

Valori delle costanti di equilibrio:

$$\text{Na} : K = 6,86 \cdot 10^9$$

$$\text{Mo} : K = 4,35 \cdot 10^6$$

Corrente media osservata	[e]	$5,15 \cdot 10^{12}$	elettroni/sec.
»	calcolata	$5,10 \cdot 10^{12}$	»



Concentrazione media	Tl	$1,46 \cdot 10^{17}$	atomi/sec.
»	Mo	$3,40 \cdot 10^{17}$	»

Valori delle costanti di equilibrio

$$\text{Tl} : K = 6,77 \cdot 10^7$$

$$\text{Mo} : K = 4,20 \cdot 10^5$$

Corrente media calcolata	[e]	$3,17 \cdot 10^{12}$	elettroni/sec.
»	osservata	$3,26 \cdot 10^{12}$	»



Concentrazione media	K	$5,54 \cdot 10^{16}$	atomi/sec.
»	Na	$2,77 \cdot 10^{16}$	»

Valori delle costanti di equilibrio

$$\text{K} : K = 1,15 \cdot 10^{11}$$

$$\text{Na} : K = 4,07 \cdot 10^9$$

Corrente media osservata	[e]	$9,66 \cdot 10^{13}$	elettroni/sec.
»	calcolata	$9,35 \cdot 10^{13}$	»

Chimica. — *Prodotti di condensazione tra glucosio e p-fenetidina.* Nota I^a ⁽¹⁾ di MARIO AMADORI, presentata dal Socio N. PARAVANO.

Di interesse particolare, come derivati del glucosio, e come derivati fenetidini, sono i prodotti della reazione della p-fenetidina con il glucosio.

Le ricerche eseguite si collegano a studi sui prodotti di condensazione di amminoderivati col glucosio, che iniziati da Schiff ⁽²⁾, da Sachsse ⁽³⁾ e da Strauss ⁽⁴⁾, furono poi trattati estesamente da Sorokin ⁽⁵⁾ e recentemente da Irvine e suoi collaboratori ⁽⁶⁾.

Del derivato della p-fenetidina si occuparono particolarmente Claus e Ree, e Irvine e Gilmour, i quali ultimi lo hanno studiato assieme a molti derivati analoghi.

Del lavoro di Claus e Ree non mi fu possibile conoscere che brevi cenni nella descrizione di brevetto ⁽⁷⁾. Il composto, ottenuto per riscaldamento di soluzioni alcooliche di glucosio e di p-fenetidina, cristallizza in aghi, fonde a 160°, è insolubile in acqua ed in alcool a freddo, solubile a caldo.

Irvine e Gilmour ⁽⁸⁾ scaldando p-fenetidina e glucosio con alcool a 83°/c ottennero il composto $C_{14}H_{21}O_6N$ cristallizzato con 1 H_2O ; esso fonde con decomposizione tra 110 e 120°; tenuto nel vuoto, meglio se scaldato a 60°, perde $\frac{1}{2} H_2O$; la disidratazione completa non fu raggiunta. Il composto ha potere rotatorio levogiro con mutarotazione. Irvine e Gilmour non riuscirono a preparare il composto di Claus e Ree, anche modificando in vario modo le condizioni della reazione.

Altre ricerche sono state rivolte ai prodotti di reazione del glucosio con la p-fenetidina, in quanto potevano essere derivati di valore terapeutico.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Padova; pervenuto all'Accademia il 5 ottobre 1925.

(2) «Berichte», 4, 908 (1871).

(3) «Berichte», 4, 834 (1871).

(4) «Berichte», 27, 1284 (1894).

(5) «Journ. f. prakt. Chem.», 37, 291 (1894).

(6) «Journ. chem. Soc.», 93, 1429 (1908); 95, 1545 (1909); 97, 1449 (1910); 123-124, 900 (1923).

(7) «C. B.», 1898, II, 695; «Chem. Zeit.», 22, 545 (1898).

(8) «Journ. Chem. Soc.», 95, 1545 (1909).

È inutile, perchè troppo noti, enumerare qui i vari composti della fenetidina di azione terapeutica che sono in commercio; essi sono così numerosi e di largo uso, che era naturale che anche al prodotto di reazione con il glucosio fosse rivolta particolare attenzione.

Sotto questo punto di vista Claus e Ree nella esposizione del loro brevetto, riferiscono che il loro prodotto ha un'azione tossica molto più leggera che il derivato del glucosio con l'anilina.

E allo stesso scopo altra ricerca fu compiuta da Hewitt⁽¹⁾ su un composto di reazione tra glucosio e p-fenetidina; di questa ricerca ho potuto conoscere solo due referati⁽²⁾. In essi non è detto come il prodotto sperimentato sia stato ottenuto e quale dei precedenti descritti esso possa essere; il prodotto studiato era senza azione terapeutica e non velenoso; forse perchè nell'organismo si scompone molto lievemente.

PARTE SPERIMENTALE.

La ricerca chimica da me eseguita ha dimostrato l'esistenza di due diversi prodotti, ottenuti per reazione di glucosio anidro e di p-fenetidina in rapporto molecolare.

In una prima serie di preparazioni le due sostanze vennero fatte reagire in miscela con alcool etilico a freddo o all'ebollizione, ma limitando il riscaldamento fino a soluzione: si formò un composto della stessa natura di quello descritto da Irvine; il composto fu da me ottenuto senza acqua di cristallizzazione (p. f. 118°).

In una seconda serie di preparazioni la p-fenetidina e il glucosio prima del trattamento con alcool vennero riscaldati a secco a 50-80°; la massa, che dapprima diviene liquida e poi ritorna solida, ripresa con alcool all'ebollizione si scioglie rapidamente, e dalla soluzione per raffreddamento cristallizza un prodotto diverso dal precedente (p. f. 155°). Lo stesso prodotto si forma se p-fenetidina e glucosio vengono mescolati e tenuti per vario tempo a temperatura ordinaria, e successivamente trattati con alcool all'ebollizione. Anche trattando direttamente glucosio e fenetidina con alcool e dopo avvenuta la soluzione prolungando molto l'ebollizione, si forma il prodotto a p. f. 155°. Questo composto corrisponde probabilmente a quello di Claus e Ree, i quali devono averlo ottenuto in una delle condizioni di operazione da me stabilite e da essi non bene specificate; per questo appunto probabilmente non riuscì ad Irvine di preparare il composto già ottenuto da Claus e Ree.

(1) « Biochem. Journ. », 7, 207.

(2) « Chem. Abstracts », 7, 2431 (1913); « C. B. f. Physiol. », 27, 809 (1913).

I due prodotti sono di natura chimica diversa come risulta dalle loro proprietà fisiche e chimiche.

Composto A: p. f. 118°.

Furono fatti bollire gr. 9.6 di p-fenetidina e gr. 12.5 di glucosio (in rapporti molecolari) con 70-100 gr. di alcool etilico a 99 %; il riscaldamento fu limitato fino a soluzione completa, ciò che si raggiunge in circa 3 ore; lasciata a sè la soluzione a freddo non si ha subito cristallizzazione; dopo uno o due giorni, meglio per aggiunta di germi, cristallizza rapidamente il prodotto in fiocchi voluminosi. Raccolto e purificato per ricristallizzazione da alcool a 99 %, si separa nuovamente in fiocchi bianchi voluminosi. Rendimento circa 70 %.

La sostanza trattiene piccole quantità di alcool, ed è difficile liberarla dalle ultime tracce, anche mantenendola in essiccatore a cloruro di calcio e nel vuoto. Non è giovevole il riscaldamento anche moderato per l'alterazione che può subire, e di cui sarà detto in seguito. Molto opportunamente si può togliere le ultime tracce di alcool mediante lavaggio con etere.

Un prodotto esente da alcool si ottiene operando con le stesse proporzioni, ma con alcool diluito, a 90 %; la soluzione all'ebollizione avviene in tempo più rapido, circa in un'ora, e per raffreddamento dopo due o tre giorni si separano dei cristalli di aspetto diverso dai precedenti, cioè piccoli aghetti, spesso raggruppati a stella, probabilmente della stessa forma. Ricristallizzato per purificazione da alcool a 90 % si hanno gli stessi cristalli. Il rendimento è molto inferiore, perchè il prodotto è molto più solubile in alcool diluito.

Anche il prodotto preparato con alcool a 99 % ricristallizzato da alcool a 90 %, dà un prodotto dello stesso aspetto, privo di alcool.

Spesso nella preparazione e cristallizzazione si sono ottenute miscele di cristalli nei due diversi aspetti: non si possono stabilire nettamente condizioni speciali di formazione dell'uno o dell'altro tipo di cristalli, si è però osservato che la cristallizzazione in fiocchi voluminosi avviene soprattutto da soluzioni diluite, in alcool a poco contenuto in acqua, la cristallizzazione in aghetti avviene da soluzioni più concentrate, in alcool più acquoso.

Il prodotto cristallizzato in fiocchi voluminosi che trattiene aderente alcool, tenuto all'aria si altera piuttosto rapidamente, dopo pochi giorni diviene bruno pecioso, e più a lungo l'alterazione è tale da non poter più riavere la sostanza pura, nemmeno per ricristallizzazione da alcool. Per conservare la sostanza è necessario mantenerla fuori del contatto dell'aria in essiccatore. L'alterazione invece è molto più lenta e quasi insignificante per i prodotti in cristalli minuti, ed in genere quando fu allontanato l'alcool con lavaggio con etere.

Per la facile alterabilità del prodotto di aspetto fioccoso, e difficoltà di eliminare l'alcool, era sembrato dapprima trattarsi di qualche differenza

sostanziale tra i due prodotti; ma da un accurato esame risultò da escludere che si tratti anche di un semplice contenuto in alcool di cristallizzazione, perchè in realtà sono assai piccole quantità di alcool, che d'altra parte possono venir tolte facilmente mediante lavaggio con etere.

Nelle diverse prove di preparazione fu anche variato il rapporto tra glucosio e fenetidina posti a reagire, senza giungere a risultati diversi; e lo stesso prodotto si ottiene anche operando con quantità di alcool minori ($\frac{1}{3}$) di quella prima indicata; purchè sempre il riscaldamento sia limitato a raggiungere la soluzione della miscela.

Anche mantenendo glucosio, fenetidina e alcool a temperatura ordinaria, e agitando di tratto in tratto la miscela, dopo 10-15 giorni si separa in fiocchi voluminosi questo prodotto.

Il prodotto ora descritto nelle varietà di preparazioni, è cristallizzato in fiocchi voluminosi o in aghetti minuti, di color bianco. È molto solubile in acqua, anche a freddo, ma si scompone lentamente. In alcool etilico a 99 % è solubile circa 1.5 % a freddo, molto più a caldo. In alcool diluito è tanto più solubile quanto più diluito è l'alcool. È solubile in alcool metilico. Insolubile in etere, in benzolo, anche a caldo.

Il prodotto puro fonde a 118°. Il prodotto che contiene alcool fonde irregolarmente a temperature inferiori tra 100° e 115°.

Analisi del prodotto preparato con alcool a 99 % e lavato con etere:
gr. 0.1668 di sostanza diedero gr. 0.3413 di CO₂ e gr. 0.1080 di H₂O;
gr. 0.2692 di sostanza diedero cc. 9.8 di azoto e 14° e 754 mm.

$$C = 55.85 \% \quad H = 7.25 \% \quad N = 4.29 \%$$

Calcolato per C₁₄H₂₁O₆N

$$C = 56.20 \% \quad H = 7.02 \% \quad N = 4.68 \%$$

Peso molecolare:

In acqua al congelamento (p. f. 0°) $k = 18^{\circ}.5$.

concentrazione = 2.85 $\Delta = 0.185^{\circ}$ peso molecolare = 285.0

In alcool etilico all'ebollizione (p. e. = 78°) $k = 11^{\circ}.5$.

concentrazione = 3.73	$\Delta = 0.14^{\circ}$	peso/molecolare = 306.3
» = 4.98	$\Delta = 0.20^{\circ}$	» = 286.0
» = 6.87	$\Delta = 0.26^{\circ}$	» = 303.9

La composizione chimica e il peso molecolare dimostrano che la reazione avviene molecularmente, con eliminazione di una molecola di acqua.

Jrvine e Gilmour hanno descritto il composto ottenuto per reazione tra p-fenetidina e glucosio in soluzione di alcool etilico a 83 % all'ebollizione, evaporando poi gran parte dell'alcool, e separando il prodotto con etere. Il composto di Irvine e Gilmour corrisponde alla formula $C_{14}H_{21}O_6N$, cristallizzato con una molecola di acqua, solo parzialmente disidratabile; essi non ebbero mai un prodotto anidro; forse essi non operarono mai con alcool molto concentrato, ma solo con alcool diluito seguendo il metodo da loro preferito nella formazione di composti di questo tipo; oppure furono tratti in errore dalla lentezza di separazione del composto formato con alcool concentrato, specialmente quando non si aggiungano germi cristallini.

A parte il contenuto in acqua affermato da Irvine e Gilmour, il composto da loro descritto corrisponde a quello da me ottenuto e qui ora descritto. Ciò risulta dal metodo molto simile di preparazione, e dal comportamento ottico, come verrà esposto in seguito.

Ho poi ripetuta la preparazione nelle modalità date dai detti autori, ed ho constatato che il prodotto così preparato sciolto in alcool a 99 % ricristallizza in forma del composto anidro ora descritto. L'identità dei due prodotti risulta evidente.

Il metodo di preparazione da me seguito si presenta più conveniente perchè più sicuro e di rendimento maggiore.

Composto B: p. f. 155°.

La preparazione è stata compiuta, come è stato detto, mescolando p-fenetidina e glucosio anidro in rapporto molecolare e scaldando la miscela a 70°; si ha da principio una lenta fusione della massa che poi successivamente solidifica, durante il riscaldamento di un paio di ore. La massa venne poi trattata all'ebollizione con alcool etilico a 99 %; si scioglie rapidamente e per raffreddamento lascia subito cristallizzare il prodotto. Analogamente impiegando alcool più diluito, a 85 %. Con una seconda cristallizzazione da alcool etilico si ha il prodotto puro. Si ha così un rendimento di circa 70 % del teorico.

Un riscaldamento della miscela a temperatura superiore non è giovevole, poichè se troppo prolungato porta una parziale decomposizione. A temperature inferiori la reazione è più lenta, ed è necessario prolungare il riscaldamento. Reazione analoga e buon rendimento si può avere lasciando a contatto a temperatura ordinaria per una quindicina di giorni le due sostanze tenute in essiccatore; se lasciate all'aria il rendimento è molto basso.

Anche se una miscela di glucosio, fenetidina ed alcool viene fatta bollire fino a soluzione e poi l'ebollizione viene prolungata per 12-15 ore si forma questo composto. E questo composto viene pure ottenuto concentrando fortemente le acque madri delle soluzioni da cui nei processi prima descritti si sia separato il composto a p. f. 118°.

La reazione procede allo stesso modo anche se viene variato il rapporto di reazione tra glucosio e fenetidina.

Il composto che così si forma è molto stabile; cristallizza in scaglette o in aghetti di colore bianco o lievemente paglierino. È insolubile in acqua a freddo, solubile a caldo senza decomposizione. Insolubile in alcool etilico a freddo, solubile a caldo. Leggermente solubile in alcool metilico anche a freddo, circa 1 %, molto solubile a caldo. Insolubile in etere, in benzolo, anche a caldo. Punto di fusione 155°.

È molto stabile, lasciato all'aria non si decompone.

Analisi:

gr. 0.1640 di sostanza diedero gr. 0.3365 di CO_2 e gr. 0.1082 di H_2O
gr. 0.2820 di sostanza diedero cc. 10.4 di azoto a 13° e 752 mm.

C = 55.94 % H = 7.32 % N = 4.35 %

Calcolato per $\text{C}_{14}\text{H}_{21}\text{O}_6\text{N}$

C = 56.20 % H = 7.02 % N = 4.68 %

Peso molecolare:

In acqua alla temperatura di congelamento la solubilità è troppo limitata e non si ha abbassamento apprezzabile del punto di congelamento.

In alcool etilico all'ebollizione (p. e. = 78°.2) $k = 11°.5$.

concentrazione = 4.98	$\Delta = 0°.20$	peso molecolare = 286.0
» = 3.72	$\Delta = 0°.15$	» = 285.1

Anche nella formazione di questo prodotto la reazione avviene quindi molecularmente, con eliminazione di una molecola di acqua.

Per il punto di fusione (155°) prossimo a quello del composto descritto da Claus e Ree (160°), e per i dati di solubilità, il composto ora descritto sembra identificarsi con quello di Claus e Ree, che per quanto fu detto prima si deve ritenere sia stato preparato nelle condizioni di operazione qui da me descritte.

Risulta quindi stabilita l'esistenza di due prodotti di condensazione del glucosio con la p-fenetidina entrambi corrispondenti a $\text{C}_{14}\text{H}_{21}\text{O}_6\text{N}$: di essi sono ben stabilite le condizioni di formazione:

composto A: p. f. 118°, che corrisponde a quello di Irvine e Gilmour;
composto B: p. f. 155°, che corrisponde a quello di Claus e Ree.

In altra Nota verrà esaminata la probabile costituzione dei due composti.

Chimica. — *L'influenza dei sostituenti sulla formazione e sulla stabilità in alcuni composti ciclici*⁽¹⁾. Nota di MICHELE GIUA, presentata dal Socio PATERNÒ.

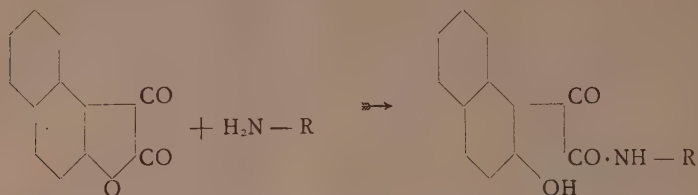
Le ricerche interessanti di R. Stollè e E. Knebel, « Ber., 1921, 1213 », sulla condensazione fra fenoli e cloruro di ossalile, con la reazione di Friedel e Crafts, hanno messo in evidenza l'influenza di alcuni aggruppamenti, presenti nell'anello benzenico, sulla formazione di derivati del cumarandione. Solo per l'influenza di determinati aggruppamenti, il cloruro di alluminio può catalizzare la reazione di eliminazione di acido cloridrico dai cloruri degli acidi arilossalici per dare origine a derivati del cumarandione. Così i cloruri degli acidi m-cresilossalico e m-xilenilossalico simm. danno, in presenza di cloruro di alluminio, i corrispondenti cumarandioni, mentre il cloruro dell'acido fenilossalico si trasforma, nelle stesse condizioni, prevalentemente in acido salicilico. Sembra che la presenza di gruppi sostituenti determinati (specialmente alchilici e arilici) in posizione para all'atomo di ossigeno inibisca la ciclizzazione indicata, perchè, per es., il cloruro dell'acido p-cresilossalico dà l'acido p-cresotinico, ciò che può essere in relazione con la regola di K. v. Auwers, secondo la quale *i sostituenti in posizione meta all'ossigeno aumentano la stabilità dell'anello cumarandionico, mentre i sostituenti orto-para diminuiscono tale stabilità* (cfr. « Ber. », 1916, 810; « Ann. Chem. », 1920, 59 e 108).

Vari anni or sono, « Gazz. chim. ital. », 1917, 47, I, 53, ho avuto occasione di constatare un caso interessante di formazione di derivati del cumarandione, studiando la reazione fra il cloruro di ossalile e l'etere etilico del β -naftolo. Ottenni così il 4.5-benzocumarandione, che per il suo comportamento si può considerare il latrone di un acido ossinaftilgliossilico. Ricerche ulteriori di H. Staudinger, « Helv. Chim. Acta », 1921, 4, 394 » e di R. Stollè, (loc. cit.), confermarono quei risultati. Staudinger, nel lavoro citato, osserva che il 4.5-benzocumarandione è poco stabile a caldo con lo stesso alcool etilico e che *reagisce con la fenilidrazina e l'o-fenilendiamina come i derivati-semplifici del cumarandione*. Quasi contemporaneamente Fries e Frelstedt (« Ber. », 1921, 715), ottenevano il 4.5-benzocumarandione per una via diversa da quella mia e notavano il comportamento lattonico della sostanza.

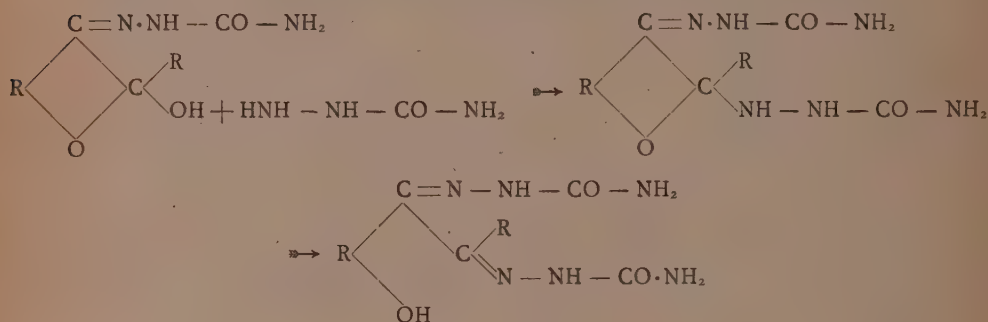
Investigando sull'azione delle basi organiche sul detto benzocumarandione, ho avuto più tardi occasione di mettere in evidenza (cfr. Giua e

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica organica della R. Scuola d'Ingegneria di Torino.

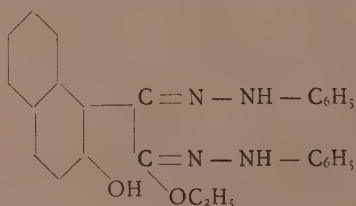
De Franciscis, « Gazz. chim. ital. », 1924, 510) come in presenza della base si abbia l'apertura dell'anello pentagonale, con formazione dell'ammide sostituita dell'acido ossinaftilgliossilico (1):



Anche i cumaranoni contenenti un atomo d'idrogeno in posizione 2 sostituito da radicali ossialchilici, come risulta dalle recenti ricerche di K. v. Auwers e G. Wegener, (« Journ. prakt. Chem. », 1923, 106, 226), reagiscono con la semicarbazide formando dei semicarbazoni con l'anello aperto:



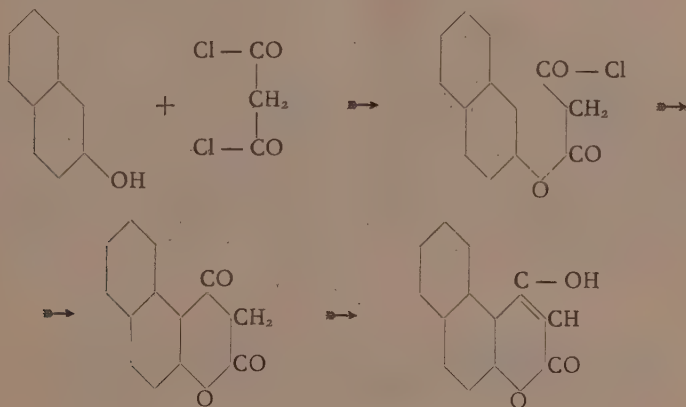
(1) Questa mia osservazione pare sia sfuggita a K. FRIES, il quale in un recentissimo lavoro (« Ann. Chem. » 1925, 442, 254), crede di notare per primo l'apertura dell'anello pentagonale di detta sostanza. Poichè fra i dati sperimentali miei e quelli di Fries esistono alcune discrepanze, mi riservo di ritornare sopra questo argomento con un contributo sperimentale. Secondo Fries, i prodotti di condensazione descritti conterrebbero una molecola di acqua in più, ciò che non si può dedurre dalla sola determinazione di azoto da me fatta. Noto per il momento, che il prodotto di condensazione del 4.5-benzocumarandione con una molecola di fenilidrazina da me descritto è identico al monofenilidrazone del 4.5-benzocumarandione ottenuto da M. PASSERINI (« Gazz. chim. ital. » 1924, 54, 189), per azione della fenilidrazina sul benzocumarandione. Per azione di due molecole di fenilidrazina sulla soluzione alcoolica del 4.5-benzocumarandione ottenni il composto



che trovasi descritto nel mio lavoro. La difficile ciclizzazione dell'acido 1-ossinaftil-

Ciò indica una influenza dei sostituenti in posizione 2 sulla tensione dell'anello pentagonale, e ha permesso all'Auwers di fare delle interessanti considerazioni sullo spiegamento di linee di valenza particolari da parte dei gruppi alchilici.

In relazione con questo argomento sulla tensione nucleare dei composti cumaranonici e cumarandionici ho studiato la reazione di condensazione del cloruro di malonile col β -naftolo, in condizioni identiche a quelle descritte per la condensazione del cloruro di ossalile con lo stesso β -naftolo. Analogamente si doveva prevedere la reazione seguente:



La reazione procede invece in modo diverso e in luogo della benzossimarina si ottiene l'etere β -dinaftilico dell'acido malonico, composto non ancora noto.

Gr. 14.4 di β -naftolo, disciolti in 50 cc. di solfuro di carbonio, si trattano con gr. 14.1 di cloruro di malonile e si riscalda a b. m. per circa un'ora in apparecchio a ricadere. Dopo si aggiungono gr. 12 di cloruro di alluminio; si ha un notevole sviluppo di acido cloridrico, cessato il quale si distilla la maggior parte del solfuro di carbonio e la massa pastosa residua si decompone con acqua e poche gocce di acido cloridrico. Si

2-formico, accennata dal Fries, fu da me indicata un anno prima, quando studiando l'azione del cloruro di ossalile sull' α -naftolo scrivevo: « Mentre il cloruro dell'acido β -naftolossalico si trasforma facilmente nel 4.5-benzocumarandione, il cloruro dell'acido α -naftolossalico si cicizza assai difficilmente e dà solo con scarsissimo rendimento il 6.7-benzocumarandione ». Anche a questo riguardo debbo osservare che il prodotto di condensazione dell'*o*-fenilendiamina con l'acido l-ossinaftoil-2-formico fonde a 312°, mentre il composto da me ottenuto dall'*o*-fenilendiamina e il prodotto di condensazione del cloruro di ossalile coll' α -naftolo (non potuto isolare, come avvertivo allora, allo stato puro) fonde a 232-233°. Evidentemente, tale notevole differenza nel punto di fusione non può essere attribuita che a una costituzione diversa dei due composti.

ottiene una sostanza biancastra, semipastosa, che lentamente solidifica; sottoposta alla distillazione in corrente di vapore, nel distillato si raccolsero quantità insignificanti di un prodotto cristallizzato in lamelle bianche, lucenti. Il residuo fu cristallizzato dall'acido acetico glaciale e si ottennero delle magnifiche lamelle bianche, argentee, fusibili a 146-147°.

Il prodotto seccato a 100° fino a peso costante fu analizzato:
Gr. 0.1554 di sostanza dettero gr. 0.4403 di CO₂ e gr. 0.0665 di H₂O.

Calcolato per C ₂₃ H ₁₆ O ₄		Trovato
C	77.53	77.27
H	4.49	4.71

La sostanza è solubile in alcool, benzene, cloroformio, acido acetico, poco solubile in etere etilico, etere di petrolio e solfuro di carbonio; a freddo è insolubile negli alcali anche concentrati. Dalla potassa alcoolica a caldo viene saponificato con separazione di β-naftolo; si scioglie a caldo nell'acido solforico conc. con una lieve colorazione bruna. Non reagisce col cloruro ferrico, nè in soluzione acquosa, nè in soluzione alcoolica.

Chimica biologica. — *Sopra la natura del melanogeno.* Nota ⁽¹⁾
di PIETRO SACCARDI presentata dal Socio A. ANGELI.

È noto da molto tempo come le urine di ammalati di tumori melanotici contengano spesso un cromogeno che impartisce loro la proprietà di colorarsi all'aria e che con ossidanti precipita in bruno sotto forma di melanina. Fu da me altra volta dimostrato che iniettando pirrolo, ovvero melanine, in conigli o cavie comparisce del pari nelle urine un cromogeno che presenta gli stessi caratteri del suddetto e che nulla ha a che fare, relativamente alla sua natura, con quello che si osserva nei casi di alcaptonuria (dovuta a composti di natura fenolica) e di conigli iniettati di tirosina.

Il melanogeno delle urine è sostanza estremamente labile. Le urine melanotiche alcaline sono ancor meno stabili all'aria di quelle acide e presto si colorano in bruno.

Nelle urine alcaline il precipitato che si forma col tempo è bruno, in quelle acide tende invece al rossastro. Le urine melanotiche si possono anche defecare con acetato neutro di piombo senza che le reazioni del melanogeno vengano alterate. Il melanogeno si estrae facilmente nelle urine acidificate mediante etere o meglio con alcool amilico. Tale estratto etereo, dopo eva-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio Chimico dell'Università di Camerino; pervenuto all'Accademia il 29 settembre 1925.

porazione, lascia un liquido che, ripreso con poche gocce di acido cloridrico e soluzione alcoolica di m. nitrobenzaldeide ed evaporato in capsula, dà una colorazione viola intensissima.

Il melanogeno è estremamente difficile ad isolare. Notai pure che le urine melanotiche reagiscono col diazoreattivo di Ehrlich. Vista la difficoltà che presenta l'isolamento del melanogeno, visto che reagiva, come ho accennato, col diazoreattivo suddetto pensai di isolarlo sotto forma di azocomposto facendo reagire il cloruro di diazonio sull'etere d'estrazione delle urine melanotiche di conigli iniettati di pirrolo e rese acide. Per evaporazione del solvente si ottiene così un residuo pecioso rosso-bruno che si scioglie in gran parte in alcool di 96°. La parte insolubile fu allontanata, la solubile concentrata. L'azocomposto trattato con idrato sodico a freddo si scioglie in massima parte con intensa colorazione rosso-bruna lasciando poco residuo che fu allontanato. Nel liquido fu fatta passare anidride carbonica. Si separò così una sostanza rosso-bruna, solubile in alcool, da cui fu purificato, che fonde verso i 113° e che fornisce assai agevolmente un derivato benzoilico che verrà descritto più tardi. Nel liquido ove fu separato il precipitato suddetto, pur esso colorato in bruno, l'acido acetico diluito precipita ancora piccola quantità di una sostanza di color marrone che è ancora in istudio.

È intanto interessante notare che:

1° Le urine normali umane e di coniglio danno talvolta lieve colorazione con i diazocomposti aromatici, ma non precipitano.

2° L'estratto etereo di urina di coniglio normale, per evaporazione del solvente lascia un residuo cristallino che fu identificato per acido ippurico, il quale non dà la diazoreazione.

3° Il melanogeno non dà picrato.

4° Per confronto un poco di pirrolo in soluzione alcalina fu diazotato con p. azossicarbonamide e isolato il bisdiazopirrolo descritto da Otto Fischer e Edoardo Hepp.

E fu potuto constatare che:

a) il bisdiazopirrolo è insolubile in alcali, mentre invece, come ho detto, il prodotto ottenuto dal melanogeno vi è solubile; il primo è rosso-scuro a riflessi metallici, il secondo è bruno;

b) il bisdiazopirrolo com'è noto, colorasi in azzurro intensissimo con acido solforico concentrato, l'azo del melanogeno in marrone;

c) il bisdiazopirrolo, a parità di trattamento, non dà un benzoilderivato, l'azo del melanogeno lo dà;

d) il bisdiazopirrolo fonde a 131°, l'azo del melanogeno, ottenuto dalla soluzione alcalina per mezzo dell'anidride carbonica, fonde, come è stato detto, verso i 113°.

Quindi, per quanto il carattere preliminare di questa Nota non permetta di sviluppare ed approfondire la natura del melanogeno, pure si può fin d'ora concludere che il melanogeno non è pirrolo passato inalterato nelle urine e

che il pirrolo, attraverso l'organismo, si trasforma fino a dar nelle urine un melanogeno capace di fornire un azocomposto diverso da quello di O. Fischer e E. Hepp ottenuto col pirrolo.

Molto probabilmente si tratta di azoderivati di polimeri ossidrilati del pirrolo i quali costituirebbero il melanogeno. Polimeri perchè il pirrolo quanto più si polimerizza passa dall'incolore al nero; ossidrilato perchè mentre il bisdiazopirrolo non dà, col metodo di Schotten-Baumann, derivati ossidrilati, il melanogeno li dà.

E come iniettando benzolo, indolo o naftalina queste sostanze passano nelle urine sotto forma di fenolo, indossile e naftolo copulati, così il pirrolo potrebbe passar nelle urine sotto forma ossidrilata, il che spiegherebbe la ancor maggiore labilità del melanogeno rispetto al pirrolo.

L'ossidazione del pirrolo a melanogeno avviene nell'organismo e non per opera dei fermenti delle urine; infatti aggiungendo pirrolo alle urine normali umane o di coniglio, estraendole con etere dopo acidificazione come ho agito col melanogeno, sia subito, sia dopo 12 ore si hanno tutte le reazioni di ossidazione ma con i caratteri del pirrolo, non del melanogeno. Infatti con acido solforico e bicromato di potassio il colore è nero, non rosso-bruno, e l'azoderivato mostra i caratteri di quelli di O. Fischer e E. Hepp, non di quello del melanogeno sia dal lato fisico, sia nella colorazione specifica con acido solforico concentrato.

Questi fatti sono contrari a quello che afferma Kobert che cioè il pirrolo venga eliminato tal quale oppure copulato con acido solforico. Secondo poi Shmizu Tomihide⁽¹⁾ in seguito ad iniezioni di pirrolo in cani e conigli nell'urina compare metilpiridina. Nessuno però di questi autori si è accorto dei fenomeni di melanuria che presentano le urine degli animali così trattati.

Molti autori, fra cui Von Furth, ammettono che la formazione delle melanine sia dovuta all'ossidazione della tirosina operata dalla tirosinasi. Secondo Bloch invece sarebbe dovuto a ossitirosina (dopa). Anche prescindendo dal fatto che le urine degli animali cui venne propinata tirosina oppure dopa non danno la reazione del melanogeno, che presentano le urine di ammalati di tumori melanotici ovvero gli animali cui venne iniettato pirrolo ed i suoi derivati, in questi ultimi tempi venne posto in rilievo un fatto che presenta il maggiore interesse per quanto si riferisce alla genesi delle melanine, e tale da escludere che queste possano provenire da derivati ossidrilati del benzolo. Infatti il prof. Coulon non trova tirosinasi nel caso di un melanosarcoma di un cavallo bianco, invece nota la presenza di una perossidasi che non ha nessuna azione sulla tirosina. Inoltre I. Mawas, studiando alcuni tumori melanici della coroidea, ha potuto stabilire che la macerazione glicerica non contiene tirosinasi e neppure tirosina. Inoltre la colorazione dell'estratto, tal quale s'ottiene dopo filtrazione della massa macinata, non ha imbrunito dopo tre mesi.

(1) « Bioch. Zeitschr. », 117, pp. 266-68.

La colorazione nera dei tumori melanici dell'occhio umano non è dunque dovuta ad una tirosinasi, nè all'ossidazione della tirosina per parte di una perossidasi¹. E tenendo presente i fatti interessantissimi posti in rilievo dai professori G. D'Agata, R. Brancati e G. Gallerani, circa la proprietà che gode il pirrolo d'annerire i tumori sia in viro che in vitro, e sulla somiglianza spettrofotometrica degli spettri del pirrolo ossidato con quelli delle melanine, risulta sempre più probabile che la formazione delle melanine sia dovuta a composti pirrolici.

Il metodo di fissare un composto così labile come il melanogeno od i melanogeni di orine melanotiche per mezzo di diazocomposti, risulta quindi sommamente utile e probativo, perchè mi permetterà presto di conoscere la grandezza molecolare e la natura di queste sostanze così importanti in fisiologia ed in patologia e che da tanto tempo formano oggetto di universali studi.

Mineralogia. — *L'epidoto del Monte Rosso di Verra (Gruppo del Monte Rosa)*. Nota di TULLIO CARPANESE²⁾ presentata dal Corrisp. LUIGI BRUGNATELLI.

II. — STUDIO OTTICO E CHIMICO.

In una Nota precedente³⁾ ho riferito i risultati dello studio morfologico da me eseguito sui cristalli di epidoto raccolti dal prof. A. Bianchi nel versante settentrionale del Monte Rosso di Verra (Ayas), che guarda sul passo Bettolina Nord e sul sottostante Vallone di Verra. Secondo queste mie determinazioni e quelle eseguite dal prof. Zambonini sui primi cristalli raccolti dall'ing. Novarese⁴⁾, le forme complessivamente trovate nell'epidoto di questo giacimento del Monte Rosso sono le seguenti:

$T:100$, $M:001$, $\{22.0.1\}$, $\{17.0.1\}$, $\ast 801$, $\ast 501$, 501 , $b:201$, 504 , $c:101$, 104 , $i:102$, $N:504$, $r:101$, la vicinale $\{49.0.50\}$, $\{705.1.705\}$, $\{502$, $l:201$, $P:010$, $r:110$, $k:012$, $o:011$, $d:111$, $e:113$, $\{213$, $Y:214$, $\ast 17.7.20$, $n:111$, $q:221$, $b:233$, $g:344$, $\varphi\{121\}$, $\{151\}$, $\{2.11.2\}$, $\{2.13.2\}$, $c\{311\}$, $\{732\}$,
 $\ast\{831\}$, $\ast\{942\}$, $\ast\{943\}$.

1. « Comptes rendus des séances de la Société de Biologie », vol. 88 (1923), pp. 263, 332).

2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Padova, diretto dal prof. Angelo Bianchi; pervenuto all'Accademia il 17 ottobre 1925.

3) T. CARPANESE, *L'epidoto del Monte Rosso di Verra (Ayas)*, ecc. « Rendic. R. Accad. Lincei », Roma, settembre 1925.

4) F. ZAMBONINI, *Sull'epidoto del Passo Bettolina, Vallone di Verra*, Roma 1903. « Rendic. R. Accad. Lincei », XII, 567.

Forme nuove per la specie offerte dal giacimento sono le:

{801}, {501} (Zambonini); {7.7.20}, {942}, {943}, {831} (Carpanese).

Le costanti cristallografiche da me determinate sono:

$$a:b:c = 1,5803:1:1,8045; \beta = 64^{\circ} 34 \frac{1}{2}'$$

Per lo studio delle proprietà ottiche e per l'analisi chimica ho scelto i due cristalli disegnati nelle figure 1 e 2 della mia Nota precedente ed alcuni altri cristalli dello stesso tipo, omogenei, perfettamente trasparenti, colla tinta giallo verdognola più frequente nei cristalli del giacimento. Essi presentano un pleocroismo poco accentuato con i seguenti colori:

n_p : giallo chiaro; n_m : giallo brucicco; n_g : giallo verde.

Il potere della doppia rifrazione appare notevole. Il valore di n_m , osservato su alcuni frammenti al microscopio col metodo di Becke, in ioduro di metilene, risulta per la luce del sodio appena sensibilmente minore di $n = 1,737$. Lievi sono le variazioni. Per la determinazione più esatta dell'indice di rifrazione n_m , ho adoperato il cristallo rappresentato dalla fig. 2 (Nota 1^a) ricorrendo al metodo della deviazione minima e adoperando il prisma naturale formato dalle faccie (100) e ($\bar{1}0\bar{1}$) coll'angolo rifrangente di $30^{\circ} 6'$. La misura fu eseguita alla luce del sodio ed alle luci rossa, verde e bleu cariche ottenute per mezzo di soluzioni filtranti⁽¹⁾. I risultati delle misure sono i seguenti:

λ	n_m
rosso : 720 - 640	1,7304
giallo : 589	1,7364
verde : 505 - 540	1,7418
bleu : 410 - 478	1,7519

Dispersione: rosso-bleu $410 - 720 = 0,0215$.

Il minerale è otticamente negativo. In alcune sezioni normali ad y dei cristalli indicati ho osservato che la direzione n_p trovasi nell'angolo acuto $\beta = (001):(100) = 64^{\circ} 34 \frac{1}{2}'$ e forma con le tracce di sfaldatura secondo (001) un angolo di estinzione che oscilla di poco attorno al valore medio di $27^{\circ} 30'$. Si ha quindi un angolo: $\alpha:n_p = + 2^{\circ}$.

(1) Vedi JONNES PLOTNIKOW, «Photochem. Versucht.», Leipzig 1912, e v. A. BIANCHI e A. CAVINATO, *I minerali del Miage nel gruppo del M. Bianco*, «Atti Soc. Ital. Sc. Nat.», LXIV (1925), 152.

Dalle lamine di sfaldatura secondo (001) si osserva emergere uno degli assi ottici, con notevole inclinazione sulla normale alla base. Dai recenti lavori del prof. Zambonini sui cristalli misti della famiglia clinozoizite-epidoto risulta l'importanza della determinazione esatta dell'angolo fra questo asse ottico emergente da (001) e la normale a tale faccia, per la sua relazione col contenuto in ferro dei vari termini della serie (1).

Data la purezza e l'omogeneità del bel materiale a mia disposizione, ho creduto interessante eseguire su diversi cristalli questa determinazione. Le misure ottenute (al goniometro Fuess n. 2 col metodo indicato da Neumann e Groth) sono le seguenti:

coi cristalli delle figg. 1 e 2 (Nota 1^a) $23^{\circ} 8'$, $22^{\circ} 23'$, media $22^{\circ} 45'$;
con un altro cristallino scelto fra quelli impiegati per l'analisi: $22^{\circ} 27'$;
con due lamelle di sfaldatura pure appartenenti al materiale analizzato:
 $21^{\circ} 55'$, $23^{\circ} 15'$ media $22^{\circ} 35'$.

Possiamo quindi ritenere ben determinato il valore medio più probabile per la luce del sodio;

$$\omega = A.O. : \perp (001) = 22^{\circ} 37'$$

da cui si deduce, con $n_m = 1,7364$, l'angolo reale: $\omega' = 13^{\circ} 1'$.

Da questi valori, dall'angolo di estinzione misurato ($+ 2^{\circ}$), e dall'angolo $\beta = (001) : (100) = 64^{\circ} 34 \frac{1}{2}'$, si deducono i seguenti valori per l'angolo degli assi ottici:

$$2E = 100^{\circ} 5' \quad 2V = 80^{\circ} 53'.$$

Il valore della dispersione degli assi ottici ($\rho > \nu$) è piccolo, e da una determinazione approssimativa risulterebbe di circa $0^{\circ} 12'$; sarebbe quindi prossimo a quello osservato da Golschlag negli epidoti di Pfarrerb (9,67 % Fe_2O_3) e della Knappenwand (13,67 % Fe_2O_3).

Il peso specifico, determinato col picnometro è:

$$P. Sp. = 3,343.$$

Le ricerche del *Cr*, *Mn*, *Ti* non hanno dato risultato positivo. L'analisi quantitativa, eseguita su materiale perfettamente corrispondente a quello

(1) F. ZAMBONINI, *Sulla clinozoizite di Chiampertotto in Val d'Ala*. « Boll. R. Comitato Geologico d'Italia », 1918, XLVII, 65; id., *Sui cristalli misti stereoisomeri nella serie clinozoizite-epidoto*, « Rend. R. Accad. Lincei », XXX, Agosto 1921, pp. 80, 117, 162, 203 e sgg.

che servì per le precedenti determinazioni, ha dato i seguenti risultati (media di 2 analisi concordanti):

<i>Analisi</i>		<i>Rapporti molecolari</i>	
H ₂ O	2,05 %	0,1138	1,09
SiO ₂	37,87 %	0,6280	6
Al ₂ O ₃	26,33 %	0,2576	} 0,3210
Fe ₂ O ₃	10,13 %	0,0634	
CaO	24,10 %	0,4297	4,10
<hr/>			
100,48 %			

Come si vede, dall'analisi si arriva con buona approssimazione alla nota formola dell'epidoto: HCa₂(Al, Fe)₃Si₃O₁₃, con un rapporto Fe:Al = 1:4.

Il contenuto in peso di ferriepidoto di questo termine della famiglia è del 22,9 %. Se con le formole date da Zambonini ⁽¹⁾, partendo da questo contenuto in ferriepidoto dato dall'analisi, ricalcoliamo i valori probabili dell'angolo $2V$ e dell'angolo ω , otteniamo i seguenti risultati:

$$\begin{array}{llll} \omega = \text{calcolato} & 22^{\circ} 22' & \text{misurato} & \dots \dots 22^{\circ} 37' \\ 2V = & \text{»} & 79^{\circ} 16' & \text{ricavato dalle misure } 80^{\circ} 53' \end{array}$$

L'accordo, come si vede, è soddisfacente ed è specialmente notevole per il valore dell'angolo ω ⁽²⁾. Anche i valori dell'indice medio e dell'angolo di estinzione sono in buon accordo con la percentuale di ferriepidoto secondo i dati riportati dal Golschlag ⁽³⁾.

Per i rapporti fra la composizione chimica e le proprietà ottiche determinate, l'epidoto del Monte Rosso di Verra deve dunque essere considerato come un termine normale della serie di cristalli misti clinozoizite-epidoto.

(1) F. ZAMBONINI, *Sulla clinozoisite di Chiampernotto*, loc. cit., vedi p. 88 e 96 e sg.; le formole date da Zambonini sono:

$$\omega = -0^{\circ} 51,16' x + 41^{\circ} 53'; \quad 2V = 94^{\circ} 27' - 0^{\circ} 39,8' x$$

dove x indica la quantità % in peso di ferriepidoto.

(2) Per l'angolo reale corrispondente ω' , si avrebbe dalla formola di Zambonini ($\omega' = -0^{\circ} 28,32' x + 23^{\circ} 12'$) il valore di $12^{\circ} 24'$. Anche per questo valore l'accordo del calcolato col valore determinato $\omega' = 13^{\circ} 1'$, è sufficiente. Tale confronto però ha un peso naturalmente inferiore a quello che si ha per l'angolo apparente, perchè v'influisce anche il valore dell'indice medio di rifrazione.

(3) M. GOLSCHLAG, *Ueber die optischen Eigenschaften der Epidotgruppe*. « Tscherm. Min. Mitt. », Vienna, 1917, XXXIV, 23; e *Ueber die optische Orientierung der Mineralien der Epidotgruppe*. « Tscherm. Min. Mitt. », Vienna 1915, XX, 217; 1916, VII.

Riportando infatti i punti rappresentativi di questo termine, con 22,9% di ferriepidoto, nei diagrammi coi quali Zambonini e Golschlag rappresentano le variazioni delle proprietà ottiche in funzione della composizione chimica nella serie isomorfa clinozoizite-epidoto, tali punti cadono presso le curve date da questi autori e precisamente vicino ai punti rappresentativi degli epidoti giallo-verdi di Pfarrer (Zöptau) e di Lusette (Val d'Ala)⁽¹⁾, che rispettivamente contengono 21,9% e 23,6% di ferriepidoto. Anche il valore della dispersione degli assi ottici è prossimo a quello dato per l'epidoto di Pfarrer (Zöptau), mentre un po' più elevata risulterebbe la differenza fra i valori estremi dell'indice medio nel rosso e nel bleu carico.

Nei cristalli a tinta giallo-verde più intensa, che generalmente presentano lo stesso abito più frequente dei cristalli giallo-verdognoli, oppure anche un abito tabulare secondo (001), e nelle parti periferiche o terminali più scure dei cristalli zonati, si può notare, con determinazioni approssimative al microscopio: che l'indice medio di rifrazione per le luce del sodio diventa nettamente maggiore di 1,737; che l'angolo di estinzione $\gamma : n_p$ oscilla fra $+ 2^\circ 30'$ e $+ 3^\circ$; e che l'angolo apparente fra l'asse ottico emergente dalla base e la normale a questa diminuisce fino a circa 17° - 18° . Si può quindi ammettere in base ai diagrammi ricordati, una variazione del contenuto in Fe_2O_3 fino al 13% circa, e forse, in qualche punto, fino ad un massimo del 14% circa. È da notare però che in questi cristalli più oscuri, o nelle parti a tinta più intensa degli altri, la distribuzione della tinta non è affatto uniforme. Perciò non ho creduto utile eseguire altre determinazioni più precise anche su questi termini.

In un cristallino di tinta gialla un po' più chiara di quella dei cristalli già studiati, per l'angolo ω ho misurato il valore $23^\circ 42'$, e in lamelle di sfaldatura ricavate da un altro cristallino chiaro e dalla parte più interna e più chiara di un cristallo zonato, ho osservato al microscopio per ω valori massimi approssimativi di 24° - 25° . I valori dell'indice medio si mantengono sempre poco inferiori a quello dell'ioduro di metilene (1,737) e l'estinzione secondo n_p rimane nell'angolo acuto β con $\gamma : n_p$ prossimo a $+ 1 \frac{1}{2}^\circ$, $+ 2^\circ$. Cosicché l'angolo $2V$ si mantiene inferiore a 90° , e il carattere ottico negativo. Non ho quindi osservato variazioni molto forti nel senso di un avvicinamento a termini con caratteri nettamente clinozoisitici.

Riporto ora il riassunto delle misure eseguite sui cristalli di epidoto del Monte Rosso, che per ragioni di spazio non ho potuto dare alla fine della Nota 1^a. Dall'elenco sono escluse le osservazioni relative alle forme nuove, che ho già riportate nel testo.

(1) Per l'epidoto di Lusette (Val d'Ala) ZAMBONINI (op. cit.) dà i valori:

Ferriepid. 23,6% , $\omega = 21^\circ 52'$, $\omega' = 12^\circ 19'$, $2V = 78^\circ 24'$,

e per l'epidoto di Pfarrer (Zöptau) abbiamo i valori:

Ferriepid. = 21,9% (KEHLDOERFER); $\omega = 23^\circ 19'$ (ZAMBONINI);

$\omega' = 13^\circ 9'$ (ZAMBONINI); $2V = 79^\circ 55'$ (KEHLDOERFER).

Angoli misurati	Valore calcolato (Kokscharow)	N.	Osservazioni	
			Limiti	Medie
(001) (100)	64°. 36'	15	64°. 28' — 64°. 44'	64°. 34 $\frac{1}{2}$ '
» (104)	12 . 57	3	12 . 42 — 12 . 50	12 . 45
» (101)	34 . 42	8	34 . 33 — 34 . 45	34 . 38
» (201)	46 . 11	2	46 . 21 — 46 . 33	46 . 27
» ($\bar{1}$ 02)	34 . 21	2	34 . 13 — 34 . 21	34 . 18
» (504)	38 . 39 $\frac{1}{2}$	1	—	38 . 38
» ($\bar{1}$ 01)	63 . 24	8	63 . 13 — 63 . 54	63 . 38
» ($\bar{3}$ 04)	50 . 54	1	—	50 . 49
(100) ($\bar{2}$ 01)	25 . 57	4	25 . 48 — 26 . 5	25 . 57
» (17.0.1)	2 . 36	2	2 . 32 — 2 . 45	2 . 38
(001) (011)	58 . 29	11	58 . 25 — 58 . 36	58 . 28
» (012)	39 . 12	6	39 . 7 — 39 . 14	39 . 11
(100) (110)	55 . —	10	54 . 54 — 55 . 5	54 . 59
(001) ($\bar{1}$ 11)	75 . 12	11	75 . 4 — 75 . 26	75 . 12
» (113)	28 . 57	8	28 . 30 — 29 . 12	28 . 59
» (111)	52 . 20	5	52 . 15 — 52 . 25	52 . 21
» (110)	75 . 45	10	75 . 35 — 75 . 48	75 . 41
(221) »	14 . 32 $\frac{1}{2}$	8	14 . 29 — 14 . 42	14 . 34
(100) (113)	52 . 28 $\frac{1}{2}$	3	52 . 27 — 52 . 52	52 . 38
(101) »	29 . 55	3	29 . 50 — 29 . 54	29 . 52
(001) (213)	33 . 28 $\frac{1}{2}$	4	33 . 28 — 33 . 30	33 . 29
(100) »	41 . 31	4	41 . 21 — 41 . 34	41 . 30
(001) (214)	27 . 54	1	—	27 . 53
(111) »	27 . 14	1	—	26 . 47
(100) (111)	69 . 4	14	68 . 55 — 69 . 8	69 . 4
» (311)	31 . 53	1	—	32 . 18
(001) »	82 . 1	1	—	82 . 45
(100) (344)	77 . 4	1	—	77 . 11
(111) »	8 . —	1	—	8 . 11
» (011)	33 . 53	7	33 . 43 — 33 . 54	33 . 51
(233) »	23 . 4	3	23 . 4 — 23 . 7	23 . 6
» (010)	30 . 33	1	—	30 . 39

Angoli misurati	Valore calcolato (Kokscharow)	N.	Osservazioni	
			Limiti	Medie
(100) (111)	49°. 53'	7	49°. 47' — 50°. 3'	49°. 52''
» (732)	36 . 9	3	35 . 58 — 36 . 11	36 . 3
(010) »	56 . 24	2	56 . 18 — 56 . 25	56 . 22
(110) »	23 . 35	4	23 . 29 — 23 . 36	23 . 34
(201) »	35 . 22	2	35 . 16 — 35 . 26	35 . 21
(010) (121)	19 . 26	4	19 . 26 — 19 . 41	19 . 33
(111) »	15 . 47	3	15 . 45 — 15 . 56	15 . 49
(221) »	16 . 50	2	16 . 43 — 16 . 54	16 . 49
(010) (151)	8 . 2	6	7 . 46 — 8 . 7	7 . 58
(100) »	85 . 2	1	—	85 . 10
(010) (2.11.2)	7 . 19	2	6 . 58 — 7 . 12	7 . 5
(100) »	94 . 31 $\frac{1}{2}$	2	94 . 31 — 94 . 36	94 . 34
(110) »	39 . 54	2	39 . 51 — 39 . 59	39 . 55
(010) (2.13.2)	6 . 12	2	6 . 5 — 6 . 19	6 . 12
(100) »	93 . 50	2	93 . 58 — 94 . —	93 . 59
(110) »	39 . 7	2	39 . 7 — 39 . 20	39 . 13
(101) (111)	54 . 37	7	54 . 47 — 55 . —	54 . 52
(100) (221)	61 . 19	9	61 . 9 — 61 . 32	61 . 18

Zoologia. — *Le correlazioni obbligatorie del vero tetraploidismo. (Gigantismo e grandezza cellulare)*⁽¹⁾. Nota di CESARE ARTOM presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Negli studi di Genetica vengono dette razze e specie tetraploidi quelle in cui, un duplice normale corredo cromosomico di una determinata specie, risulta esattamente raddoppiato. Evidentemente, data tale definizione, non possono venire considerati come casi di tetraploidismo tutti quelli, in cui il raddoppiamento nel numero dei cromosomi è dovuto ad una semplice frammentazione dei singoli cromosomi dello stato diploide. Del resto in questi casi la grandezza nucleare e cellulare, rimanendo essa costante ed

(1) Dall'Istituto di Zoologia e Anatomia Comparata dell'Università di Sassari, pervenuto all'Accademia il 16 ottobre 1925.

eguale a quella dello stato diploide, è indice sicuro che la massa di sostanza cromatica non si è per nulla raddoppiata.

Altre volte in nuovi stipiti ottenuti specialmente con pratiche di ibridismo, (per quanto il numero dei cromosomi non sia raddoppiato), si osserva una certa maggior grandezza cellulare, ma essenzialmente si notano caratteristiche bene evidenti di gigantismo. In questi casi i singoli cromosomi per quanto si conservino allo stato diploide, sono forse, singolarmente considerati, aumentati di massa. Ad ogni modo il fatto più saliente, cioè rigoglio di sviluppo e conseguente gigantismo, è esclusivamente da imputare all'*eterosi*, termine col quale si vuole per l'appunto indicare l'eterogeneità dei fattori ereditari contenuti nell'ibrido.

Date queste incertezze, solo quando l'esame citologico dimostri in uno stipite un quadruplici assetto cromosomico in confronto di quello duplice di uno stipite, razza o specie vicina, si è di fronte a casi di reale tetraploidismo. Per ragioni però ampiamente svolte altrove⁽¹⁾, tale definizione non è del tutto sufficiente. A mio credere, cioè, non devono essere considerati come esempi di vero tetraploidismo tutti quelli in cui il raddoppiamento nel numero dei cromosomi avviene per cause accidentali all'inizio dello sviluppo. Nei detti casi lo zigote non ha acquisito una bivalenza armonica in tutte le altre parti organo-formative; è quindi probabile che vi sia la tendenza ad un ritorno al normale assetto diploide; ciò che vi è di certo si è che in questi casi il tetraploidismo non è per nulla correlato al gigantismo. In conclusione ritengo che possa definirsi come tetraploide uno stipite il quale derivi da uno zigote bivalente sotto tutti i riguardi: indice sicuro di questa bivalenza si è una maggior grandezza cellulare e nucleare, assolutamente duratura, per tutti i tessuti, il che imprime al nuovo stipite tutto un complesso di caratteri nuovi, tra i quali il più evidente, il gigantismo.

Nel campo zoologico l'*Artemia salina* partenogenetica tetraploide è sino ad ora l'unica specie, la quale si presti a controllare in modo esatto per tutti i tessuti quali sono le conseguenze dello stato tetraploide.

Ho creduto quindi opportuno illustrare più ampiamente di quanto io non abbia già fatto, quali sono le correlazioni obbligatorie in un caso veramente tipico di tetraploidismo naturale.

Per le mie ricerche comparative ho utilizzato essenzialmente l'*Artemia salina* diploide di Cagliari e l'*Artemia salina* tetraploide di Portorose (Trieste) raccogliendo io stesso il materiale⁽²⁾. Espongo senz'altro i risultati nuovi sino ad oggi ottenuti.

(1) *Gigantismo e costituzioni genetiche nelle razze e nelle specie tetraploidi* in « Rivista di Biologia » fascicolo IV, vol. VII, 1925. A tale lavoro rimando anche per la Bibliografia sull'argomento.

(2) Debbo vivi ringraziamenti ai professori Giglio-Tos di Cagliari, Sella di Rovigno, Stenta e Müller di Trieste, per le facilitazioni e gli aiuti prestatimi per la preparazione del materiale.

Gigantismo. Allo stato adulto questo carattere non è sempre molto evidente; è noto però che mentre l'*Artemia* tetraploide può raggiungere come massimo di lunghezza i 18 mm., l'*Artemia* diploide raggiunge un massimo di 14 mm.

La dimostrazione chiara e persuasiva del gigantismo, è data dalla comparazione di embrioni delle due *Artemie* nello stesso stato di sviluppo. Gli embrioni dell'*Artemia* tetraploide di forma assai meno snella di quelli dell'*Artemia* diploide, costituiti dello stesso numero di cellule, sono molto più grandi, perchè le cellule stesse, sono tutte di dimensioni maggiori.

Grandezza cellulare e nucleare. Dopo avere confermate le mie precedenti ricerche al riguardo delle cellule dei gangli ottici e dell'intestino medio ho preso in esame la parete dell'utero. Questo tessuto con le sue cellule piatte e uniformi, si presta assai bene per una comparazione: risulta in modo indubbio che le cellule sono nell'*Artemia* tetraploide visibilmente assai più grandi.

Ho preso poi in esame le cellule del plasma circolante, il quale come è noto, è nell'*Artemia* di colore rosso, in causa dell'Emoglobina disciolta. Gli elementi cellulari, sui quali nulla si sa nè al riguardo dell'origine, nè al riguardo del loro moltiplicarsi, sono invece (mi pare) incolori. Le cellule del sangue sono nell'*Artemia* varie di forma e di grandezza. Anche il nucleo assume dimensioni ed aspetti diversi. Sono poi molto evidenti in tali cellule nucleoli più o meno numerosi. Forse questi nucleoli derivano dal nucleo; in quanto che si osserva che quanto più il nucleo è piccolo, tanto maggiore è il loro numero. Orbene, non ostante la grande oscillazione nella grandezza di tali cellule, facendo delle larghe medie, risulta sempre che gli elementi del sangue sono molto più grandi nell'*Artemia* tetraploide che in quella diploide. Inoltre ciò che subito colpisce l'occhio, anche su preparati usualmente colorati, si è la grande differenza nella compagine del nucleo e dei nucleoli. Nell'*Artemia* tetraploide essi sono di aspetto vescicoso: nell'*Artemia* diploide essi sono molto più compatti. È questo un carattere di distinzione molto evidente.

Ho voluto poi prendere in esame le 11 paia di gangli della catena gangliare ventrale, i quali, come è noto corrispondono alle 11 paia di estremità. Le aree dei nuclei di tali cellule del sistema nervoso stanno nelle due *Artemie* nel rapporto da 1 a 2. Costante (mi sembra) nelle due *Artemie* il numero delle cellule che costituisce ciascun ganglio. Questi sono in tal modo visibilmente più grandi nell'*Artemia* tetraploide, appunto perchè costituiti di cellule in eguale numero, ma tutte più grandi.

Ho iniziato anche qualche ricerca sulla muscolatura. Per ora ho fatto solamente delle comparazioni su sezioni trasversali interessanti parti perfettamente omologhe nelle due *Artemie*. Risulta anzitutto evidente che le quattro principali masse muscolari le quali decorrono lungo tutto il corpo (due dorsali a destra e a sinistra del vaso dorsale, e due ventrali a destra

e a sinistra della catena gangliare), sono di maggiori dimensioni nell'*Artemia* tetraploide.

Le miofibrille costituenti le singole piccole masse muscolari, appaiono nei tagli trasversali, colorati coll'ematossilina ferrica, abbastanza bene individualizzabili. Osservate a forte ingrandimento esse sembrano come tubetti con una parete di una certa consistenza, forse ripieni di sostanza fluida. Io ho l'impressione che il calibro delle singole miofibrille sia notevolmente maggiore nei muscoli dell'*Artemia* tetraploide. Così che, per quanto io mi voglia esprimere al riguardo con un certo riserbo, sarei indotto a considerare le masse muscolari dell'*Artemia* tetraploide, più grandi di quelle dell'*Artemia* diploide, non già perchè esse sieno costituite di un maggior numero di miofibrille, ma perchè le miofibrille stesse sono più grandi di calibro, e naturalmente anche perchè il sarcoplasma è in maggiore quantità. Non so se riuscirò a procedere al conteggio delle miofibrille in due masse muscolari delle due *Artemie* perfettamente omologhe tra loro. Allo stato attuale delle mie osservazioni propenderei però realmente per credere che masse muscolari omologhe delle due *Artemie* sieno costituite dello stesso numero di miofibrille, di grandezza diversa, il che mi parrebbe del resto una conseguenza logica di quello che si deve ammettere; e che cioè anche nel *mioblasto* dell'*Artemia* tetraploide, i materiali con cui verranno edificate le singole miofibrille, debbano trovarsi allo stato di bivalenza.

Che realmente anche le più fini strutture cellulari sieno bivalenti nell'*Artemia* tetraploide in confronto di quella diploide lo dimostra il fatto che per esempio l'apparato reticolare del Golgi, che con grande difficoltà, coll'impregnazione argentea, sono riuscito a mettere in evidenza nelle cellule secernenti dell'intestino anteriore, è visibilmente di dimensioni molto maggiori nell'*Artemia* tetraploide. Anche quest'apparato debba o non debba, considerarsi come un costituente della cellula, caratteristico e permanente, deve, necessariamente in una cellula bivalente essere perfettamente proporzionato alla cellula stessa, anche nel caso in cui non si voglia ammettere tutta l'importanza che molti gli assegnano nella proliferazione cellulare.

In conclusione, da queste mie ricerche che ho voluto sinteticamente qui riassumere, risulta assolutamente dimostrato quali sono secondo me le correlazioni obbligatorie del vero tetraploidismo. Il caso dell'*Artemia* salina tetraploide è un caso veramente tipico, un vero esperimento nelle condizioni naturali, di quali sono le conseguenze morfologiche (gigantismo e grandezza cellulare) dell'essere riunite in un uovo che sta per svilupparsi tutte le sostanze organo formative (sostanze nucleari e sostanze citoplasmatiche) in condizioni armonicamente bivalenti. Sono queste condizioni in qualunque modo esse possano essere state acquisite, per l'appunto la causa determinante le profonde modificazioni nella struttura del corpo, nel ricambio fisiologico, nel modo di riprodursi dell'*Artemia* salina tetraploide; per modo che risulta sempre maggiormente convalidata la netta distinzione da me istituita, tra le *Artemie* diploidi e quelle tetraploidi.

Fisiologia. — *Il significato fisiologico-etologico dei caratteri sessuali secondari nelle Gambusie* ⁽¹⁾. Nota dei d.ri BRUNELLI GUSTAVO e REMOTTI ETTORE, presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE.

È noto che i Ciprinodonti vivipari si prestano, come già ha rilevato Champy (*Sexualité et Hormones*, Gaston Doin, Paris 1924), allo studio dei caratteri sessuali secondari.

Nello studiare la circolazione embrionale della *Gambusia holbrooki*, uno di noi (Brunelli) fermò la sua attenzione sulla forte pigmentazione della membrana ovarica, che, vista per trasparenza, data anche la distensione del tegumento nelle femmine giunte a maturità sessuale, determina la macchia addominale del sesso femminile, è parve interessante seguire lo sviluppo di tale macchia in rapporto al metabolismo dell'ovario, anche per la discussione intorno alle genesi dei caratteri sessuali secondari. Sembra che la pigmentazione della membrana sia in rapporto con l'intenso metabolismo delle uova ovariche, che in un pesce viviparo è naturalmente più intenso (Brunelli). Con ciò si spiegherebbe anche come tali caratteri sessuali secondari nei Ciprinodonti siano tardivi (Champy).

Durante lo sviluppo si può seguire la progressiva deposizione del pigmento (Remotti), in particolari aree pigmentate.

La evidenza della macchia addominale si deve, come sopra si è accennato, alla distensione del tegumento, tanto che, in corrispondenza all'addome delle femmine pregne viene spostata l'embricatura delle squame; si deve poi notare che le gambusie sono molto trasparenti (Remotti), cosicchè si può pensare ad una funzione protettiva nei riguardi della luce.

Uno di noi (Brunelli) ha già dimostrato che nelle uova embrionate di alcuni pesci che si sviluppano in ambiente scuro non si sviluppano cromatofori in corrispondenza al vitello, come si riscontra nel cavalluccio marino, in cui si tratta veramente di uova incubate nella tasca addominale del maschio, ma le condizioni bioambientali sono simili a quelle di un pesce viviparo.

Anche nelle gambusie non vi sono cromatofori in corrispondenza al vitello, ma la funzione protettiva è data dalla membrana ovarica. Si è voluto da taluno, e specialmente da Fuchs, pensare a una funzione termoregolatrice dei cromatofori (R. F. Fuchs, *Die physiologische Funktion der Chromatophorensystems als Organ der physikalischen Wärmeregulierung der Poikilothermen*. « Sitzungsber. phys. med. Soz. Erlangen 1912 »), ipotesi che però per i poicilotermi è stata combattuta da Bauer; va piuttosto ricordata l'os-

(1) Lavoro eseguito dal R. Laboratorio Centrale di Idrobiologia. Roma.

servazione di Weidenreich che le uova più pigmentate sono quelle esposte alla luce (Weidenreich Fr., *Die Lokalisation des Pigmentes und ihre Bedeutung in Ontogenie und Phylogenie der Wirbeltiere*. « Zeitschrift Morfol. und Anropol. » 1912 - Festschr. f. Retzius 70 Geburtstag).

Nel nostro caso la pigmentazione della membrana ovarica sembra essere appunto in rapporto colla protezione della luce, tanto più che le gambusie si sviluppano in acque poco profonde, hanno anzi l'abitudine « di battere con preferenza durante la stagione calda i punti ove l'acqua è scarsa, e cioè le sponde degli acquitrini » (vedi Bini G., *Relazione sulla lotta antimalarica svolta dal 1918 al 1925*, Roma, Tipografia Castaldi 1925. Analoghe osservazioni sono state fatte anche da altri autori), cosicchè vivono in ambienti intensamente illuminati. Ciò spiega anzi la forte resistenza delle gambusie a svilupparsi in acque basse e paludose, che è di tanta utilità in questo pesciolino nella lotta antilarvale anofelica.

La viviparità ha così permesso a questo pesciolino la conquista di un ambiente in cui la lotta per la esistenza è difficile (Brunelli), vi è perciò una analogia con quanto ammette Cuénot circa la conquista di nuovi ambienti da parte degli anfibî vivipari rispetto agli ovipari.

Discussione intorno alla teoria della elezione sessuale nei riguardi dei pesci vivipari.

Le suddette osservazioni si prestano ad alcune considerazioni (Brunelli) intorno alle teorie della selezione sessuale.

La teoria di Darwin che voleva spiegare i caratteri sessuali secondari mediante la selezione sessuale è stata come è noto modificata da diversi autori.

In particolare Moritz Wagner ha voluto spiegare colla differenza fisiologica dei sessi e col diverso ambiente in cui si sviluppano alcune differenze, come la colorazione ordinariamente più modesta degli individui di sesso femminile.

Kramer, Jager, Eimer, Wallace ed altri autori hanno invocato all'infuori della selezione sessuale, la costituzione diversa dei due sessi per spiegare il dimorfismo sessuale.

Spetta tra i primi ad Emery il merito di aver poi invocato una azione diretta della secrezione interna delle ghiandole genitali su certi tessuti dell'organismo, per spiegare i caratteri sessuali secondari (teoria correlativa dei caratteri sessuali secondo Plate).

Secondo Wallace e Reichenau i caratteri sessuali secondari sono dovuti ad un superfluo di energia vitale del sesso maschile, che subisce minor perdita del sesso femminile per la propagazione della specie. La massa di sostanze che questo fornisce alle uova e agli embrioni, come ricorda Délage, le cure da dare alle uova per covarle, deviano una quantità di succhi nutritivi, che nel maschio (come negli uccelli) possono formare ad esempio le creste, le luoghe piume, i colori brillanti, ecc. La elezione sessuale interverrebbe in un secondo tempo.

Douglas mostra dei casi in cui le ornamentazioni dei maschi non saprebbero spiegarsi mediante la selezione sessuale, e Hickson conclude nello stesso modo.

Nel caso che abbiamo descritto la macchia addominale è in intimo rapporto col metabolismo dell'ovario e colla trasparenza dei tegumenti, e sembrerebbe difficile fare appello alla elezione sessuale, per quanto nelle Gambusie i maschi sembrano in minor numero rispetto alle femmine.

Un caso simile, se non analogo, è quello ricordato da Dybowski dell'intensa colorazione degli individui femminili dei gammaridi del lago Baikal al tempo della riproduzione (Dybowski W., *Beiträge zur näheren Kenntnis des in Baikalsee Vorkommenden niederen Krebse aus der Gruppe der Gammariden.- Beiheft zum*, vol. 10, Horae Soc. Entomolog. Rossicae 1874). Nei casi suddetti vi è una transizione tra i caratteri sessuali primari e quelli secondari, e lo stesso può dirsi nei Ciprinodonti vivipari della pinna copulatrice del maschio. È perciò che i caratteri sessuali secondari in alcuni animali vivipari, non sembrano poter rientrare nelle categorie dei caratteri sessuali secondari enunciate nella nota opera di Giovanni Canestrini (*Per l'evoluzione. Recensioni e nuovi studi*, Unione Tipografico-editrice, Torino, 1897). I caratteri sessuali secondari delle femmine dei Ciprinodonti vivipari sembrano dunque in rapporto non colla elezione sessuale Darwiniana, che comunque verrebbe invertita, ma colla protezione della prole, e col metabolismo della gonade.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Viene approvata la inserzione nei volumi accademici, su relazione favorevole dei Soci MATTIROLO, rel., e PIROTTA, della Memoria: « Laobulbeniali osservati nelle collezioni del R. Museo Zoologico di Torino », della dott.^{ssa} Silvia Colla.

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

L'Accademico Segretario presenta, in seguito a richiesta degli autori, perchè siano sottoposte ad esame, le due Memorie seguenti:

AYÒ, « Chimico-Fisica-Matematica ».

GIULIANI, « Elettrolisi-Terapia ».

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente ricorda le dolorose perdite di soci durante le ferie e commemora brevemente il prof. VIOLA, valoroso mineralogo; il prof. RICCI-CURBASTRO, il cui nome è legato alla scoperta da lui fatta del calcolo differenziale assoluto, fondamento delle teorie della relatività; il belga MASSART,

illustre botanico; FELICE KLEIN, matematico eminente, al quale si debbono molte feconde iniziative; lo SCHWEINFURTH, che appartenne, con Livingstone e Stanley, al periodo eroico dei grandi viaggiatori. Per la Classe di scienze morali devesi lamentare la morte del dotto archeologo DE PETRA, dell'insigne maestro di storia del diritto prof. SCHUPFER, e del Socio straniero, archeologo HOMOLLE.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario CASTELNUOVO presenta le numerose pubblicazioni giunte in dono, segnalando fra queste il volume avente per titolo: « I Tipi Umani » del Socio DAINELLI in collab. con BIASUTTI; e poi varie pubblicazioni di Storia della Scienza di A. MIELI; l'« Anatomia e fisiologia dell'occhio nella serie animale » di G. OVIO; e una ristampa delle « Opere » di AGOSTINO BASSI, fatta sotto gli auspici della Società medico-chirurgica di Pavia.

COMUNICAZIONI VARIE

Nel dichiarare aperta la prima seduta del nuovo anno accademico, il Presidente senatore Volterra richiama l'attenzione dei Soci sul prezioso materiale dell'antico Museo Copernicano, collocato nella grande aula delle adunanze, e nelle sale prossime. In questi locali il Museo avrà temporanea sede, in attesa di apposita, migliore collocazione a sè, nel palazzo accademico. Ma intanto fa noto che la biblioteca, i globi, gl'istrumenti scientifici ecc. sono a disposizione degli studiosi.

Il sen. Volterra dà poscia notizia dei vari Congressi scientifici che si tennero durante le ferie accademiche, tra i quali quello del Consiglio internazionale di Ricerche, di cui si costituì e si riunì la Sezione biologica oltre a quelle di fisica. Due Congressi di Chimica si ebbero inoltre, l'uno generale a Bucarest, e l'altro di Chimica industriale a Parigi; quest'ultimo porse l'occasione di celebrare il centenario di pratiche invenzioni del grande chimico Chevreul. Furono rievocate le numerose ed utili scoperte di questo insigne scienziato che fu anche Socio Lincèo. Il Presidente ricorda anche il Congresso del « carbone bianco » tenutosi a Grenoble, congresso al quale il Socio ing. Fantoli rappresentò egregiamente il nostro paese. Da ultimo fa menzione del centenario dell'Accademia Russa alla cui celebrazione il Socio Levi Civita rappresentò l'Accademia.

Il Presidente presenta due pieghi suggellati inviati, perchè siano conservati negli Archivi accademici, dai signori S. MINETTI e dott. A. PAIS.

G. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 15 novembre 1925.

V. SCIALOJA, *presidente*

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Meccanica. — *Moti gravitazionali in una dimensione.* Nota del Socio T. LEVI-CIVITA ⁽¹⁾.

1. — Consideriamo un mezzo indefinito (per es. pulviscolo cosmico), il quale sia soggetto unicamente alla mutua attrazione delle particelle materiali che lo costituiscono. Facciamo l'ipotesi particolare che, in un certo istante, la densità μ vari per strati piani, paralleli ad una orientazione fissa $Oy\zeta$: sia cioè μ funzione unicamente della coordinata x . Anche la attrazione newtoniana a (esercitata, in quell'istante, dal sistema sull'unità di massa, in un posto generico x, y, ζ) sarà una funzione della sola x . In tal caso, purchè la velocità v , nello stesso istante, sia ovunque diretta secondo Ox e funzione pur essa della sola x , è chiaro che il moto del sistema si inizierà e avverrà sempre nel seguito parallelamente all'asse delle x con comportamento rigido dei singoli piani normali a quest'asse.

Si può quindi prescindere dalle coordinate trasversali y, ζ e limitarsi a considerare il moto rettilineo delle particelle appartenenti ad una generica retta perpendicolare agli strati: diciamo all'asse Ox . Mi propongo di mostrare che si può giungere alla caratterizzazione completa di un tal moto rettilineo per gravitazione, a partire da una distribuzione iniziale arbitraria

(1) Presentata nella seduta del 1° novembre 1925.

della velocità e della densità. Lo stesso vale anche per moti rettilinei gravitazionali dotati di simmetria sferica attorno ad un centro; ma di ciò non mi occupo nella presente Nota.

2. - Giova impostare il problema del moto sotto l'aspetto molecolare o lagrangiano, risguardando l'ascissa x di una generica particella e così la sua densità μ quali funzioni del tempo t e dell'ascissa iniziale x_0 , assumendosi $t = 0$ come istante iniziale. Le nostre incognite saranno dunque le funzioni $x(t, x_0)$, $\mu(t, x_0)$, che supporremo, ben si intende, nel corso della ricerca, finite, continue e derivabili quanto occorre, riservandoci di riconoscerlo a posteriori (in base ad opportune ipotesi concernenti i dati della questione) sulle espressioni esplicite che perverremo ad assegnarne.

In particolare riterremo che, nell'intervallo di tempo cui si riferiscono le nostre considerazioni, interceda corrispondenza *biunivoca* fra x ed x_0 , ossia che l'equazione

$$(1) \quad x = x(t, x_0)$$

sia atta a definire x_0 come funzione uniforme di x e di t , anch'essa finita, continua e derivabile.

Con ciò è legittimo associare, quando si voglia, all'impostazione molecolare del moto di cui si tratta, quella locale, e si può intanto - per noi sarà sufficiente - fare intervenire l'aspetto locale della densità, cioè la funzione $\mu(t, x)$ che si ottiene da $\mu(t, x_0)$ sostituendo, al posto di x_0 , la sua espressione ricavata dalla (1).

La funzione $\mu(t, x)$ permette di calcolare istante per istante (sotto forma pure locale) l'attrazione newtoniana $a(t, x)$, esercitata dall'intero sistema materiale sopra l'unità di massa nel posto generico x . All'uopo basta ricordare che uno strato piano indefinito di densità uniforme μ e di spessore infinitesimo $d\xi$, cioè di densità superficiale $\mu d\xi$, esercita in un punto di ascissa generica x una attrazione elementare (indipendente da x) data in valore assoluto da ⁽¹⁾

$$2\pi f\mu d\xi \quad (f \text{ costante di attrazione universale}),$$

e, naturalmente, rivolta dal punto potenziato di ascissa x verso lo strato potenziante di ascissa ξ . La componente secondo Ox di tale attrazione elementare è per conseguenza $\pm 2\pi f\mu d\xi$, valendo il segno superiore per $x < \xi$ e l'inferiore per $x > \xi$.

Sommando i vari contributi elementari risulta

$$(2) \quad a(t, x) = -2\pi f m_1 + 2\pi f m_2,$$

(1) Cfr. per es. LEVI-CIVITA' e AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*, vol. I (Bologna, Zanichelli, 1923), p. 507, es. 5, in cui si faccia crescere indefinitamente il raggio R .

ove si è posto, per brevità di scrittura,

$$(3) \quad m_1 = \int_{-\infty}^x \mu(t, \xi) d\xi, \quad m_2 = \int_x^{\infty} \mu(t, \xi) d\xi.$$

Si è così implicitamente introdotta, fra le specificazioni qualitative da controllare a posteriori, anche l'integrabilità della funzione $\mu(t, x)$, rispetto all'argomento x , fino a $\pm \infty$.

Avendo riguardo alle (3), la derivazione della (2) porge

$$(4) \quad \frac{\partial a(t, x)}{\partial x} = -4\pi f\mu,$$

che è manifestamente l'equazione di Poisson per il caso elementare di cui si tratta.

Le quantità m_1, m_2 definite dalle (3) hanno un significato ovvio: m_1 rappresenta la massa totale del sistema (per unità di sezione trasversale) che si trova a sinistra del posto x ; m_2 rappresenta l'analoga massa a destra. Essenziale è la circostanza, derivante dal principio di conservazione della massa, che, durante il moto del sistema, rimangono inalterate le masse complessive da una parte e dall'altra di ogni piano sostanziale, cioè sempre costituito dalle stesse particelle materiali. Ne viene che m_1, m_2 sono caratteristiche intrinseche d'ogni particella materiale, ossia non variano col tempo, ma conservano le loro determinazioni iniziali, dipendendo soltanto dalla particella e per essa dalla sua posizione iniziale x_0 .

Potremo in conformità ritenere quali espressioni di m_1, m_2 quelle fornite dalla (3) per $t = 0$, ossia

$$(3') \quad m_1 = \int_{-\infty}^{x_0} \mu_0(\xi) d\xi, \quad m_2 = \int_{x_0}^{\infty} \mu_0(\xi) d\xi,$$

dove μ_0 sta a rappresentare la determinazione iniziale della densità.

In base alla (2), anche $a(t, x)$ si conserverà costante per ogni particella, e, designando con a_0 la sua determinazione iniziale, avremo

$$(2') \quad a(t, x) = a_0(x_0) = -2\pi f m_1 + 2\pi f m_2,$$

da cui scende tosto la soluzione del problema con mezzi elementari.

3. - Infatti le funzioni incognite $x(t, x_0), \mu(t, x_0)$ devono soddisfare l'equazione dinamica e quella di continuità. La prima, avuto riguardo alla (2'), si scrive

$$(5) \quad \ddot{x} = a_0(x_0),$$

rappresentandosi al solito con punti sovrapposti le derivazioni sostanziali, cioè rispetto a t , quando si tratta x_0 come costante.

della velocità e della densità. Lo stesso vale anche per moti rettilinei gravitazionali dotati di simmetria sferica attorno ad un centro; ma di ciò non mi occupo nella presente Nota.

2. - Giova impostare il problema del moto sotto l'aspetto molecolare o lagrangiano, riguardando l'ascissa x di una generica particella e così la sua densità μ quali funzioni del tempo t e dell'ascissa iniziale x_0 , assumendosi $t = 0$ come istante iniziale. Le nostre incognite saranno dunque le funzioni $x(t, x_0)$, $\mu(t, x_0)$, che supporremo, ben si intende, nel corso della ricerca, finite, continue e derivabili quanto occorre, riservandoci di riconoscerlo a posteriori (in base ad opportune ipotesi concernenti i dati della questione) sulle espressioni esplicite che perverremo ad assegnarne.

In particolare riterremo che, nell'intervallo di tempo cui si riferiscono le nostre considerazioni, interceda corrispondenza *biunivoca* fra x ed x_0 , ossia che l'equazione

$$(1) \quad x = x(t, x_0)$$

sia atta a definire x_0 come funzione uniforme di x e di t , anch'essa finita, continua e derivabile.

Con ciò è legittimo associare, quando si voglia, all'impostazione molecolare del moto di cui si tratta, quella locale, e si può intanto - per noi sarà sufficiente - fare intervenire l'aspetto locale della densità, cioè la funzione $\mu(t, x)$ che si ottiene da $\mu(t, x_0)$ sostituendo, al posto di x_0 , la sua espressione ricavata dalla (1).

La funzione $\mu(t, x)$ permette di calcolare istante per istante (sotto forma pure locale) l'attrazione newtoniana $a(t, x)$, esercitata dall'intero sistema materiale sopra l'unità di massa nel posto generico x . All'uopo basta ricordare che uno strato piano indefinito di densità uniforme μ e di spessore infinitesimo $d\xi$, cioè di densità superficiale $\mu d\xi$, esercita in un punto di ascissa generica x una attrazione elementare (indipendente da x) data in valore assoluto da ⁽¹⁾

$$2\pi f\mu d\xi \quad (f \text{ costante di attrazione universale}),$$

e, naturalmente, rivolta dal punto potenziato di ascissa x verso lo strato potenziante di ascissa ξ . La componente secondo Ox di tale attrazione elementare è per conseguenza $\pm 2\pi f\mu d\xi$, valendo il segno superiore per $x < \xi$ e l'inferiore per $x > \xi$.

Sommando i vari contributi elementari risulta

$$(2) \quad a(t, x) = -2\pi f m_1 + 2\pi f m_2,$$

(1) Cfr. per es. LEVI-CIVITA' e AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*, vol. I (Bologna, Zanichelli, 1923), p. 507, es. 5, in cui si faccia crescere indefinitamente il raggio R .

ove si è posto, per brevità di scrittura,

$$(3) \quad m_1 = \int_{-\infty}^x \mu(t, \xi) d\xi, \quad m_2 = \int_x^{\infty} \mu(t, \xi) d\xi.$$

Si è così implicitamente introdotta, fra le specificazioni qualitative da controllare a posteriori, anche l'integrabilità della funzione $\mu(t, x)$, rispetto all'argomento x , fino a $\pm \infty$.

Avendo riguardo alle (3), la derivazione della (2) porge

$$(4) \quad \frac{\partial a(t, x)}{\partial x} = -4\pi f\mu,$$

che è manifestamente l'equazione di Poisson per il caso elementare di cui si tratta.

Le quantità m_1, m_2 definite dalle (3) hanno un significato ovvio: m_1 rappresenta la massa totale del sistema (per unità di sezione trasversale) che si trova a sinistra del posto x ; m_2 rappresenta l'analoga massa a destra. Essenziale è la circostanza, derivante dal principio di conservazione della massa, che, durante il moto del sistema, rimangono inalterate le masse complessive da una parte e dall'altra di ogni piano sostanziale, cioè sempre costituito dalle stesse particelle materiali. Ne viene che m_1, m_2 sono caratteristiche intrinseche d'ogni particella materiale, ossia non variano col tempo, ma conservano le loro determinazioni iniziali, dipendendo soltanto dalla particella e per essa dalla sua posizione iniziale x_0 .

Potremo in conformità ritenere quali espressioni di m_1, m_2 quelle fornite dalla (3) per $t = 0$, ossia

$$(3') \quad m_1 = \int_{-\infty}^{x_0} \mu_0(\xi) d\xi, \quad m_2 = \int_{x_0}^{\infty} \mu_0(\xi) d\xi,$$

dove μ_0 sta a rappresentare la determinazione iniziale della densità.

In base alla (2), anche $a(t, x)$ si conserverà costante per ogni particella, e, designando con a_0 la sua determinazione iniziale, avremo

$$(2') \quad a(t, x) = a_0(x_0) = -2\pi f m_1 + 2\pi f m_2,$$

da cui scende tosto la soluzione del problema con mezzi elementari.

3. - Infatti le funzioni incognite $x(t, x_0), \mu(t, x_0)$ devono soddisfare l'equazione dinamica e quella di continuità. La prima, avuto riguardo alla (2'), si scrive

$$(5) \quad \ddot{x} = a_0(x_0),$$

rappresentandosi al solito con punti sovrapposti le derivazioni sostanziali, cioè rispetto a t , quando si tratta x_0 come costante.

L'equazione di continuità lega $\mu(t, x)$ alla sua determinazione iniziale $\mu_0(x_0)$ per mezzo della prima incognita $x(t, x_0)$, sotto la forma

$$(6) \quad \mu \frac{\partial x}{\partial x_0} = \mu_0.$$

Essa traduce notoriamente il principio di conservazione della massa, di cui già ci siamo valse al numero precedente per il calcolo di $a(t, x)$. Del resto tutto è incluso nella condizione differenziale (6), sicchè in particolare la constatazione che m_1, m_2 , e quindi $a(t, x)$, sono invarianti rispetto al moto si potrebbe anche conseguire per materiale trasformazione delle (2) nelle (2'), in base alla (6).

4. - La (5) ci dice in primo luogo che il movimento delle singole particelle è uniformemente accelerato: però l'accelerazione $a_0(x_0)$ è in generale variabile da particella a particella in dipendenza dalle circostanze iniziali.

Per completare lo studio del moto, assegniamo le espressioni integrali esplicite delle funzioni x e μ .

La (5), integrata una prima volta rispetto a t , a partire dall'istante iniziale $t = 0$, dà

$$\dot{x} = a_0 t + v_0,$$

designando $v_0(x_0)$ (costante di integrazione rispetto a t) la velocità iniziale. Questa va considerata un dato della questione assieme alla $\mu_0(x_0)$ che caratterizza la distribuzione iniziale della densità.

Con ulteriore integrazione fra 0 e t , atteso il significato di x_0 , si trae

$$(7) \quad x = a_0 t^2/2 + v_0 t + x_0.$$

Il coefficiente a_0 si desume da μ_0 attraverso le (2') e (3'); con tale intesa la (7) costituisce l'espressione definitiva della funzione $x(t, x_0)$.

Se ne ricava

$$\frac{\partial x}{\partial x_0} = a'_0 t^2/2 + v'_0 t + 1,$$

dove gli apici indicano derivazioni rispetto all'argomento x_0 .

La equazione (4) (di Poisson), applicata all'istante iniziale, permette di sostituire a'_0 con $-4\pi f\mu_0$, sicchè potremo scrivere

$$(8) \quad \frac{\partial x}{\partial x_0} = 1 + v'_0 t - 2\pi f\mu_0 t^2,$$

e ottenere così dalla (6) quale espressione esplicita della densità

$$(9) \quad \mu = \frac{\mu_0}{1 + v'_0 t - 2\pi f\mu_0 t^2}.$$

5. — Il procedimento seguito assicura che le funzioni x e μ definite dalle (7) e (9), verificano effettivamente le volute condizioni: equazione di continuità ed equazione dinamica, rimanendo arbitrarie le funzioni $v_0(x_0)$ e $\mu_0(x_0)$, cioè la distribuzione iniziale delle velocità e densità. Basta pensare da un lato che la definizione (9) di μ non è altro che l'equazione di continuità (6); dall'altro che, per quanto si è visto al n. 2, l'attrazione $a(x, t)$, in virtù dell'equazione di continuità, si riduce semplicemente ad $a_0(x_0)$, sicchè la equazione del moto è proprio la (5), in base a cui è stata costruita la espressione (7) di x , c. d. d.

Si intende che la soluzione trovata rimane valida finchè sussistono le presupposte condizioni di comportamento qualitativo (continuità, derivabilità, integrabilità della $\mu(t, x)$ rispetto ad x fino a $\pm \infty$).

La (7) mostra in primo luogo che tutto va bene per quanto concerne la funzione $x(t, x_0)$, non appena i dati iniziali posseggono i requisiti suddetti. L'equazione di continuità 0, ciò che è lo stesso, la (9) assicura poi che lo stesso vale per μ finchè rimane diverso da zero il denominatore $\frac{\partial x}{\partial x_0}$, dato esplicitamente dalla (8), ossia finchè si ha corrispondenza biunivoca fra x_0 ed x (posizione iniziale e posizione attuale).

Essendo $\frac{\partial x}{\partial x_0}$ eguale all'unità per $t = 0$, si può intanto affermare che il moto del sistema è sempre regolare per t abbastanza piccolo. Ma risulta altresì dalla (8) che in nessun caso la regolarità può permanere indefinitamente al crescere di t . Questo perchè il coefficiente $-2\pi f\mu_0$ di t^2 in $\frac{\partial x}{\partial x_0}$ è negativo e il termine noto positivo, sicchè esiste una (e una sola) radice positiva t_1 della equazione di secondo grado

$$(10) \quad 1 + v_0 t - 2\pi f\mu_0 t^2 = 0.$$

Nell'ipotesi che la velocità iniziale sia nulla o uniforme, con che $v'_0 = 0$, si ha

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi f\mu_0}}.$$

Se per es. si trattasse di materia cosmica (molto diluita), avente una densità comparabile a quella della nebulosa dell'Orsa Maggiore, $\mu_0 = 3.6 \cdot 10^{-17}$, essendo, in unità C. G. S., $f = 6.7 \cdot 10^{-8}$, risulterebbe

$$t_1 = 8166 \text{ anni (solari)}.$$

6. — Vale la pena di indagare quali sono, per date circostanze iniziali, le eventuali posizioni x_0 in cui, prima che altrove, il moto cesserà di essere regolare: sono queste manifestamente le sezioni più esposte a scissioni o frazionamenti del sistema materiale. Chiameremo *ascisse critiche* queste

eventuali x_0 . In corrispondenza ad esse la radice positiva t_1 della (10) deve avere un valore minimo, il che, nei casi comuni⁽¹⁾, equivale a $\frac{dt_1}{dx_0} = 0$, $\frac{d^2 t_1}{dx_0^2} > 0$. Ne consegue, derivando la (10) (che diviene una identità per $t = t_1$) e riferendosi ai valori suddetti,

$$v_0'' t_1 - 2 \pi f \mu_0 t_1^2 = 0,$$

ossia, in quanto, per la (10) stessa, $t_1 > 0$,

$$(11) \quad v_0'' - 2 \pi f \mu_0 t_1 = 0.$$

L'eliminazione di t_1 dà l'equazione delle ascisse critiche

$$(12) \quad 4 \pi f \mu_0'^2 + v_0' v_0'' \mu_0' - \frac{1}{2} \mu_0 v_0''^2 = 0.$$

Si ha d'altra parte, derivando la (10) due volte rispetto ad x_0 e ponendovi, a derivazione eseguita, $t = t_1$, $\frac{dt_1}{dx_0} = 0$,

$$(13) \quad v_0''' t_1 - 2 \pi f \mu_0'' t_1^2 + (v_0' - 4 \pi f \mu_0 t_1) \frac{d^2 t_1}{dx_0^2} = 0,$$

che, tenuto conto delle precedenti, deve rendere $\frac{d^2 t_1}{dx_0^2} > 0$.

Nel caso particolare di una distribuzione iniziale di velocità a gradiente uniforme ($v_0'' = 0$) (in cui è naturalmente inclusa l'eventualità che sia addirittura costante o nulla la velocità iniziale), la (12) si riduce a $\mu_0' = 0$, e la (13), tenuto conto della (10), può essere scritta

$$\left\{ \frac{1}{t_1} + 2 \pi f \mu_0 \right\} \frac{d^2 t_1}{dx_0^2} + 2 \pi f \mu_0'' t_1^2 = 0$$

che porge per $\frac{d^2 t_1}{dx_0^2}$ un valore positivo allora e allora soltanto che $\mu_0'' < 0$.

Le sezioni critiche sono quindi in tal caso quelle di densità massima, come è del resto intuitivo, qualora si pensi che essendo in gioco esclusivamente la mutua attrazione, è soltanto l'indefinita costipazione di materia che può compromettere la regolarità del moto.

(1) Lascio così da banda gli eventuali minimi unilaterali che potrebbero presentarsi agli estremi, qualora il campo occupato dal sistema materiale non invadesse tutta la retta, ma fosse limitato a uno o più segmenti di essa (cfr. l'es. del n. 7); nonchè la circostanza eccezionale di annullamento simultaneo delle due prime derivate. Per questi casi si richiederebbe una piccola discussione supplementare.

7. - Rientra naturalmente nelle considerazioni precedenti anche una distribuzione iniziale che occupi soltanto un segmento finito dell'asse Ox .

Anche in tale ipotesi si può, volendo, rispettare la continuità della funzione $\mu_0(x_0)$ e magari delle derivate μ'_0, μ''_0 che abbiamo fatto intervenire nelle considerazioni del numero precedente. Basta assumere μ_0 nulla, eventualmente assieme a μ'_0, μ''_0 , agli estremi del detto segmento e diversa da zero nell'interno. Ma questo non è essenziale per la validità delle espressioni integrali (7) e (9), richiedendosi soltanto, se μ_0 presenta una qualche discontinuità, di tenerne debito conto nella discussione delle sezioni critiche.

Comunque, conveniamo di indicare con A e B le particelle materiali che costituiscono gli estremi del segmento; con α e β ($> \alpha$) le loro ascisse iniziali.

Dalle espressioni (2') di a_0 e (3') di m_1, m_2 risulta in questo caso che, per $x_0 \leq \alpha$, $a_0(x_0)$ ha il valore costante $2\pi fm$, mentre, per $x_0 \geq \beta$, ha il valore opposto $-2\pi fm$, m designando la massa totale del sistema.

Dopo ciò dalla (7) o, più direttamente, dalla (5) risulta che le particelle A e B, coda e fronte del sistema materiale, sono animate dalle accelerazioni rispettive $2\pi fm$, $-2\pi fm$, dirette entrambe verso l'interno del sistema. Più specificamente si ha dalla (7), applicandola a B e ad A e facendo la differenza,

$$s = s_0 + w_0 t - 2\pi f m t^2,$$

dove s designa la lunghezza del segmento AB all'istante t , s_0 la sua lunghezza iniziale, e w_0 la velocità iniziale (relativa) di B rispetto ad A. Ben si intende che ciò vale nei limiti di regolarità del moto indicati al n. 5.

Astronomia. — *Sopra la teoria delle ombre volanti nelle eclissi solari.* Nota del Corrisp. G. ARMELLINI ⁽¹⁾.

1. - Lo scopo di questa breve Nota è di colmare una lacuna esistente nella letteratura astronomica delle ombre volanti. Mentre infatti abbiamo pregevoli lavori che esaminano tale fenomeno dal lato storico e descrittivo, sembra che la loro teoria non sia stata ancora messa in giusta luce.

Riassumeremo quindi la questione in poche parole.

2. - È noto che nelle eclissi totali di sole, il fronte dell'ombra lunare che si avvanza sulla terra si presenta preceduta da lunghe striscie oscure (ombre volanti) parallele al fronte stesso. Ed analogamente, appena termi-

(1) Pervenuta all'Accademia l'8 ottobre 1925.

nata la fase di totalità dell'eclisse, si veggono sul terreno altre striscie di ombra che seguono l'ombra lunare, disposte sempre parallelamente alla linea terminatrice della stessa ombra lunare. Quanto alla larghezza di queste striscie è assai difficile eseguire stime sicure, sia per la loro grande velocità sia anche perchè i loro bordi sono sfumati e poco visibili: gli osservatori dicono però che essa varia tra qualche metro e pochi pollici (Lockyer).

Storicamente sembra che il primo che rivolse l'attenzione su questo curioso fenomeno sia stato il De Yoly a proposito dell'eclisse del 1706; ma osservazioni assai più accurate vennero fatte nelle eclissi totali del 1900, del 1905, del 1912 e del 1922. Non entriamo del resto in maggiori dettagli descrittivi, giacchè un'ampia notizia può vedersene in un diligente lavoro sulle *Ombre volanti* pubblicato dal prof. Horn dell'Università di Bologna⁽¹⁾, dove l'egregio collega riporta, con molta accuratezza, numerose osservazioni eseguite in proposito da vari astronomi. Soltanto non ci sembra di poter consentire nella teoria degli « spiragli atmosferici » allegata alla detta Memoria.

3. — Riassunti così sinteticamente i fenomeni, veniamo ad esporre quale ne sia la spiegazione più semplice e chiara; ciò che costituisce appunto l'oggetto della presente Nota.

Si tratta, secondo noi, di un *comune fenomeno di diffrazione*.

Per vedere la cosa più da vicino, ricordiamo che l'ombra proiettata da un corpo opaco sopra uno schermo è, in realtà, costituita non solo dalla cosiddetta ombra geometrica, ma anche di tanti anelli di diffrazione, alternativamente lucidi e oscuri, che circondano l'ombra stessa.

Se il corpo è uno sferoide, posto in un fascio parallelo di luce monocromatica, e se lo schermo s'immagina sufficientemente lontano e presso a poco normale all'asse del fascio, l'ombra sarà con grande approssimazione un cerchio, e gli anelli che la circondano saranno anche essi circolari. In questo caso elementare, la Fisica insegna che la distanza d_n dell'anello di posto n dal limite dell'ombra geometrica è data approssimativamente dalla formola:

$$(I) \quad d_n = \sqrt{n\lambda x}$$

dove λ è la lunghezza d'onda della luce monocromatica ed x la distanza dello sferoide dallo schermo.

Se, per metterci in un caso schematico, per sferoide prendiamo la luna, per schermo il suolo terrestre e come radiazione monocromatica la luce gialla dominante nelle radiazioni solari, x sarà uguale a circa 380000 chilometri e λ a circa 5000 unità Angstrom.

(1) Cfr. G. HORN: *Le Ombre volanti*. Publ. dall'« Osserv. Astr. della R. Università di Bologna », vol. I, n. 6.

Scegliendo come unità di lunghezza il metro lineare abbiamo allora $x = 380 \cdot 10^6$ e $\lambda = 5000 \cdot 10^{-10}$ e quindi sostituendo nella (1) otteniamo:

$$(2) \quad d_n = 13.8 \sqrt{n}.$$

Ponendo per n i successivi numeri interi 1, 2, 3 ecc. vediamo che nel caso elementare da noi supposto le varie striscie, lucide e oscure, che precedono e seguono l'ombra geometrica proiettata dalla luna sulla terra, distano in *metri lineari* dal limite dell'ombra geometrica di 13.8 di 19.4 di 23.9 di 27.6 di 30.8 di 33.8 ecc. Eseguendo le differenze, vediamo subito che la larghezza di queste striscie va diminuendo pian piano che ci allontaniamo ⁽¹⁾ dal limite dell'ombra geometrica, in modo da ridursi da qualche metro fino a pochi pollici per le striscie più lontane e più difficilmente visibili; precisamente come è stato osservato. Sarà poi inutile di aggiungere che queste striscie, essendo in realtà anelli che circondano l'ombra geometrica proiettata dalla luna sulla terra, dovranno apparire all'osservatore terrestre, che può scorgere solo una piccola porzione di terreno, come rettilinee e parallele al fronte ed al termine dell'ombra lunare.

3. - Naturalmente, nel caso reale, il fenomeno è un po' più complicato, non essendo la luce intercettata dalla luna dovuta ad un fascio parallelo, non essendo in generale la proiezione ortogonale, e trattandosi non già di radiazioni monocromatiche ma policromatiche ciò che cagiona frange multicolori ecc.

Ma si tratta di semplici questioni di dettaglio su cui sarebbe inutile di soffermarci: noi qui volevamo semplicemente mostrare che il fenomeno delle ombre volanti nelle eclissi è conseguenza naturale della diffrazione della luce.

(1) È facile anzi dimostrare che questa larghezza tende a zero come $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Si ha infatti dalla (2)

$$\begin{aligned} d_{n+1} - d_n &= 14.5 \left\{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right\} = 14.5 \sqrt{n} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right\} = \\ &= 14.5 \left\{ \frac{1}{2\sqrt{n}} + \text{term. sup.} \right\}. \end{aligned}$$

Chimica. — *I solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. IV. Solfati doppi di neodimio e sodio.* Nota⁽¹⁾ del Socio F. ZAMBONINI e del dott. G. CAROBBI.

Continuando le nostre ricerche⁽²⁾, daremo conto nella presente Nota, dei risultati ai quali ci ha condotto lo studio della parte per noi interessante del sistema $\text{Nd}_2(\text{SO}_4)_3 - \text{Na}_2\text{SO}_4 - \text{H}_2\text{O}$, come al solito per l'isoterma di 25°. Il solfato di neodimio adoperato era quello stesso del quale ci siamo serviti nelle nostre esperienze precedenti sui solfati di neodimio e potassio e di neodimio e tallio talloso. Le ricerche sono state eseguite con la tecnica più volte descritta.

Solfati doppi di neodimio e sodio non pare sieno stati finora descritti. Invece, Marignac e Cleve hanno fatto conoscere un solfato doppio di didimio e sodio, che risponde alla formula $\text{Di}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot \text{Na}_2\text{SO}_4$ con una quantità di acqua variabile dal 5 al 10 % secondo Marignac, mentre Cleve per il composto seccato su acido solforico ha trovato esattamente $2\text{H}_2\text{O}$. Il sale doppio così definito ha la stessa formula di quello che, come abbiamo già ricordato in un precedente lavoro, è stato preparato per il cerio, per il lantanio, per il samario, per il gadolinio e per l'ittrio.

I risultati delle nostre esperienze sono riuniti nella seguente tabella:

N. dell'esperienza	Composizione della fase liquida				Composizione del corpo di fondo				Costituenti del corpo di fondo
	Na_2SO_4	$\text{La}_2(\text{SO}_4)_3$	H_2O	$\frac{\text{Na}_2\text{SO}_4}{\text{H}_2\text{O}}$	La	H_2O	SO_4	$\frac{\text{La}_2(\text{SO}_4)_3}{\text{Na}_2\text{SO}_4}$	
1	17.95	—	82.05	0.219	16.88	3.18	59.14	0.53	2 — 3 — 5 + Na_2SO_4
2	17.61	—	82.39	0.214	33.80	5.97	51.71	2.55	
3	16.92	—	83.08	0.204	34.11	5.58	52.47	2.60	
4	16.44	—	83.56	0.197	33.62	6.01	52.31	2.51	2 — 3 — 5
5	14.54	—	85.46	0.170	34.78	5.71	52.28	2.81	
6	13.16	—	86.84	0.152	35.55	5.73	51.67	3.06	2 — 3 — 5 + 3 — 4 — 6
7	10.98	—	89.02	0.123	35.82	5.89	51.84	3.18	
8	8.97	—	91.03	0.098	36.23	5.47	51.74	3.26	3 — 4 — 6
9	9.11	—	90.89	0.100	36.81	5.65	51.58	3.54	
10	7.72	—	92.28	0.084	36.75	5.48	51.40	3.48	3 — 4 — 6 + 4 — 5 — 8
11	6.00	—	94.00	0.064	37.09	5.44	51.53	3.54	
12	5.02	—	94.98	0.053	37.75	5.48	51.02	3.95	4 — 5 — 8
13	3.11	—	96.89	0.032	37.53	5.91	50.04	3.93	
14	1.24	0.14	98.62	0.013	38.02	5.89	49.97	4.19	1 — 1 — 2
15	0.49	0.28	99.13	0.0049	37.74	5.31	51.41	3.92	
16	0.14	1.11	98.75	0.0014	38.44	5.12	50.76	4.25	1 — 1 — 2 + $\text{Nd}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$
17	0.57	2.37	97.06	0.0059	39.06	5.79	51.21	4.84	

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Napoli; pervenuto all'Accademia il 9 settembre 1925.

(2) ZAMBONINI e CAROBBI, «Rend. R. Acc. Lincei» (5°) 1924, XXXIII, 2° sem., 301. ZAMBONINI e CAGLIOTI, ibidem 308. ZAMBONINI e CAROBBI, ibidem (6°) 1925, I, 1° sem., 278; ibidem 2° sem. 300.

Composizione teorica dei composti ottenuti.

	Nd	Na	SO ₄	H ₂ O
Nd ₂ (SO ₄) ₃ · Na ₂ SO ₄ · 2H ₂ O	38.23	10.09	50.91	4.77
4Nd ₂ (SO ₄) ₃ · 5Na ₂ SO ₄ · 8H ₂ O	36.51	7.27	51.66	4.56
3Nd ₂ (SO ₄) ₃ · 4Na ₂ SO ₄ · 6H ₂ O	35.97	7.65	51.89	4.49
2Nd ₂ (SO ₄) ₃ · 3Na ₂ SO ₄ · 5H ₂ O	34.56	8.27	51.78	5.39

Mentre nel sistema La₂(SO₄)₃ — Na₂SO₄ — H₂O a 25° non abbiamo ottenuto che un solo composto, 1 — 1 — 2, ossia La₂(SO₄)₃ · Na₂SO₄ · 2H₂O, vediamo, ora, che, sempre a 25°, il solfato di neodimio e quello di sodio formano ben quattro sali doppi, rispondenti alle formule 1 — 1 — 2; 4 — 5 — 8; 2 — 3 — 5; 3 — 4 — 6. Si tratta, come risulta dalle composizioni teoriche su riportate, di composti che possiedono composizione poco diversa. Le differenze, anzi, si manifestano sopra tutto nel neodimio e nel sodio, mentre per il residuo solforico e per l'acqua si hanno dei valori molto vicini. Si comprende, perciò, come, senza uno studio sistematico, sia facile cadere in equivoco, e ritenere di trovarsi in presenza del composto 1 — 1 — 2, anche quando, in realtà, si ha a che fare con uno degli altri sopra elencati. Sotto questo punto di vista, è interessante notare, che il solfato doppio di didimio e di sodio analizzato da Cleve e considerato quale Di₂(SO₄)₃ · Na₂SO₄ · 2H₂O, in realtà contiene quasi l'1 % di Di₂O₃, in meno di quello che compete alla formula indicata (prendendo, come ha fatto Cleve, quale peso atomico del didimio, evidentemente samarifero, da lui adoperato, il valore di 147), e circa 0.6 % in più di SO₃. L'analisi di Cleve si accorda meglio con la formula 4 — 5 — 8, che con quella da lui accettata 1 — 1 — 2. Altrettanto accade per il composto studiato da Marignac, ed analizzato dopo averlo disidratato. Nel seguente prospetto sono confrontati i valori trovati da Cleve e da Marignac con quelli richiesti dalle due formule 1 — 1 — 2 e 4 — 5 — 8 e, rispettivamente, 1 — 1 e 4 — 5 ⁽¹⁾.

<i>Composto di Cleve</i>				<i>Composto di Marignac</i>			
Trovato		Calc. per		Trovato		Calc. per	
		1 — 1 — 2	4 — 5 — 8			1 — 1	4 — 5
Di ₂ O ₃ .	44.09	45.0	43.0	45.76	47.24	45.0	
SO ₃ .	42.73	42.1	42.7	—	—	—	

(1) Si è preso Di = 147, Na = 23, O = 16, S = 32, come ha fatto Cleve nei suoi calcoli.

È naturale che, in mancanza di dati sistematici più completi, Marignac e Cleve abbiano preferito la formula più semplice, ascrivendo, magari, le differenze fra i risultati sperimentali ed i valori teorici alla presenza di un lieve accesso di solfato sodico.

Dalle nostre ricerche, rappresentate graficamente nella fig. 1, col solito metodo usato nei nostri precedenti lavori, l'esistenza dei composti sopra

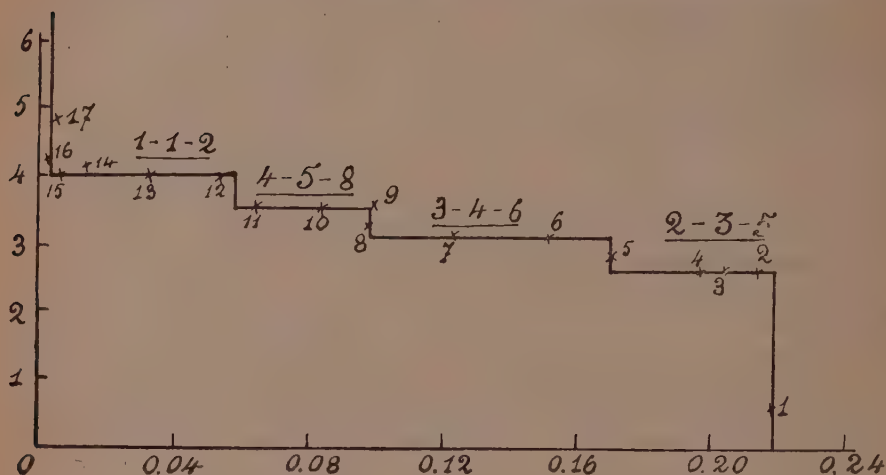


Fig. 1.

elencati risulta indubbia. Date le formule non troppo semplici che spettano ad alcuni di essi, e, sopra tutto, la radicale differenza rispetto al comportamento osservato nel solfato di lantanio, noi abbiamo ripetuto e controllato le nostre esperienze, ottenendo sempre risultati perfettamente concordanti. Riferiremo un solo esempio. Ripetendo l'esperienza n. 6, si è trovato:

	Fase liquida		Corpo di fondo	
	Na ₂ SO ₄ %	Nd	H ₂ O	SO ₄ %
	13.29	35.32	5.97	52.01
invece di	13.16	35.55	5.73	51.67

risultati avuti la prima volta.

Le nostre analisi danno tutte più acqua di quella richiesta dalle formule, il che è naturale, perchè i corpi di fondo furono asciugati fra carta ed analizzati. A 110° si è sempre osservata una perdita di peso uguale al 0.6 — 0.7 %: anche il composto 1 — 1 — 2 ha dato da 0.54 a 1.14 % di acqua in più del valore teorico. Tutti i solfati doppi di neodimio e sodio

eliminano la loro acqua di cristallizzazione a temperatura superiore a 130° , precisamente come si verifica in quello di lantanio e sodio.

I composti da noi preparati si presentano tutti sotto forma di polveri finissime, di colore roseo-violaceo pallido. Al microscopio si riconosce che sono cristalline, ma i singoli individui sono minutissimi e del tutto indecifrabili.

Il composto 1 — 1 — 2 è stabile, puro, in contatto con soluzioni che contengono da circa 0,3 a 0 % $\text{Nd}_2(\text{SO}_4)_3$ e da 0,5 a 5 % Na_2SO_4 . Più limitato è il campo di esistenza del sale doppio 4 — 5 — 8, il quale è stabile, da solo, in presenza di soluzioni che hanno dal 5,5 al 9 % Na_2SO_4 . Per il composto 3 — 4 — 6 la composizione delle soluzioni può oscillare fra il 14 ed il 9 % in Na_2SO_4 , fra il 15 ed il 17 % circa per quello 2 — 3 — 5.

Nella esperienza n. 1 il solfato sodico si è separato anidro, precisamente come abbiamo constatato avvenire nel caso del sistema: $\text{La}_2(\text{SO}_4)_3$ — Na_2SO_4 — H_2O .

Chimica. — *Ricerche sull'isomorfismo dei molibdati dei metalli delle terre rare con quelli del calcio, dello stronzio, del bario e del piombo.* Nota del Socio F. ZAMBONINI e del prof. R. G. LEVI ⁽¹⁾.

IV. STRUTTURE DEI MOLIBDATI DI La, Ce, Pr, Nd, Sm.

Furono adoperati i composti impiegati da uno di noi per le ricerche più volte ricordate: il molibdato di samario è stato preparato di recente dal dott. G. Carobbi, nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Napoli ⁽²⁾.

I risultati ottenuti sono riuniti nelle tabelle seguenti:

(1) Pervenuta all'Accademia il 15 luglio 1925.

(2) Vedasi G. CAROBBI, « Rend. R. Accad. Scienze Fis. e Mat. di Napoli ». Seduta del 4 aprile 1925.

$\text{La}_2(\text{MoO}_4)_3$

θ	$\sin \frac{\theta}{2}$	I	K	d	$h_1 h_2 h_3$	a
26.2	0.2264	d.	β_1	3.06	—	—
29.0	2502	f. f.	α_1	3.074	101	3.66
30.5	2618	d.	β_2	$\beta \left\{ \begin{array}{l} 2.65 \\ 2.94 \end{array} \right\}$	—	—
31.4	2702	d.	—	2.848	002	3.68
34.4	2952	m.	α_2	2.605	110	3.68
39.8	3402	d.	—	2.264	102	3.71
42.0	3582	d.	β_2	1.940	—	—
44.0	3745	d.	β_3	1.855	—	—
46.6	3958	f.	α_2	1.946	112	3.73
49.0	4148	m. f.	α_3	1.856	200	3.71
51.2	4320	d. d.	β_4	1.608	—	—
53.2	4478	f.	—	1.72	103	3.75
57.2	4780	f. f.	α_4	1.612	121	3.76
58.6	4890	m. f.	—	1.574	202	3.75
63.5	5250	d. d.	—	1.467	$\left\{ \begin{array}{l} 122 \\ 004 \end{array} \right\}$	3.79
66.0	5450	d.	β_5	1.275	—	—
74.0	6020	f. f.	α_5	1.279	123	3.79
77.8	6270	m. d.	—	1.228	301	3.78
79.0	6360	d.	β_6	$\beta \left\{ \begin{array}{l} 1.093 \\ 1.212 \end{array} \right\}$	—	—
80.6	6470	d. d.	—	1.192	130	3.78
83.6	6670	d.	—	1.155	$\left\{ \begin{array}{l} 302 \\ 204 \end{array} \right\}$	3.77 (1)
87.0	6880	d. d.	—	1.119	105	3.78
88.6	6980	m.	α_6	1.103	132	3.77
93.4	7280	d.	β_7	$\beta \left\{ \begin{array}{l} 0.95 \\ 1.057 \end{array} \right\}$	—	—
96.8	7490	m.	—	1.027	231	3.76
102.6	7780	d.	—	0.990	$\left\{ \begin{array}{l} 205 \\ 224 \end{array} \right\}$	3.76 3.79
106.0	7990	m.	α_7	0.964	125	3.78
112.6	8310	m. f.	—	0.927	134	3.78
117.0	8528	m. d.	—	0.903	141	3.77
131.4	9110	d. d.	—	0.845	$\left\{ \begin{array}{l} 126 \\ 240 \end{array} \right\}$	3.78

(1) Per 131 si ha $a=3.73$.

Segue $\text{La}_2(\text{MoO}_4)_3$

θ	$\text{sen } \frac{\theta}{2}$	I	K	d	$h_1 \ h_2 \ h_3$	a
135.2	9250	m.	—	0.833	143	3.79
142.0	9450	m. d.	—	0.815	242	3.79
150.6	9670	d.	—	0.797	404	3.79
158.0	9818	m. d.	—	0.784	325	3.79

$\text{Ce}_2 (\text{MoO}_4)_3$

26.9	0.233	d. d.	β_1	—	—	—
29.4	0.254	f. f.	α_1	3.03	101	3.59
30.8	0.266	d.	—	2.89	002	3.71
31.7	0.273	d. d.	—	2.815	—	—
34.7	0.298	m. d.	—	2.58	110	3.66
40.0	0.342	d.	—	2.25	102	3.60
42.3	0.360	d. d.	β_2	—	—	—
44.1	0.376	d. d.	β_3	—	—	—
46.6	0.399	f. f.	α_2	1.928	112	3.69
47.9	0.406	d. d.	β_4	—	—	—
49.0	0.415	m. d.	α_3	1.855	200	3.71
51.6	0.435	d.	β_5	—	—	—
53.1	0.447	f.	α_4	1.723	103	3.74
57.2	0.479	f. f.	α_5	1.607	121	3.74
58.7	0.490	m. d.	—	1.571	202	3.74
63.3	0.525	d.	—	1.466	{ 004 122	3.77
						3.78
66.1	0.546	d.	β_6	—	—	—
68.6	0.566	d. d. d.	—	1.360	104	3.75
70.7	0.579	d. d.	—	1.330	203	3.70
73.6	0.600	f.	—	1.282	{ 221 114	3.73
						3.76
74.4	0.605	f.	α_6	1.271	123	3.76
77.8	0.628	m. d.	—	1.225	301	3.76
78.7	0.634	m. d.	—	1.214	222	3.78
80.4	0.645	d.	—	1.193	130	3.78
82.8	0.662	m. d.	—	1.163	{ 131 204	3.75
						3.78
86.0	0.683	d.	—	1.126	105	3.78
88.2	0.696	m.	—	1.106	132	3.75
93.0	0.726	d. d.	—	1.060	303	3.77

Segue $\text{Ce}_2(\text{MoO}_4)_3$

θ	$\text{sen } \frac{\theta}{2}$	I	K	d	$h_1 \ h_2 \ h_3$	a
96.5	0.746	m. f.	—	1.032	231	3.78
101.8	0.776	m. d.	—	0.993	{ 133 224	3.68 3.79
105.0	0.794	m. f.	—	0.970	125	3.79
109.0	0.814	d. d. d.	—	0.946	400	3.78
112.3 (1)	0.831	f. f.	—	0.927	{ 233 134 }	3.78
116.6	0.853	m.	—	0.902	141	3.77
122.4	0.877	d. d.	β_7	0.878	[331]	[3.77]
125.8	0.890	d. d.	—	0.865	{ 206 305	3.75 3.77
128.7	0.901	d. d. d.	—	0.855	305	3.75
131.0	0.910	d. d. d.	—	0.846	240	3.78
135.3	0.925	m. f.	—	0.833	241	3.77
142.0	0.946	m.	—	0.814	242	3.78
150.3	0.967	m.	α_7	0.796	404	3.78
157.0	0.980	m.	—	0.786	235	3.80

$\text{Pr}_2 (\text{MoO}_4)_3$

26.8	0.2315	d.	β^1	3.00	—	—
29.2	2519	f. f.	α_1	3.055	101	3.65
30.5	2619	d.	—	2.936	—	—
31.6	2634	d.	—	2.920	002	3.80
34.6	2970	d.	—	2.594	110	3.66
40.2	3438	d. d.	—	2.240	102	3.68
44.6	3795	d. d.	β_2	1.831	—	—
47.0	3989	m. f.	—	1.930	112	3.71
49.8	4809	m.	α_2	1.829	200	3.66
53.6	4495	m.	—	1.712	103	3.76
57.8	4835	f.	—	1.593	121	3.72
59.0	4925	m.	—	1.563	202	3.73
74.6	6060	f.	—	1.271	114	3.76
78.2	6310	d.	β_3	1.120	—	—
79.8	6420	d.	—	1.199	—	—
81.5	6459	d.	—	1.193	130	3.78

(1) La linea è spessa, e può, con qualche sforzo, assumersi doppia, con $\theta = 111.7$ e 112.6 , il che conduce a (134) con $a = 3.79$ e (233) con $a = 3.77$.

Segue $\text{Pr}_2(\text{MoO}_4)_3$

θ	$\text{sen } \frac{\theta}{2}$	I	K	d	$h_1 \ h_2 \ h_3$	a
84.0	0.6690	d.	—	1.151	204	3.78
87.2	6890	d. d.	—	1.117	105	3.79
89.2	7010	m.	α_3	1.097	$\left\{ \begin{matrix} 223 \\ 124 \end{matrix} \right\}$	3.76
94.0	7310	d.	—	1.053	303	3.76
95.4	7408	d. d.	—	1.038	—	—
97.5	7518	m.	—	1.024	321	3.75
103.6	7800	d.	—	0.979	322	3.75
105.4	8010	m.	—	0.961	125	3.79
113.8	8370	m. f.	—	0.919	134	3.76
118.0	8570	m. d.	—	0.898	$\left\{ \begin{matrix} 141 \\ 402 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} 3.75 \\ 3.77 \end{matrix} \right\}$
132.0	9130	d. d.	—	0.843	210	3.77
136.4	9290	m.	—	0.829	421	3.75
143.2	9480	m.	—	0.812	422	3.78
151.8	9690	d.	—	0.795	404	3.78
158.5	9830	d.	—	0.783	235	3.80

$\text{Nd}_2 (\text{MoO}_4)_3$

26.6	0.2296	d.	β_1	3.025	—	—
29.3	2518	f. f.	α_1	3.054	101	3.64
30.2	2605	d.	—	2.950	—	—
31.5	2700	d.	—	2.845	001	3.67
34.8	2984	m. d.	—	2.574	110	3.64
40.0	3419	d. d.	—	2.252	102	3.69
41.2	3515	d.	β_2	1.976	—	—
44.0	3745	d. d.	β_3	1.866	—	—
47.0	3985	f.	α_2	1.932	112	3.71
49.2	4160	m. f.	—	1.851	200	3.70
52.0	4381	m. d.	$\left\{ \begin{matrix} \alpha_3 \\ \beta_4 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} 1.766 \\ 1.589 \end{matrix} \right\}$	—	—
53.6	4502	m.	—	1.709	103	3.72
57.6	4812	f. f.	α_4	1.598	121	3.72
58.8	4908	m. f.	—	1.568	202	3.74
63.8	5285	d. d.	—	1.456	$\left\{ \begin{matrix} 122 \\ 004 \end{matrix} \right\}$	3.76
66.8	5505	d. d.	β_5	1.263	—	—

Segue Nd₂(MoO₄)₃

θ	sen $\frac{\theta}{2}$	I	K	d	h ₁ h ₂ h ₃	a
71.6	0.5845	d. d.	—	1.316	—	—
75.0	6070	f.	α ₅	1.267	123	3.75
78.4	6319	d.	β ₆	1.099	123	3.75
79.6	6390	d.	—	1.204	222	3.75
81.6	6539	d.	—	1.177	130	3.73
84.0	6690	d. d.	—	1.150	131	{ 3.71 3.76 }
87.5	6918	m. d.	α ₆	1.114	105	3.76
89.4	7038	m.	—	1.094	{ 124 223 }	{ 3.74 3.75 }
91.2	7330	d.	—	1.049	303	3.74
98.0	7550	m.	—	1.019	321	3.73
103.5	7845	m. d.	—	0.981	322	3.76
107.2	6038	m.	—	0.957	125	3.76
114.8	8425	m. f.	—	0.914	134	3.73
118.4	8580	m. d.	—	0.897	141	3.74
125.0	8870	d.	—	0.868	{ 331 225 }	{ 3.72 3.72 }
137.4	9318	m.	—	0.826	{ 421 315 }	{ 3.73 3.73 }
141.6	9430	d.	—	0.816	413	3.71
145.5	9540	m.	—	0.807	422	3.76
155.0	9758	m. d.	—	0.789	404	3.75

Sm₂ (MoO₄)₃

29.8	0.2568	f.	α	2.998	101	3.57
35.2	3020	m.	α	2.55	110	3.61
48.0	4055	m. f.	α	1.894	112	3.63
49.6	4195	m. d.	α	1.836	200	3.67
51.8	4602	d.	α	1.672	103	3.65
58.6	4895	f.	α	1.573	121	3.66
60.2	5018	m. d.	α	1.536	122	3.66
72.6	5918	d.	α	1.302	203	3.64
76.6	6193	f.	α	1.213	114	3.66
80.0	6414	d.	α	1.202	301	3.69
81.4	6610	d.	α	1.165	130	3.63
89.8	7050	d.	α	1.092	105	3.69

Segue $\text{Sm}_2(\text{MoO}_4)_3$

θ	$\text{sen } \frac{\theta}{2}$	I	K	d	$h_1 \ h_2 \ h_3$	a
91.0	0.7130	m. d.	α	1.078	223	3.69
96.0	7430	d.	α	1.036	303	3.70
99.5	7638	m. d.	α	1.008	321	3.69
109.8	8170	m.	α	0.943	125	3.70
116.2	8510	m. d.	α	0.905	323	3.70
120.6	8680	d.	α	0.887	411	3.70
141.6	9430	m.	α	0.817	$\left. \begin{matrix} 421 \\ 315 \end{matrix} \right\}$	3.69
149.2	9630	m. d.	α	0.799	$\left. \begin{matrix} 333 \\ 422 \end{matrix} \right\}$	3.72

Chimica farmacologica. — *Azione farmacologica del ferro coi sali doppi e complessi.* Memoria del Socio L. SABBATANI.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

Geologia. — *Di alcuni quesiti geologici nelle Alpi franco-italiane.* Nota del Corrisp. Ing. S. FRANCHI⁽¹⁾.

Allo scopo di giungere alla soluzione di alcuni importantissimi quesiti riguardanti la stratigrafia e la tettonica della zona di confine italo-francese delle Alpi, quesiti di cui ho trattato in precedenti note, alla fine dello scorso agosto io mi incontrai cogli eminenti colleghi dell'Accademia delle Scienze di Parigi P. Termier e W. Kilian, a cui sono vivamente grato per avere accettato l'invito loro fatto dal Direttore dell'Ufficio geologico. Si visitarono insieme i dintorni di Bardonecchia e di Cesana Torinese, quindi i dintorni di Borgo S. Dalmazzo, le valli Maira, Stura di Cuneo e Valloriate, giungendo ad una completa intesa sopra alcune questioni e chiarendo molto utilmente il modo di vedere di ognuno su quelle poche per le quali non è stato possibile venire ad un accordo; sicchè d'ora innanzi le eventuali discussioni potranno essere molto più efficacemente ristrette in più angusti limiti.

(1) Presentata nella seduta del 1° novembre 1925.

Non occorre dire che le discussioni sono state sempre improntate alla massima cordialità, anche quando le opinioni erano sensibilmente divergenti. E io conservo il più grato ricordo di esse, poichè una settimana di stretta vita in comune mi ha fatto viemeglio apprezzare le eccezionali doti d'animo e di mente degli illustri colleghi.

Un accordo completo si è stabilito sulla eocenicità dei *grès d'Annot*, finora indicati come oligocenici nelle carte geologiche francesi (fogli all'80.000 di Larche, Barcelonnette, Gap, Dignes, Allos, Saint Martin-Lantosque, Puget-Théniers, Menton, carta geologica della Francia ad 1.000.000 stampata nel 1905) e ritenuti da J. Boussac estendersi, colla stessa età, nelle valli italiane della Stura, del Gesso, della Vermenagna, della Roja e dell'Argentina; laddove io li ho sempre considerati come parti costituenti di diversi orizzonti dell'Eocene (carta dei dintorni di Ventimiglia al 25.000 (1894) e carta delle Alpi occidentali al 400.000 (1908).

Nelle suddette gite il compianto amico Kilian giunse ad esaminare tali arenarie laddove esse si sovrappongono direttamente ai calcari nummulitici di Bersezio, e si videro con lui chiaramente e col giovane ingegnere delle Miniere E. Raguin, addetto al Servizio geologico francese, che ci accompagnò in tutte le gite, i grossi banchi di quelle arenarie, fortemente dislocati, con intercalazioni di scisti neri, coronare in alto, insieme ai calcari nummulitici sotto-stanti, la immane parete dei calcari secondari delle « Barricate », a valle di Bersezio. Tali arenarie, che rappresentano la prosecuzione di quelle del Lausanier e di Pourriac, si debbono riferire alla parte inferiore del Priaboniano.

I caratteri dei *grès d'Annot* sono stati subito riconosciuti da Termier e Kilian nei grossi banchi di arenarie con elementi feldspatici abbondanti, i quali danno ad esse la parvenza di apliti, includenti rare e piccole lenti di calcari neri, e che sono scavati per pietra da taglio in vari punti a valle di Aisone. Essi fanno parte di un singolare complesso scistoso che, malgrado il marcato metamorfismo, deve essere ascritto all'Eocene, e che rappresenta tettonicamente la sinclinale della Madonna del Colletto, che è la più vicina al massiccio cristallino dell'Argentera, fra le numerose che sono pizzicate nella serie imbricata che sta tra Gesso e Stura.

Con questo accordo è segnato un notevole progresso nella cartografia della regione attorniante ai due lati del confine il massiccio cristallino dell'Argentera (Mercantour): un'unica serie eocenica di grande potenza, sebbene con grande varietà di complessi litologici, vi rappresenta, sopra enormi estensioni, i terreni terziari; così come io ho indicato in una tavola annessa al mio lavoro sull'età delle arenarie di Annot (tav. I) pubblicato nel 1916 nel Boll. del R. Comitato geol., allo scopo di confutare la erronea assegnazione fatta da J. Boussac nel poderoso e pregevolissimo lavoro « *Etudes stratigraphiques sur le Nummulitique alpin* ».

In quel mio lavoro, ritenuta come dimostrata l'eocenicità dei *grès d'Annot*, io avevo parlato della probabile età eocenica dei *grès mouchetés*, a cui quelli

presentano passaggi nella regione a sud del Pelvoux, e dissi potersi porre la stessa questione pei *grès de Taveyannaz* e pei *grès du Flysch* e per i potentissimi *grès de Altdorf* (2000 m.), sulla cui età ancora esistevano grandi divergenze. Il ritrovamento di nummuliti e di ortofragmine (del genere *Discocyclina*) fatto recentemente da M. Lugeon, dimostrando indiscutibilmente la età eocenica delle arenarie di Taveyannaz, mette in evidenza le analogie, da me intravedute nel 1916, nella costituzione litologica dell'Eocene svizzero e savoiano con quello delle Alpi marittime italiane (M. Lugeon, *Sur l'âge du grès de Taveyannaz*, *Eclogæ Geologiæ Helvetiæ*, vol. XVIII, n. 2, 1923).

Un accordo altrettanto completo si è stabilito cogli illustri colleghi sulla assoluta continuità, *per ininterrotta successione di depositi*, fra Trias a *facies* brianzonese, a luoghi fossiliferi, e la formazione dei calcescisti con pietre verdi; colla esclusione quindi di qualsiasi *hyatus* stratigrafico o contatto meccanico di qualunque natura, fra le due importantissime formazioni alpine, tanto nella bassa e media valle Maira (tra S. Damiano e Prazzo) che nelle basse valli del Gesso e della Vermenagna (dintorni di Borgo S. Dalmazzo: alle Fornaci Musso e ai Tetti Sales). Tale continuità era stata messa in piena luce fin dal 1908, e confermata con vari miei lavori successivi, aventi per scopo di dimostrare l'età secondaria dei Calcescisti, costituendo essa, come già ebbi a dire in una precedente Nota, uno dei fatti fondamentali per la stratigrafia e la tettonica delle Alpi Occidentali italiane. Io sono molto lieto che quella continuità sia stata riconosciuta da P. Termier, ardito e fortunato assertore dei grandi carreggiamenti, e spero che questo sia un primo passo verso più vaste intese, anche con alcuni geologi svizzeri, i quali hanno dato della tettonica di quella grande regione delle interpretazioni molto ardite, troppo astraendo dai risultati dei rilevamenti geologici, ed attribuendo ai grandi carreggiamenti una continuità e una regolarità non conciliabili colla natura stessa di questi fenomeni ⁽¹⁾.

Resta intanto acquisito, anche per i miei eminenti colleghi di Francia, che il massiccio cristallino Dora-Val Maira e la soprastante massa triasica, colla potente massa ripiegata di Calcescisti, includente le anticlinali di dolomie fossilifere del Vallone di Elva, di Monte Chialmo, della Valle del Cugino, di Borgo S. Dalmazzo-Roccavione e di Boves, costituiscono, tettonicamente, un inscindibile tutto, ad ovest, sud-ovest e a sud del quale, perciò, dovrà essere ricercata, quando esista, la linea di affioramento della superficie di contatto meccanico basale del grande carreggiamento. Dando uno sguardo alla carta geologica delle Alpi Occidentali e riflettendo alla assoluta identità di rapporti di concordanza, con passaggi e sfumature, fra le rocce cristalline di Dora-Val Maira, del Gran Paradiso e dei Monti D'Ambin, coi soprastanti Calcescisti, si viene tosto nella convinzione che la maggior parte della

(1) E. ARGAND, *Le nappes de recouvrement des Alpes Pennines et leurs prolongements structuraux* (Beitr. d. G. Karte der Schweiz, Neue Folge, XXXI Lieferung).

cosiddetta « Zona del Monte Rosa », circueute la pianura piemontese, debba rappresentare la massa della ipotetica grande *nappe* supposta da Termier e Kilian, e che l'affioramento della superficie di slittamento di essa debba correre, con andamento arcuato molto sentito (di oltre 90°), dalle falde settentrionali del Monte Besimauda ai pressi di Acceglio, a quelli di Bardonecchia e, più oltre, ad occidente del gruppo del Gran Paradiso. Mi limito a questa constatazione senza discutere, per ora, la possibilità di dimostrare la esistenza di una tale linea.

Ma disgraziatamente l'accordo non si potè stabilire sulle modalità del contatto di quei due terreni a Melezet (Bardonecchia), alle falde del Roc del Boucher (Vallone di Thures), e nei dintorni di Acceglio, località nelle quali i colleghi di Francia appunto pensano debba passare questa linea; sì che essi spiegherebbero la osservata concordanza (secondo essi solo apparente) come effetto della intensa laminazione avvenuta in seguito all'immane carreggiamento, da essi supposto, della zona delle pietre verdi sul Retico e sul Trias a *facies* brianzonese (calcareo-dolomitico con gessi e carnirole).

A questa interpretazione, che io sono dolentissimo di non potere condividere, i miei amici furono condotti dalla considerazione di fatti certamente importantissimi, che essi hanno osservati oltre confine, i quali non potrebbero, a loro avviso, trovare una spiegazione che nella esistenza di una grande *nappe*, la *nappe du Mont Rose*, la quale dall'interno delle Alpi si sarebbe rovesciata all'esterno, ricoprendo tutto il Brianzonese e parte del Delfinato. Appunto residui di tale carreggiamento, salvati dall'erosione posteriore, sarebbero la potente ed estesa massa di scisti cristallini a *facies* piemontese della notissima *quatrième éaille* del Termier, la cui interpretazione dette luogo a lunghe discussioni collo stesso Kilian, e i numerosi piccoli lembi (una trentina) di scisti cristallini esotici del Brianzonese, fra cui quelli del Rio Secco e della dorsale del M. Chamberton, al di qua del confine, da me segnalati nel 1910 (Boll. R. C. G.).

Altro argomento per convincere gli illustri colleghi del grandioso carreggiamento sarebbe la presenza di ciottoli di rocce verdi, analoghe a quelle dei Calcescisti, nel Miocene dei dintorni di Grenoble, i quali ciottoli dovrebbero provenire dalla erosione di lembi carreggiati di lontanissima provenienza (italiana), ora completamente scomparsi.

Avendo io esposto le mie idee nelle note precedenti, mi limito qui alla semplice esposizione dello stato attuale della questione, aspettando che l'amico Termier esponga, colla chiarezza sua abituale, il suo modo di interpretare i fatti osservati qualche mese fa al di qua del confine; e dimostri, come egli sa ben fare, tutto il valore degli argomenti sopra indicati, i quali, oltre a quei fatti, hanno condotto lui e il compianto comune amico Kilian alla formulazione della grandiosa ipotesi ⁽¹⁾. Egli cercherà certamente di

(1) Il prof. Kilian dopo le escursioni fatte in Italia, escursioni che egli, scrivendone a Termier, disse memorabili, rientrava in Francia il 1° settembre, e nella notte del 30 dello

dimostrare la inammissibilità di una qualsiasi ipotesi, quale io l'affacciai durante le discussioni sui luoghi, secondo la quale i lembi cristallini d'oltre confine, che io pure ritengo indiscutibilmente esotici, e come tali già descrissi nel 1910, possano rappresentare dei resti di carreggiamenti, aventi le loro radici al di là anzichè al di qua del confine stesso; come, a mio parere, farebbe necessariamente credere la disposizione tettonica dei lembi esotici a me noti del Rio Secco e del Chaberton e, più ancora, il forte rovesciamento con stupefacente costanza, verso l'interno dell'arco alpino, di tutte le pieghe, i cui strati hanno una potenza complessiva, si noti bene, di un centinaio di chilometri. Fatto questo di una imponente grandiosità, che deve far riflettere, e che io non credo si possa spiegare come un semplice *plissement en retour*, cioè come un fenomeno secondario posteriore di reazione al movimento verso l'esterno del supposto grande *carreggiamento del Monte Rosa*.

Biologia. — *Imitazioni di cellule in divisione e della germinazione delle spore col fluosilicato di calcio.* Nota del Socio straniero L. A. HERRERA ⁽¹⁾.

Alcuni perfezionamenti portati alla mia tecnica per la preparazione delle imitazioni fluosiliciche hanno avuto dei risultati inattesi: non è inverosimile che eliminando i difetti che rimangono ancora si possa arrivare a produrre nuove serie di esperienze in condizioni sempre più favorevoli col miscuglio intimo di colloidi e cristalloidi.

Tecnica: Esperienza N. 5112 25 giugno 1925:

Silicato di potassio comm. D=1100	ccm ³	25
Acqua distillata	»	15
Bifluoruro di potassio Merck	gr.	0.700
Formalina	ccm ³	13
Cloruro di calcio solido.		

stesso mese soccombeva, dopo breve malattia. Con la sua morte la Geologia francese perde uno dei suoi più insigni cultori e docenti ed il Servizio geologico francese uno dei suoi più illustri ed attivi collaboratori. W. Kilian succedette nel 1889 a Carlo Lory nella cattedra di Geologia dell'Università di Grenoble, dove egli ebbe numerosi discepoli, di cui alcuni già onorano la scienza. Fu attivissimo collaboratore della Carta geologica delle Alpi e scrisse numerosi ed importantissimi lavori di paleontologia, di stratigrafia e di tettonica; fra di essi mi limito a citare la poderosa illustrazione dei terreni secondari delle Alpi occidentali, non del tutto compiuta. W. Kilian oltre ad essere un grande scienziato era uomo di alta coscienza e di gran cuore, molto stimato e amato da quanti lo conoscevano e che ora amaramente ne piangono la morte immatura.

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio degli Studi Biologici di Messico; pervenuto all'Accademia il 20 ottobre 1925.

Si fa sciogliere il bifluoruro di potassio nell'acqua e vi si aggiunge quindi il silicato e la formalina. Si deposita in una capsula di Petri e una goccia tra il vetrino copri- e porta oggetti. Il cloruro di calcio vi è aggiunto come d'abitudine: si riscalda in una stufa d'Arsonval fino a 100° (temperatura interna della stufa). La soluzione ha una temperatura inferiore. Il silicato coagula. Si lascia così per 24 ore. Si lava, si colora coll'ematosilina ferrica e si monta al balsamo di Canadà come per le cellule naturali.

La formalina rappresenta la materia organica ed agisce come fissatore.

Esperienza N. 5127 agosto 1925:

Silicato di potassio del commercio D=1100	ccm. 25
Acqua distillata	» 60
Cloruro di calcio anidro puro	gr. 0.700
Bifluoruro di potassio Merck	» 0.700
Acqua distillata	ccm. 10

Si fa sciogliere il bifluoruro di potassio nei 10 cm. d'acqua, si aggiunge a questa la soluzione al silicato, si versa in una capsula di vetro, si aggiunge vicino al bordo il cloruro di calcio solido, e si riscalda a 50° a b. m. La seguente tabella mostra come si svolge la reazione.

Ore	Temperatura esterna dell'acqua	Temperatura della soluzione	Osservazioni
4 ^h .20 ^m	50°	46°	
4 ^h .28 ^m	»	45°	
5 ^h .30 ^m	»	45°	Nessuna coagulazione
5 ^h .35 ^m	»	45°	» »
5 ^h .40 ^m	»	45°	» »
5 ^h .46 ^m	»	45°	Comincia la coagulazione
5 ^h .50	»	43°	» »
6 ^h .0 ^m	»	43°	» »
6 ^h .10 ^m	»	38°	» »
6 ^h .20 ^m	»	43°	Coagulazione completa

Bisogna evitare i vasi metallici, poichè la temperatura vi è troppo elevata ed il silicato coagula immediatamente. Il bagno-maria è preferibile alla stufa d'Arsonval; se mai bisognerebbe usare una stufa elettrica a temperatura costante.

Con 60 ccm³ di acqua, la coagulazione esige circa un'ora per prodursi: bisognerà perfezionare sempre più il metodo per ottenere il massimo di lentezza per la diffusione del cloruro di calcio nel silicato, non che la temperatura e la pressione massima e quindi un contatto maggiore dei vetri che devono comprimere una goccia della soluzione, per avere una pellicola capillare di 2-3 micron di spessore. Nella pratica è difficile evitare il disseccamento di questa pellicola ed altri inconvenienti sui quali studio ancora.

Ciò che si richiede in queste esperienze è dunque:

1° La più alta temperatura che non provochi la coagulazione del silicato.

2° La pellicola più sottile che sia possibile per l'infiltrazione del cloruro di calcio tra due superficie solide. Ciò si otterrà in seguito con membrane di collodio e mediante pesi comprimenti le lastre di vetro.

Risultati:

La divisione delle cellule e la germinazione dei germi o spore sono i risultati più importanti, come pure la produzione di filamenti nucleari



F. I. — N. 1-24 dell'esperienza 5124
» 25-52 » 5112

evidenti imitanti lo spireme. Fig. I: il n. 14 mostra la più notevole imitazione di cellule ottenuta sinora, così pure il n. 34. A parte invio i vetri originali all'Accademia per l'osservazione diretta di questi preparati veramente sorprendenti.

Forme di amebe: 17, 6, 7, 25, 26, 27, 28, 24, 35, 31, 32, 37, 41, 44, 45, 46, 47 ecc. ecc. Queste strutture sono abbondanti con grani fini e spesso nuclei granulosi. Come tutte le altre strutture esse sono indurite e non si muovono più dopo la loro formazione.

Il n. 50, come pure i nn. 48, 49 e 51 mostrano delle pseudo-amebe d'una delicatezza sorprendente, nucleate e granulate, montate nel balsamo. Si potrebbero prendere benissimo per amebe naturali morte.

Spore in germinazione. — Un preparato inviato al dottor Tarwagne e che doveva essere presentato al congresso internazionale del libero pensiero (Parigi 17 luglio 1925), mostra curiose imitazioni di spore in germinazione



Fig. 2.



Fig. 3.

producenti tubi germinativi semplici e doppi, simili a quelli della forma *Sphacelia* della segala cornuta⁽¹⁾. Ho visto molte altre spore fuosiliciche in germinazione e miceli granulosi⁽²⁾. La presenza di questi germi ed il loro sviluppo ha un grande interesse biologico e suscita idee nuove sulla così detta generazione spontanea ed i dogmi di Pasteur. Non è inverosimile che germi più perfetti arrivino a produrre germinazioni complicate. Vedi n. 52 della fig. 1.

Cellule in divisione. — Io ho insistito a diverse riprese sulla tendenza alla divisione delle cellule fuosiliciche⁽³⁾, ma qui i fusi sono visibili come pure gli spiremi, nei nn. 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 28, 29, 33, 34, 36, 40. Il fuso è formato da coni, frammenti di capsule (n. 5), da grani simili ai centrosomi, ancora senza radiazioni (nn. 4, 18, 2) comunicanti con fine granulazioni (n. 5) qualche volta il cordone di queste granulazioni essendo rotto (n. 16).

(1) PRILLIEUX, *Maladies des Plantes Agricoles*, vol. 2, 108, fig. 262.

(2) HERRERA, *Biología y Plasmogenia*, México, 1924, p. 305. «Gaceta medica catalana», vol. LVIII, n. 1045, 15 gennaio 1921, pp. 10-16.

(3) «C. R.» maggio 1919, p. 1015; «Revue Scientifique», 11 dicembre 1920, p. 719; questi «Rendiconti», 7 gennaio 1923, p. 42: *Importanza Biologica dei fuosilicati*.

Il n. 9 presenta delle analogie col fuso dei nuclei endospermici in divisione del giglio durante la fecondazione⁽¹⁾ o meglio ancora coi gameti visione di *Actinosphaerium* secondo R. Hertwig⁽²⁾. Gli spiremi hanno una naturalezza che colpisce. Non si tratta più di analogie vaghe o di figure nebulose. Nel n. 34 è stato disegnato con cura il filamento attorcigliato che si trova nel nucleo, visibile anche nei nn. 14, 15, 10 e 19. Il n. 29 mostra il filamento a spirale.

Aspetto d'una goccia d'acqua stagnante. — L'insieme delle figure del numero 25 presenta l'aspetto d'una goccia d'acqua stagnante vista al microscopio e mostrandone diversi microrganismi, dalle forme sferiche del *Micrococcus*

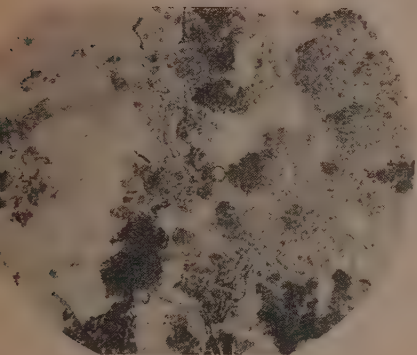


Fig. 4.

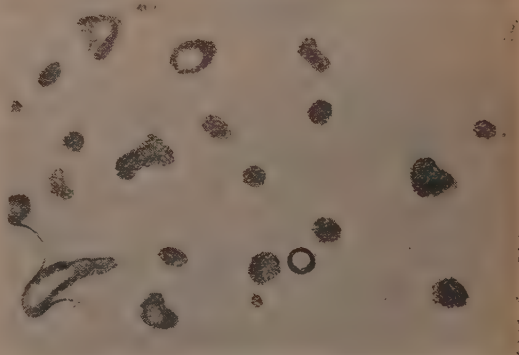


Fig. 5.

sino a quelle delle amebe e cellule nucleate. Le loro dimensioni sono variabilissime da 9 a 40 ed 80 micron. I miceli hanno uno ad 80 micron.

Fig. 2. Cellula con filamento interno. *Fig. 3.* Aspetto di microrganismi dell'acqua stagnante. *Fig. 4.* Id. id. *Fig. 5.* Pseudo-amebe finamente granulari ed indurite, nucleate.

Fig. 6 esperienza N. 5105:

Silicato di potassio D=1100	ccm3 50
Bifluoruro di potassio Merck	gr. 1.5
Acqua	ccm3 20

Si mescolano 3 cm3 di questa soluzione con 3 di formalina D=1120. Se ne deposita una piccola goccia tra il porta ed il copri oggetti e quindi un granello di cloruro di calcio. Temp. 35°. Dopo 24 ore si ottiene un aspetto interessante di tessuto granuloso fino, nel quale i nuclei si trovano nelle linee di intersezione dei precipitati periodici orizzontali e verticali. Si monta su balsamo e si colora con ematossilina. N. 7. Esperienza 5107. Stessa formula. Si prendono 3 cm3 della soluzione e vi si aggiungono 3 ccm3 di formalina D=1120. Una goccia di 1 mm. viene deposta fra il porta ed il copri oggetto. Temp. 40°.

(1) WILSON, *The Cell*. New York, 1922, p. 219, fig. e.

(2) Idem, p. 278, fig. 139 B.

Vi si fa infiltrare il cloruro di calcio. Dopo 24 ore: figure notevoli di amebe nucleate; nucleo colorato coll'ematossilina. Montate al balsamo.

Tentativi di spiegazione. — Come ho detto in diverse pubblicazioni, queste figure son dovute ad una cristallizzazione incompleta, nella quale il reticolo invisibile dei cristalli di fluoruro di calcio si sovrappone ai reticoli invisibili del silicato di calcio membranoso, che, secondo le idee di Weimarn, deve possedere una struttura cristallina invisibile. V'è da aggiungere l'influenza della pressione osmotica, delle correnti osmotiche attivate dal calore, dei cambiamenti della tensione superficiale, delle correnti di diffusione ecc. ecc. Questi risultati portano un appoggio alla teoria cristallina della cellula proposta da me, Lehmann, Viola e assai recentemente da Lillie

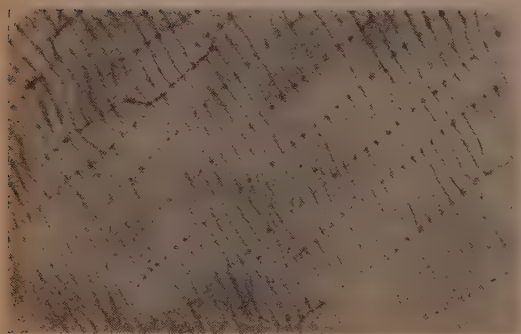


Fig. 6.

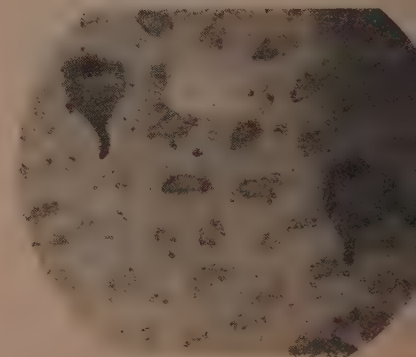


Fig. 7.

e Schmidt⁽¹⁾ che trova la struttura cristallina nella fibrille. E sì come le strutture si formano in seno alla soluzione di cloruro di calcio che si infila nella soluzione di silicato e bifuoruro, io mi domando se gli elettroliti non sarebbero la base di queste figure ed anche del protoplasma. Leduc attribuisce le forme organiche alla proprietà dei liquidi: io ho sostenuto che esse sono il cadavere delle soluzioni, e J. Loeb spiega il contegno delle proteine colla concentrazione totale degli ioni cristalloidi maggiore nella soluzione o nel gele di proteina che nella soluzione acquosa esterna⁽²⁾. Il silicato di sodio o di potassio sciroposo nel fondo di un vaso, dà con alcool l'aspetto di un'emulsione protoplasmoide.

È necessaria tuttavia la più grande riserva, e l'avvenire dovrà chiarire questa oscurità della plasmogenia; qui per il momento bisogna limitarsi ai fatti osservati.

(1) *Ueber den Feinbaum tierischer Fibrillen*, «Naturwissenschaften», XII, 269-275 e 296-303. 1924.

(2) «L'Année Biologique», 1922-23, 3^a, fasc. 2, p. 3.

Patologia. — *Intorno alle modificazioni determinate dal radio sulla poltiglia dell'adeno-carcinoma del topolino ed alla sua trasformazione in vaccino curativo.* Nota preventiva⁽¹⁾ del Socio G. TIZZONI e dei proff. E. CENTANNI e G. DE ANGELIS.

Nell'attuale intensissimo movimento di studi sui tumori maligni, crediamo opportuno di prendere data con la presente Nota di quanto abbiamo potuto osservare in esperimenti, sebbene iniziali tuttavia ripetuti e precisi, riguardo l'azione del radio sopra l'adeno-carcinoma del topolino, e porre fin d'ora le basi di un lavoro a più ampio sviluppo, che coinvolge una serie illimitata di questioni scientifiche e pratiche.

La cura specifica del tumore, nonostante le molteplici vie con insistenza tentate, non lascia ancora scorgere un chiarore all'orizzonte. Un raggio improvviso sembrava volesse aprirsi col recente annunzio degli studi Gye e Barnard; ma all'esame ponderato quelle ricerche, pur portando luce innegabile sulla natura del virus del sarcoma filtrabile dei polli, non illumina altrettanto la genesi dei comuni tumori dei mammiferi, e sopra tutto nulla appare da quegli studi che risolva il problema della cura.

Come sorgenti di materiale terapeutico per le affezioni sostenute da virus, resta sempre in efficienza l'antico principio, quello che si vale direttamente dei prodotti patologici svolti nel mezzo di sviluppo del virus stesso, come principale arma per influire beneficamente sul decorso della malattia da cui derivano; ed è quello che anche nello studio del cancro e degli altri tumori maligni può nel periodo attuale ispirare la maggiore fiducia.

Per un proficuo risultato non è assolutamente necessario che la natura del virus sia conosciuta: infatti per molte malattie a virus filtrabile quali la rabbia, il vaiuolo, la paralisi infantile, l'encefalite letargica, il cimurro e diverse altre, i principali quesiti scientifici e pratici ad esse relativi furono con lo studio dei prodotti patologici direttamente risolti, pur ignorando i caratteri morfologici del virus e la possibilità di farne colture artificiali.

In questi casi la soluzione essenziale del problema consiste nel trovare per tali prodotti, che contengono il virus in coltura naturale, le *condizioni sicure in cui si raggiunge il limite della morte del virus senza portar offesa alle sue proprietà vaccinanti.*

Questo problema è appunto quello che ci siamo proposti con le presenti ricerche, prendendo a soggetto l'adeno-carcinoma del topolino e come

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Patologia generale delle Università di Bologna e di Modena, pervenuto all'Accademia il 3 ottobre 1925.

agente distruttore il radio, data la sua nota potenzialità sopra i tumori e la possibilità di graduarne l'effetto.

Per tali studi, pei quali ci sentivamo preparati da precedenti ricerche, noi abbiamo riunito di necessario quanto possedevano i nostri rispettivi Istituti, quasi supplendo con ciò alla deficienza lamentata nella nostra Regione di uno speciale centro di studio del cancro.

Così noi ci siamo valse per radio del campione posseduto dall'Istituto di Patologia Generale di Bologna e come tumore dell'adeno-carcinoma per lungo tempo trapiantato e conservato alla sua piena virulenza nell'Istituto di Patologia Generale di Modena.

Il campione di radio è costituito da gr. 0.10 di bromuro di radio puro, chiuso tuttora nella scatoletta tipo inglese, del potere di 500.000 U. R. per centigrammo e quindi di 5.000.000 in totale.

Il tumore, su cui abbiamo lavorato, è noto per gli studi dell'Ehrlich seguito da molti altri autori. Diciamo solo che esso presenta il reperto istologico classico dell'adeno-carcinoma mammario; che coll'innesto praticato nel topolino sotto la cute del dorso, dopo un periodo di incubazione che, nei casi di maggiore virulentazione, scende a 5-6 giorni appena, ma che in media è di 10-12 giorni circa, dà costantemente sviluppo a una neoformazione nodulare semplice ed a carattere lobato, ad accrescimento illimitato, che raggiunge sempre dimensioni considerevoli, fino ad una massa eguale e talora perfino superiore a quella del corpo che lo porta, ed in ultimo finisce per ulcerarsi e determinare la morte del topolino.

L'attecchimento è regolare nel 100 % degli esperimenti; solo in rarissimi casi, e in particolare in animali vecchi od in periodo di gravidanza e di allattamento, l'innesto può del tutto fallire, oppure nel tumore comparso seguire, dopo un inizio di sviluppo, il completo riassorbimento.

Riguardo ai procedimenti di ricerca, possiamo dire che ci siamo attenuti a quanto era stato fatto nello stesso Istituto di Bologna intorno all'azione del radio sopra il virus della rabbia e quello del vaccino del vaiuolo.

Le ricerche sull'azione delle radiazioni, di Röntgen e del radio, sui tumori fatte in vivo, che sono numerosissime, non valgono al nostro quesito: il tumore si ammette possa essere distrutto da due meccanismi ben distinti: o direttamente dall'azione delle radiazioni sopra le cellule neoplastiche, oppure indirettamente per principi atrofizzanti che si svolgono dal materiale neoplastico sotto l'opera delle radiazioni. Questa doppia vicenda non viene divisa dalla radiazione in vivo. Qualche indizio tuttavia dell'intervento anche in questo caso del fattore indiretto si può dedurre essendosi più volte osservata la comparsa di effetti regressivi su metastasi a distanza dei punti radiati. Ed oggi è ammessa quest'azione indiretta delle radiazioni, per principi tori che la radiazione promuove dal tumore e che agiscono per via generale.

Lo studio pel nostro quesito efficace è quello fatto sopra poliglie di tumore isolate. Ricerche per questa via sono state tentate, ma in non

troppo numero e senza che abbiano condotto a conclusioni concordi e definitive. Le più ragguardevoli appaiono quelle di Wedd, Chambers, Morson e Russ i quali hanno trovato che le cellule del tumore radiate in vitro, possono in speciali condizioni conferire uno stato di immunità; ma se la radiazione è troppo protratta, l'immunità scende a zero. I raggi più attivi sembrano i β , mentre quelli γ svolgono solo un tenue potere. Haaland però non conferma questi risultati.

Le ricerche da noi eseguite si svolgono in tre serie che riferiamo successivamente.

1° Modificazioni indotte dal radio sul potere patogeno della poltiglia cancerosa.

In questa prima serie ci siamo proposti, in linea preliminare, di vedere se e quale azione esercitasse il radio sulla poltiglia cancerosa, messa con esso a contatto a mezzo delle solite provette d'alluminio; ed in caso affermativo abbiamo voluto stabilire quale è il tempo per cui deve essere mantenuto questo contatto, perchè segua la scomposizione fino all'annullamento completo del potere patogeno ricercato con l'innesto del topolino.

Ad evitare poi l'effetto che la temperatura ambiente si sa esercitare sull'attività della poltiglia cancerosa, tanto la provetta sottoposta all'azione del radio quanto quella di controllo venivano conservate fino al momento dell'innesto in ghiacciaia ad una temperatura non superiore ai 4° - 5° .

In questa prima serie di esperienze riusciva molto facile stabilire i termini estremi della scala di decomposizione determinata dal radio sulla poltiglia cancerosa.

Infatti dopo $2\frac{1}{2}$, 5, 10 ore di radiazione l'innesto della poltiglia cancerosa radiata dette costantemente esito positivo, determinando lo sviluppo di un tumore, il quale, sia per la brevità del periodo di incubazione, sia per il decorso e gli esiti, in nulla si poteva distinguere da quanto si verificava nei controlli innestati con la stessa poltiglia non radiata.

Si poteva quindi affermare da questi risultati che *pel nostro campione di radio fino a 10^b di esposizione alle radiazioni la poltiglia cancerosa conserva intatto il suo potere patogeno.*

Eguale era molto facile trovare il termine superiore. Ed invero, se l'esposizione al radio della poltiglia cancerosa veniva protratta per 40^b , essa riusciva in ogni caso del tutto indifferente quando era iniettata nel topolino, e questo anche se l'osservazione dell'animale, sul quale era stato praticato l'innesto, veniva continuata per più mesi. Invece i controlli operati con la poltiglia medesima non esposta al radio, ma tenuta pel rimanente nelle stesse identiche condizioni di quella radiata, presentavano costantemente lo sviluppo del tumore, senza modificazione alcuna da quanto avviene quando si pratica direttamente l'innesto da animale ad animale con poltiglia fresca.

Da questo eravamo autorizzati a concludere che *40^b di esposizione alle*

radiazioni del nostro campione annullano costantemente e definitivamente il potere patogeno della poltiglia cancerosa dell'adeno-carcinoma di Ehrlich.

Se, peraltro, è possibile e riesce assai facile stabilire i gradi estremi dell'azione del radio sulla poltiglia cancerosa nei riguardi del tempo di radiazione, non è altrettanto facile rilevare con assoluta precisione i gradi intermedi, che per noi sono i più interessanti.

A tale riguardo noi fino ad ora abbiamo potuto dimostrare che 20^b di radiazione rappresentavano il limite mortale incerto, e che 24^b di radiazione costituiscono il limite mortale più basso fino al presente trovato.

Infatti in tre animali operati con poltiglia esposta per 20^h al radio si ebbero risultati non più sicuri e costanti, sebbene con effetto mitigato; di essi due soltanto riuscirono positivi, ma con sviluppo del tumore molto tardivo, dopo 35 e dopo 61 giorni, e con decorso assai più lento di quello ordinario, per quanto l'esito fosse sempre letale. Nel 3° animale l'esito rimase permanentemente negativo. Invece dopo 24^h di radiazione si ebbero effetti costanti, cioè nessun innesto positivo nei topolini trattati con poltiglia radiata per tale periodo di tempo.

Da ciò deve concludersi che 20^h di radiazione non sono ancora sufficienti per annullare completamente il potere patogeno della poltiglia cancerosa, e che il termine minimo per ottenere questo effetto finora da noi rilevato è di 24^h. Rimane quindi uno spazio ristretto di tempo di 4^h da esplorare per vedere se e come si accostino i due termini presentemente provati; ciò che ci proponiamo di fare con ulteriori ricerche, dirette appunto a riempire questa lacuna.

Intanto allo stato attuale delle cose noi dobbiamo aver presente questa scala:

Fino a 10 ^h di radiazione — Nessuna azione dimostrabile			
»	a 20 ^h	»	— Azione incompleta e incostante
»	a 24 ^h	»	— Azione completa e costante.

Dinanzi a questi risultati a nessuno sfugge una considerazione molto importante: l'analogia che nel comportamento di fronte al radio la materia cancerosa rivela con altre malattie determinate indubbiamente da virus filtrabili, quali la rabbia, il vaccino jenneriano, ecc.

2° *Effetti benefici determinati dalla poltiglia cancerosa giustamente radiata sul decorso del cancro sviluppato.*

In attesa di conoscere meglio il limite minimo di inattivazione della poltiglia cancerosa radiata, abbiamo intanto voluto vedere se di tali poltiglie, private completamente della loro azione patogena, avesse proprietà curativa quella che aveva subito 24^h di radiazione, come quella che doveva essere la più vicina al vero limite mortale.

I risultati conseguiti in questa serie di esperienze sono riusciti quanto mai incoraggianti. Infatti noi abbiamo osservato che l'iniezione di $\frac{1}{2}$ cmc.

della poltiglia radiata per 24^h, fatta nel contorno del tumore già visibilmente sviluppato, ed anche se questo aveva raggiunto dimensioni considerevoli (diametro massimo di 20-25 mm.), ne arresta l'accrescimento e ne stabilisce il graduale regresso fino alla sua completa scomparsa. Questa involuzione della neoplasia è accompagnata da un particolare rammollimento del tumore che diviene pastoso e che poco a poco sparisce, senza presentare mai fatti ulcerosi e senza che si avvertano nella pelle soprastante lesioni di nessuna natura. Ulteriori ricerche diranno quali sono le modificazioni istologiche che accompagnano il riassorbimento del tumore e la sua completa guarigione.

Solo eccezionalmente, quando alla iniezione della poltiglia si unirono cause meccaniche esterne, e anche la semplice compressione esercitata dal collodion spalmato quale protezione della parte, si ebbe ad osservare una necrosi secca, asettica, del tumore, prima parziale e poi estesa a tutta la neoplasia, che si separa nettamente con un solco di limitazione dai tessuti normali circostanti; dai quali in ultimo si distaccava, quando già si aveva nel suo contorno ed anche in una specie di sacca formatasi al di sotto del tumore stesso, un processo di riparazione con rigenerazione della pelle e perfino di alcuni rari peli.

Invece, se nella cura del tumore si adoperava nel modo indicato poltiglia cancerosa radiata per 40^h, questa riusciva del tutto indifferente, e la neoplasia seguiva il suo cammino fino all'esito letale, senza nessuna apprezzabile differenza dai controlli. Quindi tra il limite mortale con conservazione del potere vaccinante-curativo e quello più elevato, in cui è scomparsa anche la proprietà vaccinante, intercede, per quanto è finora conosciuto, un tempo molto grande, che nei nostri esperimenti risulta di 16^h.

Con ciò adunque viene ad essere stabilito che la poltiglia radiata per 24^h, mentre ha perduto interamente il suo potere patogeno, per contro ha conservato buona parte delle proprietà vaccinali, così da agire molto efficacemente sullo stesso tumore dal quale la poltiglia deriva, determinandone la completa scomparsa, come fosse un auto-vaccino curativo.

A nessuno può sfuggire l'importanza di questa conclusione, nella quale il giusto grado di radiazione può agli effetti vaccinali paragonarsi alla giusta attenuazione dei virus o delle rispettive colture, per prima rivelata dal genio immortale del Pasteur nella trasformazione dei virus in vaccini.

3° *Meccanismo di azione della poltiglia cancerosa giustamente radiata nella cura del cancro.*

Dopo aver riconosciuto l'azione curativa della poltiglia cancerosa, sorgeva spontaneo il bisogno di sapere con quale meccanismo essa esercitasse questa sua azione. E più precisamente se tale effetto benefico fosse da ascrivere ancora nella categoria delle azioni dirette, dovesse cioè riportarsi alla radioattività indotta conferita dal radio, e quindi alle emanazioni e alle radiazioni che dalla poltiglia radiata si liberavano in seno dei tessuti, nei quali era stata iniettata durante il periodo di disattivazione; oppure fosse

da ascrivere nella categoria delle *azioni indirette*, quale effetto di principi vaccinanti sviluppatisi nella poltiglia sotto l'opera della radiazione.

A tale fine abbiamo attivato una soluzione di un sale indifferente, scegliendo la soluzione fisiologica di cloruro di sodio, esponendola al radio il tempo necessario perchè lasciasse sulla lastra fotografica una impressione netta, eguale per intensità a quella lasciata in identiche condizioni dalla poltiglia cancerosa.

La soluzione salina radiata venne poi iniettata nella quantità di $1/2$ cmc. attorno ad un tumore già arrivato a vario periodo di sviluppo, senza che tale neoplasia avesse a subire modificazione alcuna nel suo sviluppo, nel suo decorso e nei suoi esiti. La morte degli animali avveniva nello stesso limite di tempo di quella dei controlli. Eguale risultato negativo ottenemmo con la poltiglia cancerosa tenuta per 24-40^h in ghiacciaia senza essere stata sottoposta alle azioni del radio.

Ci riserbiamo di vedere ancora se la poltiglia di organi fisiologici convenientemente radiata avesse lo stesso effetto sul tumore già sviluppato come la poltiglia cancerosa: osserviamo intanto che il topolino risulta molto sensibile ai tossici di disgregazione dei tessuti eterogenei.

L'effetto completamente negativo delle controprove stabilite induce a concludere che non è alla radioattività indotta, acquistata dalla poltiglia cancerosa per effetto della sua esposizione al radio, e nemmeno alla semplice conservazione a freddo di questa poltiglia per un tempo eguale od anche superiore a quello che vale a conferire alla poltiglia radiata potere vaccinante-curativo, che debesi la efficacia di questa ultima, bensì *agli stessi costituenti del cancro che trovansi nella relativa poltiglia ed alla sua trasformazione in un vaccino-curativo, una volta perduto totalmente, per l'azione del radio, il loro potere patogeno.*

Così noi, a mezzo del radio, siamo arrivati al risultato basale per le future ricerche, cioè di distruggere interamente nella poltiglia cancerosa il suo potere patogeno, pur rispettando in modo completo o in proporzione grande le sue proprietà vaccinanti, che in tale maniera sono messe in evidenza a vantaggio della preparazione di un autovaccino-curativo, per cui la poltiglia cancerosa, come i virus meglio noti, conterrebbe insieme, distinti o in reciproca trasformazione, materiali dannosi e materiali utili. Ritorna anche qui adatto l'antico paragone della lancia di Achille, che aveva in sé la potenza di sanare le piaghe che essa produceva.

Finora nulla possiamo dire sulle proprietà di questo vaccino, che ci proponiamo di studiare intimamente, per conoscere in particolare, ai fini della scienza e della pratica; se e quanto si mantiene la sua attività, e tanto allo stato liquido come allo stato secco; se sia possibile, oppure no, una sua maggiore concentrazione e conservabilità; se può riuscirsì a separarlo dai materiali inattivi ed ingombranti; se agisce solo localmente e nella zona

circostante al tumore, nella quale in queste prove è stato esclusivamente iniettato, o se la stessa efficacia si verifici quando la introduzione del vaccino è fatta in punti lontani, perchè non dovesse limitarsene l'uso ai soli casi di tumore esterno od in località facilmente accessibili.

Nulla possiamo egualmente dire, allo stato della ricerca, sulla possibilità di applicazione all'uomo, vale a dire se anche per l'uomo, può prepararsi con eguale effetto un auto-vaccino come quello che si prepara nel topolino.

Al quale intento sarebbe anche opportuno di risolvere in precedenza la questione, se ogni vaccino abbia la specificità esclusiva pel tumore dal quale deriva, oppure se il vaccino di un tumore abbia la polivalenza necessaria per servire a più varietà di tumori.

Nel primo senso parlerebbero gli insuccessi sull'uomo di terapie trovate utili in tumori di animali; nel secondo la panimmunità messa in luce dall'Ehrlich e più particolarmente i recenti studi di Gye e Barnard che ritengono il virus oncogene costituito dalla cooperazione necessaria di due fattori, uno specifico e uno generico. Pel nostro caso il vaccino potrebbe attaccare, o il fattore generico ed allora il suo compito sarebbe reso oltremodo agevole; o al contrario il fattore specifico ed allora incontrerebbe nell'attuazione pratica difficoltà grandissime e talora insormontabili, e sarebbe, soprattutto, necessario stabilire una precisa selezione delle radiazioni utili nel caso speciale, fra quelle di molteplice natura che l'analisi rivela emanate dalle sostanze radioattive.

Quindi, senza voler destare soverchie illusioni, possiamo al presente dire solamente che le attuali nostre esperienze offrono per lo meno un primo solido appoggio per continuare nella ricerca fino al punto in cui i risultati conseguiti ci autorizzeranno a tentare la prova sull'uomo, e che intanto offrono ancora una volta la dimostrazione che vi è aperta una via per arrivare con fondata speranza alla risoluzione dell'immane problema scientifico e umanitario.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Geometria. — *Sistemi ciclici di curve sopra una superficie.* Nota del Prof. W. BLASCHKE presentata dal Socio G. CASTELNUOVO ⁽¹⁾.

Le linee geodetiche di una superficie hanno la proprietà, che i loro piani osculatori in un punto passano per la normale della superficie. Studiando la geometria proiettivo-differenziale G. Fubini ⁽²⁾ ha considerato dei sistemi ∞^2 di curve sopra una superficie S , i piani osculatori dei quali in

(1) Presentata nella seduta del 1° novembre 1925.

(2) G. FUBINI, *Fondamenti della geometria proiettivo-differenziale di una superficie*, « Atti di Torino », 53 (1918), p. 1032-1042, § 2.

ogni punto della S formano fascio. E. Bompiani ⁽¹⁾, insieme con L. Bianchi e G. Castelnuovo, ha trovato dei teoremi elegantissimi su questi sistemi, che egli chiama « assiali ». Mi permetterò di annunciare nella seguente nota dei teoremi del tutto analoghi appartenenti alla geometria differenziale delle superficie del gruppo conforme nello spazio ordinario.

DEFINIZIONE: *Un sistema ∞^2 di curve sopra una superficie S sarà detto « ciclico », se i cerchi osculatori delle curve del sistema in un punto p di S segano tutti ancora una volta un cerchio N normale in p alla S .*

Per esempio le linee geodetiche formano un tale sistema, i loro cerchi N diventando rette.

I. *Per una trasformazione puntuale e regolare fra due superficie S, S' esiste, se la trasformazione non è conforme, un solo sistema ciclico sulla S conservantesi ciclico sulla S' .*

II. *Per una trasformazione conforme invece tutti i sistemi ciclici sono invariantivi.*

La dimostrazione dei teoremi I e II si fa per esempio col calcolo assoluto di Ricci rispetto ad una forma $\delta\sigma^2 = G_{ik}\delta u^i\delta u^k$ proporzionale all'elemento lineare, il fattore di proporzionalità rimanendo arbitrario. Si trova allora:

III. *La equazione differenziale delle curve di un sistema ciclico è la seguente:*

$$\frac{E_{ik}\delta u^i\delta^2 u^k}{G_{ik}\delta u^i\delta u^k} = X_k\delta u^k$$

dove $E_{ik} = -E_{ki}$, mentre la forma lineare $X_k\delta u^k$ è arbitraria. Le $\delta^2 u^k$ sono i differenziali invariantivi del Fubini. Le X_k individuano il cerchio N .

Con questa formola si vede facilmente che

IV. *Le estremali sopra una superficie di un problema di variazioni del tipo*

$$\delta \int F ds = 0,$$

dove F è una funzione soltanto del punto, formano un sistema ciclico speciale.

Per la sfera i sistemi assiali coincidono coi sistemi ciclici e godono della proprietà caratteristica, che i triangoli curvilinei, formati dalle curve del sistema hanno la somma π dei loro angoli.

Le dimostrazioni dei teoremi annunciati usciranno nelle « Abhandlungen des mathematischen Seminars der Hamburgischen Universität ».

(1) E. BOMPIANI, *Corrispondenza puntuale fra due superficie...*, « Rendiconti dei Lincei », 32 (1923), p. 376-380; *Proprietà generali della rappresentazione puntuale fra due superficie*, « Annali di matematica » (4) 1 (1923-24), p. 259-284.

Meccanica. — *Un teorema di esistenza ed unicità nella statica dei materiali poco resistenti a trazione.* Nota di ANTONIO SIGNORINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA⁽¹⁾.

1. In alcune Memorie di prossima pubblicazione⁽²⁾ mi sono occupato di varie questioni relative alla pressoflessione del cemento armato, colle direttive ed i risultati esposti in una conferenza tenuta recentemente al Seminario matematico della R. Università di Roma⁽³⁾.

In questa Nota (e in un'altra che le farà seguito) tratto molto succintamente il caso particolare della pressoflessione di un cilindro retto C di materiale omogeneo, poco ed incertamente resistente a trazione-pressoflessione delle murature —.

2. Naturalmente si suppone che sulla base S di C agisca un sistema di forze equivalente alla pressione normale \mathbf{P} applicata in un punto O — centro di pressione — interno al contorno corretto di S [cioè, alla curva convessa s involupata dalle tangenti ad S che non tagliano S]⁽⁴⁾; che sull'altra base del cilindro sia distribuito un sistema di forze equivalente ad una forza eguale e direttamente opposta a \mathbf{P} ; che siano nulle le forze di massa e le forze agenti sulla superficie laterale.

Rappresentiamo con G il baricentro di S ; con (x, y, z) una terna trirettangola di origine O avente l'asse positivo x sovrapposto ad OG ⁽⁵⁾ e l'asse positivo z orientato secondo la normale interna a C ; con S_x la sezione normale generica del cilindro; con ϵ_x il coefficiente di dilatazione lineare nella direzione z , relativo al punto generico A di C ; con $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ le caratteristiche dello stress in A ; con k il carico di sicurezza a compressione pel materiale di C .

(1) Pervenuta all'Accademia l'8 ottobre 1925.

(2) La prima di queste Memorie è in corso di stampa negli « Annali di Matematica », sotto il titolo *Sulla pressoflessione del cemento armato*.

(3) Vedi A. SIGNORINI, *Sulla statica del cemento armato*, « Rend. del Seminario della R. Univ. di Roma » (1925).

(4) Non può escludersi che S sia moltiplicemente connessa (caso dei canini) o, pur essendo semplicemente connessa, non sia convessa (caso dei pilastri delle chiese); mentre dal lato costruttivo non ha senso il preoccuparsi del caso che O sia esterno ad s . Del resto non sarebbe difficile servirsi dei procedimenti indicati nella presente Nota, per dimostrare che se O è esterno ad s l'equilibrio sussiste ed è univocamente determinato, allora ed allora soltanto che $\frac{|OI|}{|IG|} < \frac{\tau S}{P}$ [ove si rappresenti con I il punto d'intersezione di s col segmento OG e τ sia definito come più oltre nel testo].

(5) Si esclude il caso $O \equiv G$, cioè il caso banale della pressione semplice.

Con queste notazioni alle ipotesi universalmente adottate dai tecnici per la soluzione del problema della pressoflessione delle murature può darsi la forma sottoindicata.

α) *Indipendenza dello stress dalla distribuzione locale delle forze agenti sulle basi.*

Per la base S le condizioni d'equilibrio possono identificarsi colle condizioni d'equivalenza tra la forza — \mathbf{P} applicata in O ed il sistema delle forze interne applicate ai singoli elementi di S: ed analogamente per l'altra base del cilindro.

β) In ogni punto di C

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_x = \tau_y = \tau_z = 0.$$

γ) *Conservazione delle sezioni piane.*

I valori di ϵ_z sono gli stessi che si avrebbero ove nella deformazione del cilindro ogni S_z ruotasse rigidamente di un angolo infinitesimo proporzionale a z attorno ad uno stesso asse da scegliersi opportunamente nel piano (x, y) — asse limite ⁽¹⁾ —.

δ) *Validità della legge di Hooke nella sollecitazione a compressione.*

In ogni punto di C ove sia $\epsilon_z < 0$

$$\sigma_z = E \epsilon_z,$$

con $E = \text{cost. positiva} = \text{modulo medio di elasticità (normale)}.$

ϵ) *Assoluta mancanza di resistenza a trazione.*

In ogni punto di C ove sia $\epsilon_z > 0$

$$\sigma_z = 0.$$

ζ) *Condizione di stabilità.*

$$E \epsilon_M \leq k,$$

ϵ_M rappresentando il modulo del minimo assoluto (negativo) di ϵ_z .

3. Le ipotesi α), β) notoriamente possono farsi risalire a Saint-Venant, l'ipotesi γ) a Bernoulli: le altre corrispondono ad uno schema di carattere semplicista dei risultati delle prove di resistenza delle murature.

Generalizziamo le ipotesi δ), ϵ), ζ) nelle seguenti, le quali offrono un larghissimo margine alla più fedele rappresentazione delle prove di resistenza delle murature, in quanto si limitano ad affermare proprietà che sono spontaneamente suggerite dalle meno delicate esperienze.

$\delta)_g$ *Comportamento nella sollecitazione a compressione.*

In ogni punto di C ove sia $\epsilon_z < 0$

$$\sigma_z = -p[-\epsilon_z],$$

(1) Escludendosi il caso della pressione semplice, l'asse limite dovrà essere a distanza finita: anzi in genere sarà da aspettarsi che esso tagli S.

p rappresentando una funzione la cui forma effettiva dipende solo dalla natura del materiale, e che al variare del suo argomento da 0 a $+\infty$ cresce costantemente da 0 a $+\infty$; mentre la sua derivata p' passa, sempre decrescendo, dal valor finito $p'[0] = E_0$ al valore $p'[\infty] = E_\infty > 0$.

$\varepsilon)_g$ Comportamento nella sollecitazione a trazione.

In ogni punto di C ove sia $\varepsilon_\chi > 0$

$$\sigma_\chi = t[\varepsilon_\chi],$$

ove t è un'altra funzione caratteristica del materiale, che al variare del suo argomento da 0 a $+\infty$ passa monotonamente da 0 ad un certo valore positivo e finito $\tau^{(1)}$, mentre la sua derivata t' costantemente decresce da $t'[0] = E_0$ a $t'[\infty] = 0$.

$\zeta)_g$ Condizione di stabilità.

$$p[\varepsilon_M] \leq k.$$

Nei numeri segg. sarà accennata la dimostrazione del

Teorema d'esistenza ed unicità. « Le ipotesi $\alpha), \beta), \gamma), \delta)_g, \varepsilon)_g$ [in particolare, le ipotesi $\alpha), \beta), \gamma), \delta)$ $\varepsilon)$] individuano perfettamente lo stress non « appena siano assegnati P ed O [oltre gli elementi caratteristici della « costituzione geometrica e materiale del solido] ».

4. Rappresentando con π il piano condotto per l'asse limite l parallelamente a χ e con d il valore algebrico della distanza di A da π , contato positivamente dalla banda di O , l'ipotesi $\gamma)$ si traduce nell'equazione

$$(1) \quad \varepsilon_\chi = -\omega d,$$

pur d'intendere che ω sia una costante da scegliersi opportunamente.

In conseguenza di $\beta), \delta)_g, \varepsilon)_g$ ed (1) le equazioni indefinite della statica dei sistemi continui [in assenza di forze di massa] sono soddisfatte in tutto C indipendentemente dal valore di ω e dalla posizione di l . Al tempo stesso, per solo effetto di $\beta)$, restano soddisfatte le condizioni ai limiti su tutta la superficie laterale di C . Quindi le equazioni d'equilibrio si identificano con quelle che traducono $\alpha)$:

$$(2) \quad -P = \int_S \sigma_\chi dS, \quad 0 = \int_S x \sigma_\chi dS, \quad 0 = \int_S y \sigma_\chi dS.$$

Da queste, pel solo fatto che in tutto S la σ_χ deve avere il segno di ε_χ , cioè il segno di $-\omega d$, necessariamente segue che in S esisterà una regione P sollecitata a compressione ($\varepsilon_\chi \leq 0$), che l non passerà mai per O , che rispetto ad l la P giacerà dalla banda di O , che $\omega > 0$.

(1) Anzi τ è sempre piccolo in confronto al carico di rottura a compressione del materiale di C .

5. Sia (ξ_i, η_i) la coppia ortogonale di origine O, complanare e congruente ad (x, y) , definita dal valore i dell'anomalia del suo asse positivo ξ_i rispetto ad (x, y) ; L il piede della perpendicolare condotta da O all'asse limite; $\Xi = |OL|$; I il valore di i pel raggio OL; $-\alpha_i$ il minimo [negativo] e β_i il massimo [positivo] di ξ_i in S⁽¹⁾.

In corrispondenza a valori qualunque delle tre variabili i, q, δ poniamo

$$(3) \quad F_{m,n}(i, q, \delta) = \int_{P_{i,\delta}} p[q(\delta - \xi_i)] \xi_i^m \eta_i^n dS - \\ - \int_{T_{i,\delta}} t[q(\xi_i - \delta)] \xi_i^m \eta_i^n dS \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots)$$

rappresentando con $P_{i,\delta}$ la regione di S compresa tra le rette $\xi_i = -\alpha_i$, $\xi_i = \delta$ [in particolare, con $P_{I,\Xi}$ la P] e con $T_{i,\delta}$ la regione residua di S.

In base a $\delta)_g, \epsilon)_g$ ed (1), le (2) risultano sostituibili con

$$(S) \quad P = F_{0,0}(I, \omega, \Xi) \quad ; \quad 0 = F_{1,0}(I, \omega, \Xi) \quad , \quad 0 = F_{0,1}(I, \omega, \Xi)$$

e l'enunciato del teorema d'esistenza ed unicità si riduce ad affermare [per ogni valore positivo di P] l'esistenza ed unicità della soluzione, del sistema (S) nelle tre incognite I, ω, Ξ , subordinatamente alle condizioni

$$(C) \quad -\pi \leq I < \pi \quad , \quad \omega > 0 \quad , \quad \Xi > 0.$$

Anzi la dimostrazione del teorema mette in evidenza che

$$(I) \quad -\frac{\pi}{2} < I < \frac{\pi}{2}.$$

6. In corrispondenza a valori qualunque delle variabili i, q, δ poniamo

$$(4) \quad f_{m,n}(i, q, \delta) = \int_{P_{i,\delta}} p'[q(\delta - \xi_i)] \xi_i^m \eta_i^n dS + \\ + \int_{T_{i,\delta}} t'[q(\xi_i - \delta)] \xi_i^m \eta_i^n dS \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots)$$

Derivando (3) rispetto a q e confrontando il risultato ottenuto con (4), si trova subito

$$(5) \quad \frac{\partial F_{m,n}}{\partial q} = \delta f_{m,n} - f_{m+1,n}.$$

(1) Si ricordi che O è interno di S.

Procedendo in modo analogo per le variabili i e δ si ottiene

$$(6) \quad \frac{\partial F_{m,n}}{\partial \xi_i} = -q f_{m,n+1} + m F_{m-1,n+1} - n F_{m+1,n-1}$$

$$(7) \quad \frac{\partial F_{m,n}}{\partial \delta} = q f_{m,n}$$

anche quando la retta $\xi_i = \delta$ taglia S .

7. Assumendo $k(\xi_i, \eta_i) = p'[q(\delta - \xi_i)]$ in $P_{i,\delta}$, $k(\xi_i, \eta_i) = p'[q(\xi_i - \delta)]$ in $T_{i,\delta}$, risulta

$$f_{m,n} = \int_S k(\xi_i, \eta_i) \xi_i^m \eta_i^n dS \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots)$$

con k funzione generalmente continua e sempre positiva in S : onde la forma quadratica nelle tre variabili x_0, x_1, x_2

$$\sum_{r,s} f_{r,s} x_r x_s = \int_S k(\xi_i, \eta_i) \left\{ x_0 + x_1 \xi_i + x_2 \eta_i \right\}^2 dS$$

è certamente definita positiva. Ciò basta per affermare che sussistono tutte e tre le disequaglianze

$$(8) \quad f_{0,0} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{0,0} & f_{1,0} \\ f_{1,0} & f_{2,0} \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} f_{0,0} & f_{1,0} & f_{0,1} \\ f_{1,0} & f_{2,0} & f_{1,1} \\ f_{0,1} & f_{1,1} & f_{0,2} \end{vmatrix} > 0.$$

8. Pensiamo fissato il valore di i e consideriamo il sistema in q, δ

$$(9) \quad P = F_{0,0}(i, q, \delta), \quad 0 = F_{1,0}(i, q, \delta), \quad q > 0.$$

Da (5), (7) ed (8) segue che per ogni valore positivo di q

$$\frac{\partial F_{0,0}}{\partial \delta} = q f_{0,0} > 0, \quad \frac{\partial (F_{0,0}, F_{1,0})}{\partial (q, \delta)} = q \Delta_2 > 0.$$

Basandosi su queste disequaglianze, ricorrendo anche direttamente alle proprietà ammesse per le funzioni p e t , rilevando che la convenzione $y_G = 0$, $x_G > 0$ dà luogo a $(\xi_i)_G > 0$ quando e soltanto quando $-\frac{\pi}{2} < i < \frac{\pi}{2}$, si dimostra con tutto rigore che se i non è interno all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ il sistema (9) è incompatibile, mentre nel caso opposto esso ammette una ed una sola soluzione $q = \omega_i > 0$, $\delta = \Xi_i$.

Anzi - rappresentando con ε_* il numero positivo definito dall'equazione $P = p[\varepsilon_*] S$ - cioè la costante cui si ridurrebbe $-\varepsilon_x$ nel caso della pressione semplice, contemporaneamente si stabilisce che $\Xi_i > 0$ e $\lim_{i \rightarrow \mp \frac{\pi}{2}} \omega_i = 0$,

$$\lim_{i \rightarrow \mp \frac{\pi}{2}} (\omega_i \Xi_i) = \varepsilon_*.$$

Di qui, posto $M_i = F_{0,1}(i, \omega_i, \Xi_i)$, si deduce subito

$$(10) \quad \lim_{i \rightarrow \mp \frac{\pi}{2}} M_i = \pm P |OG|, \quad \lim_{i \rightarrow \mp \frac{\pi}{2}} \left(\frac{M_i}{\omega_i} \right) = \pm \infty:$$

mentre, approfittando di (5), (6), (7), (8), resta facile stabilire che

$$(11) \quad \Delta_2 \frac{d(\omega_i \Xi_i)}{di} = \omega_i (f_{0,1} f_{2,0} - f_{1,1} f_{1,0}) + M_i f_{1,0}$$

e

$$(12) \quad \Delta_2 \omega_i^2 \frac{d}{di} \left(\frac{M_i}{\omega_i} \right) = -\Delta_2 \omega_i^2 - M_i^2 f_{0,0} < 0$$

[ove tutte le $f_{m,n}$ sono riferite agli argomenti i, ω_i, Ξ_i].

Le (10)₂ e (12) implicano l'esistenza, entro $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, di una ed una sola radice dell'equazione $M_i = 0$: e quindi corrispondono ad una simultanea dimostrazione della (I) e del teorema d'esistenza ed unicità.

9. Nel caso simmetrico, cioè quando OG è asse di simmetria per S, risulta $M_0 = 0$ e quindi $I = 0$. Ciò permette di affermare che la retta l_i d'equazione $\xi_i = \Xi_i$ dà la posizione assunta dall'asse limite quando, *caeteris paribus*, si trasformi la sezione effettiva in una sezione simmetrica rispetto a ξ_i , imprimendo alle singole strisce di S parallele ad η_i una conveniente traslazione nella direzione di η_i .

Un'altra semplice proprietà degli assi l_i risulta dal far corrispondere al valore generico di i in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ il punto O_i di coordinate $\xi_i = 0$, $\eta_i = \frac{M_i}{P}$. Si trova subito che l_i dà anche la posizione dell'asse limite nella sollecitazione Σ_i del cilindro C corrispondente al solito carico P , ma al centro di pressione O_i .

Al variare di i da $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ il punto O_i parte dalla posizione G [cfr. (10)₁] per ritornarvi dopo essersi sovrapposto ad O una ed una sola volta [per $i = I$].

Idromeccanica. — *Moti liquidi laminari potenziali su sviluppabili.* Nota di BRUNO FINZI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI ⁽¹⁾.

1. Consideriamo il moto di un velo liquido su di una superficie σ . Il moto sia potenziale sulla superficie stessa: φ ne sia il potenziale.

Il prof. Cisotti ⁽²⁾ definì per tali moti il potenziale complesso $f = \varphi + i\psi$, nonchè la variabile complessa z sulla superficie, variabile complessa che porremo sotto la forma $z = y_1 + iy_2$. In una Nota recente ⁽³⁾, constatai come sia proficuo riferire la metrica di σ a y_1 e y_2 , nelle quali coordinate risulta:

$$ds^2 = \lambda^2 (dy_1^2 + dy_2^2) \quad , \quad \lambda^2 = \frac{1}{\Delta_1 y_1} = \frac{1}{\Delta_1 y_2} .$$

Se la superficie σ è una sviluppabile, è possibile riferire la metrica superficiale ad un sistema coordinato ortogonale tale che

$$(1) \quad ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 .$$

Per le superfici sviluppabili dunque $\lambda = 1$.

Consideriamo il piano π il cui

$$ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 .$$

La corrispondenza tra superficie e piano, non solo è conforme (come si mostra per generiche superfici ⁽⁴⁾), ma in più è corrispondenza di applicabilità.

Conformemente a quel che ho fatto nella Nota citata ⁽⁵⁾, stabilisco una corrispondenza tra due moti d'uguale potenziale φ , l'uno sulla superficie (σ), l'altro sul piano (π). Sarà

$$(2) \quad v_1 = \bar{v}_1 \quad , \quad v_2 = \bar{v}_2 \quad , \quad v = \bar{v} .$$

Ad ogni moto piano potenziale corrisponde dunque un equivalente moto d'ugual potenziale su σ , moto che è appunto caratterizzato dalle (2).

(1) Presentata nella seduta del 10 novembre 1925.

(2) U. CISOTTI, *Equazioni fondamentali dei moti laminari potenziali sopra una superficie qualunque*, questi « Rendiconti », vol. I (1925), p. 612, n. II.

(3) B. FINZI, *Considerazioni su i moti irrotazionali di lamine liquide*, questi « Rendiconti », vol. II (1925), p. 236.

(4) B. FINZI, loc. cit., n. 2.

(5) B. FINZI, loc. cit., n. 3.

L'idromeccanica piana può dunque dirsi idromeccanica su superficie sviluppabili, senza che una sola relazione venga alterata formalmente, purchè, ben si intende, y_1 e y_2 si interpretino anzichè quali coordinate cartesiane sul piano, quali coordinate su σ , tali che, rispetto ad esse, la metrica assuma la forma (1).

Ad esempio:

Si vogliono studiare i moti laminari potenziali su di una superficie cilindrica di rotazione.

Riferiamoci a due famiglie di eliche cilindriche ortogonali. Sulla superficie la metrica sarà appunto della forma (1). Studiamo, a puro titolo d'esempio, i moti di veli liquidi scorrenti tra due linee libere⁽²⁾.

È ben noto⁽³⁾ che per un velo piano il moto non può avvenire, nelle condizioni del problema, che o per rette parallele, così che

$$(3) \quad v_1 = \text{cost.}, \quad v_2 = \text{cost.},$$

oppure per circonferenze concentriche: lungo ogni circonferenza è $v = \text{cost.}$, e, se r è il raggio di una di esse, a e b i raggi delle due circonferenze libere.

$$(4) \quad v = \frac{q}{\log \frac{b}{a}} \frac{1}{r}.$$

Nella (4) q è la portata tra le due circonferenze libere.

Per un velo superficiale allora, le (3) e la (4) non muteranno espressione, e le interpreteremo dicendo: Sulla superficie cilindrica le linee di flusso o sono eliche parallele, e il moto quindi è un moto elicoidale uniforme⁽⁴⁾, oppure le linee di flusso sono cerchi geodetici concentrici⁽⁵⁾, percorsi con velocità v definita dalla (4).

2. È utile osservare che se il moto di una lamina liquida su di una superficie (in particolare sviluppabile) è potenziale sulla superficie stessa, le considerazioni relative ai moti laminari potenziali su di una superficie sussistono inalterate anche se il liquido è viscoso. È bene però richiamare che

(1) Una constatazione diretta per il caso delle superficie cilindriche di rotazione si può vedere nella Nota in corso di pubblicazione, A. MASOTTI, *Sui moti di un liquido perfetto che avvengono per strati cilindrici e sferici*, «Rend. Ist. Lombardo», vol. LVIII 1925.

(2) Linee libere: così come son definite da U. CISOTTI, *Idromeccanica piana*, parte I, Libreria editrice Politecnica Milano, 1921, p. 65.

(3) U. CISOTTI, *Idromeccanica piana*, parte I, p. 67.

(4) Sono qui compresi i moti traslatori rettilinei uniformi (secondo l'asse della superficie cilindrica), e i moti rotatori uniformi (attorno all'asse della superficie cilindrica).

(5) I cerchi geodetici di raggio r sono le linee di equazione $y_1^2 + y_2^2 = r^2$, o, se si vuole, in coordinate cilindriche θ, τ , se R è il raggio della superficie cilindrica $R^2 \theta^2 + \tau^2 = r^2$.

l'indipendenza del moto dalla viscosità del liquido, non autorizza affatto a ritenere gli sforzi esercitati dal liquido in moto indipendenti dalla viscosità ⁽¹⁾.

Interessante, dal punto di vista pratico, è allora l'esempio testè segnalato, in quanto che esso riflette i possibili moti potenziali di lubrificanti nei cuscinetti dei supporti delle trasmissioni usate in macchine e costruzioni industriali.

3. I moti liquidi potenziali su superficie sviluppabili presentano uno speciale interesse che credo opportuno mettere in rilievo:

Prendiamo in esame il moto di una massa liquida. Sia σ una generica superficie di flusso. Indichiamo con $\text{rot}_\sigma \mathbf{v}$ la rotazione superficiale di \mathbf{v} . Se $\text{rot}_\sigma \mathbf{v} = 0$ il moto su σ è moto potenziale, e quindi del tipo studiato ⁽²⁾. Si osservi, a questo proposito, che può esser $\text{rot}_\sigma \mathbf{v} = 0$ senza che sia identicamente $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ ⁽³⁾, senza cioè che il moto spaziale sia irrotazionale.

Proponiamoci il seguente problema: È possibile un moto spaziale tale che la superficie di flusso σ sia isotachia, pur essendo il moto su σ potenziale ⁽⁴⁾? In una prossima Nota mostrerò come sia possibile rispondere affermativamente alla questione; non solo, ma determinerò le equazioni differenziali atte a definire il moto stesso. Di queste equazioni determinerò l'integrale generale allorchè il fluido è perfetto; determinerò invece qualche integrale particolare, in qualche caso di notevole interesse, allorchè il fluido è viscoso. Per ora mi limito a dimostrare un teorema atto a mettere in rilievo l'intimo legame tra il problema accennato con i moti su superficie sviluppabili.

Teorema: Se su di una superficie di flusso un moto liquido è potenziale, e la superficie è isotachia, la superficie è necessariamente sviluppabile.

Infatti: Se φ è il potenziale su σ , l'operatore superficiale Δ_2 ⁽⁵⁾ definisce $\Delta_2 \varphi = 0$. Se ψ è la coniugata armonica di φ , sarà $\Delta_2 \psi = 0$, e

$$\Delta_1 \varphi = \Delta_1 \psi, \quad \nabla(\varphi, \psi) = 0 \quad (6).$$

(1) U. CISOTTI, *Sulle equazioni del moto piano dei liquidi viscosi*, « Rendiconti del R. Istituto lombardo », vol. LVI, gennaio 1923.

(2) Cfr. U. CISOTTI, B. FINZI, loci citati.

(3) Sulla definizione di rot_σ cfr. P. BURGATTI, *I teoremi del gradiente, della divergenza, della rotazione sopra una superficie e loro applicazione ai potenziali*, « R. Acc. delle Scienze dell'Ist. di Bologna », serie VII, t. IV, 1917.

(4) Se il moto spaziale è irrotazionale ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$) (senza che lo sia, in generale, il moto superficiale) e quindi il moto spaziale stesso potenziale, tale problema fu studiato da HELMHOLTZ e J. WEINGARTEN, *Ueber particuläre Integrale der Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$, und eine mit der Theorie der Minimalflächen Zusammenhängende Gattung von Flüssigkeitsbewegungen, « Nachrichten von der K. Gesell. der Wiss. » und der « Georg-Augusts Universität zu Göttingen », Sitz. 5 Juli 1890, pp. 313-335).

(5) I parametri differenziali $\Delta_2, \Delta_1, \nabla$, si riferiscono a σ , e non allo spazio tridimensionale. Per sola brevità e consuetudine si omette l'indice σ .

(6) L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, III ed., vol. 1°, parte I, pp. 124-129.

Allora

$$ds^2 = \frac{1}{\Delta_x \varphi} (d\varphi^2 + d\psi^2).$$

Ma $\Delta_x \varphi = v^2$, così che

$$(5) \quad ds^2 = \frac{1}{v^2} (d\varphi^2 + d\psi^2).$$

Se $v = \text{cost.}$, la (5) ci assicura che la superficie è sviluppabile ⁽¹⁾.
C. V. D.

Fisica. *Sulla grandezza relativa di atomi e ioni.* Nota di RITA BRUNETTI, presentata dal Socio A. GARBASSO ⁽²⁾.

I. — In un precedente lavoro ⁽³⁾ abbiamo messo in evidenza come gli spostamenti che i limiti delle serie X subiscono pel passaggio di un elemento dallo stato libero a quello molecolare in un composto polare possono indicarsi come provenienti da due processi: formazione dello ione e introduzione di esso in un reticolo cristallino. Questo secondo processo dà luogo alla definizione di un numero di schermo, γ , che abbiamo chiamato molecolare e che si può calcolare in prima approssimazione dal valore del potenziale elettrostatico del reticolo cristallino di cui lo ione fa parte; mentre il primo processo, che corrisponde essenzialmente ad aggiunta o sottrazione di un elettrone all'atomo, si riflette sopra il numero di schermo totale, risultante dalla somma dei numeri di schermo interno ed esterno per l'orbita considerata. Abbiamo anche accennato come l'aggiunta o la sottrazione di un elettrone all'atomo normale, intuitivamente può pensarsi collegata a un processo di dilatazione o contrazione delle schiere elettro-liche che accompagnano il nucleo a seconda che la carica negativa supera quella positiva del nucleo o le è inferiore, cosicchè la variazione del numero di schermo totale col suo segno potrà non solo indicare il formale aumento o la diminuzione delle cariche atomiche, ma anche in determinati casi la esistenza di una variazione di volume del sistema elettronico.

(1) Che su di una sviluppabile siano possibili moti con $v = \text{cost.}$, è stato da me già messo in rilievo (B. FINZI, loc. cit., n. 4). In particolare, se la superficie è applicabile su di una superficie di rotazione, potremo ora asserire che la superficie trovata nella mia Nota citata (n. 4), è appunto una sviluppabile. A tal proposito (correggendo un errore materiale) noto che tale superficie ha per equazione $\rho = \frac{k}{c \cos \theta \mp \sqrt{c^2 - 1} \sin \theta}$, ossia la superficie in discorso è applicabile su di un cono di rotazione.

(2) Presentata nella seduta del 1° novembre 1925.

(3) R. BRUNETTI, « Rend. R. Acc. dei Lincei », serie VI, 2, novembre, 1925.

Ci proponiamo ora di esaminare a quali conclusioni in questo ordine di idee porta la applicazione delle formule relative ai numeri di schermo allora scritte ai pochi casi sperimentali che, per la attendibilità delle misure di spostamento del limite di una serie X e la completezza degli altri dati occorrenti pel calcolo della energia del reticolo cristallino, si prestano a considerazioni quantitative.

2. — Secondo il nostro modo di vedere⁽¹⁾ il limite della serie X, la cui discontinuità d'assorbimento continuo è provvista di struttura fine, è l'ultimo minimo dopo la discontinuità medesima dalla parte delle lunghezze d'onda più brevi. In mancanza di questo dato preciso ci possiamo contentare della lettura di punti corrispondenti nello spettro d'assorbimento dell'elemento e del relativo composto situati in prossimità del limite vero.

A queste condizioni provvisorie soddisfano il cloro e alcuni cloruri, lo solfo e alcuni solfuri nelle osservazioni di Lindh⁽²⁾ per le bande K. Aggiungeremo tuttavia anche i risultati di Tandberg⁽³⁾ per le bande L di iodio e ioduro di sodio e quelli ancora di Lindh⁽⁴⁾ per potassio e ioduro di potassio. La struttura delle bande L dello iodio si prevede poco sviluppata, d'altra parte Tandberg afferma di aver eseguito le letture della posizione della banda non nel punto di flesso della sua curva fotometrica, ma, appena è stato possibile, a metà della pendenza uniforme di essa. Il che garantisce che è stata colta per quanto con poca precisione proprio la parte sensibile della banda. Qualche riserva pare si debba invece fare circa i dati relativi al potassio: tuttavia non si giudica che un maggiore sviluppo della discontinuità dello ioduro debba variare il segno di $\epsilon' - \epsilon$ quale risulta dall'attuali esperienze.

Nella tabella le colonne indicate con $\frac{v}{R}$ e $\sqrt{\frac{v}{R}}$ (v frequenza, R costante di Rydberg) portano anche $\frac{v'}{R}$ e $\sqrt{\frac{v'}{R}}$ pei composti. I potenziali dei reticoli cristallini ΔV sono espressi in volt⁽⁵⁾. Fra parentesi sono stati posti i risultati che appaiono incerti. Nell'ultima colonna, accanto alla media della variazione del numero di schermo totale, è la corrispondente variazione in volt dell'energia dell'orbita considerata. Essa è ottenuta mediante le relazioni facili a dedurre:

$$\Delta \bar{v} = -\frac{2\bar{R}}{n} \sqrt{\frac{v}{R}} (\epsilon' - \epsilon) \quad (6) \quad \Delta V' = \frac{h \cdot \Delta \bar{v} \cdot c}{e} \cdot 300 = 1.2345 \cdot \Delta \bar{v} \cdot 10^{-4}$$

(1) R. BRUNETTI «Rend. R. Acc. dei Lincei», serie VI, 2, ottobre, 1925.

(2) *Diss. Lund*, 1923.

(3) «Arkiv f. Mat. Astr. och Fysik», 18, 14, p. 1, 1924.

(4) Id. id., 18, 14, p. 12, 1924.

(5) H. GRIMM, «Zs. f. Phys. Chemie», 102, 113 e 504, 1922; BORN, «Atomtheorie des festen Zustandes», Berlin, 1923, p. 747.

(6) $\bar{v} = \frac{1}{\lambda}$, se λ è la lunghezza d'onda, e $\bar{R} = 109737 \text{ cm}^{-1}$.

Elemento	λ_0 in Å	ν R	$\sqrt{\frac{\nu}{R}}$	$\varepsilon' - \varepsilon + \gamma$	ΔV in volt	$\frac{\Delta \nu}{R}$	$\gamma = -n \cdot \frac{\Delta \nu}{2R \sqrt{\frac{\nu}{R}}}$	$\varepsilon' - \varepsilon$	$\Delta V'$ in volt
Cl ₂ (K)	4.3816	207.98	14.42	—	—	—	—	—	—
Li Cl	4.3596	209.03	14.46	—0.04	7.79	0.575	—0.020	—0.02	—
Na Cl	4.3592	209.04	14.46	—0.04	7.83	0.578	—0.020	—0.02	—
K Cl	—	—	—	—	7.14	0.527	—0.018	—	—
Cs Cl	—	—	—	—	7.41	0.517	—0.019	—	—
Media								—0.02	+7.8
(L ₁)	2.711	336.14	18.33	—	—	—	—	—	—
J _{cris.} (L ₂)	2.548	357.64	18.91	—	—	—	—	—	—
(L ₃)	2.402	379.38	19.48	—	—	—	—	—	—
(L ₁)	2.708	336.51	18.35	(—0.04)	6.77	0.500	—0.027	(—0.013)	—
J _{Na} (L ₂)	2.542	358.49	18.95	(—0.08)			—0.026	(—0.054)	—
(L ₃)	2.397	380.17	19.50	(—0.04)			—0.026	(—0.014)	—
S _{cris.} (K)	4.9942	182.48	13.508	—	—	—	—	—	—
Zn S	4.9878	182.70	13.52	—0.012	16.0	1.181	—0.044	+0.032	—
Cd S	4.9877	182.70	13.52	—0.012	14.7	1.085	—0.040	+0.028	—
Mg S	—	—	—	—	14.3	1.056	—0.039	—	—
Media								+0.030	—11
K _{solido} (K)	3.431	295.59	16.296	—	—	—	—	—	—
K J	3.4283	265.80	16.303	—0.007	6.22	0.459	+0.014	—0.021	—

ΔV per cloro, iodio, solfo, ioni negativi, è positivo, quindi γ è negativo; $\varepsilon' - \varepsilon + \gamma$ essendo sempre negativo, il segno di $\varepsilon' - \varepsilon$ dipende dal valore assoluto di γ e risulta negativo per cloro e iodio, positivo per lo solfo, ΔV pel potassio è invece negativo, γ è positivo, $\varepsilon' - \varepsilon + \gamma$ essendo negativo, risulta anche $\varepsilon' - \varepsilon$ negativo.

3. — In tutti questi casi a rigore viene confrontata la posizione del limite della serie del composto con quella di una combinazione omopolare

di atomi in luogo che con quella dell'atomo libero (gas monoatomico). Noi non abbiamo fin qui elementi per giudicare con sicurezza del segno e dell'ordine di grandezza della correzione che sarebbe necessario apportare ai dati sperimentali raccolti per ricondurli alle condizioni teoriche. Da varie presunzioni pare non troppo azzardato ritenere che tale correzione sia di ordine di grandezza inferiore allo spostamento che si ottiene pel legame di un elemento in composto; preferiamo quindi, piuttosto che ricorrere a procedimenti correttivi di dubbio valore, lasciare i dati quali sono e affidare la verifica del fatto così ammesso alla ragionevolezza dei risultati che dai numeri adoperati si deducono. Tuttavia in generale terremo conto solo dei segni dei numeri di schermo totali appunto in quanto sulla grandezza dei valori calcolati non si crede di poter fare affidamento assoluto.

Nel passaggio da potassio a potassio-ione abbiamo una effettiva diminuzione del numero di schermo, il che giustifica pienamente il segno di $\epsilon' - \epsilon$ quale risulta dall'esperienza. Non c'è qui in via assoluta bisogno di introdurre la esistenza di una variazione di volume dell'atomo ulteriore a quella derivante dalla distruzione del suo anello esterno (N_1)⁽¹⁾. Anche se essa esiste non si manifesta nel segno di $\epsilon' - \epsilon$, e però la sua azione sul valore del numero di schermo totale è inferiore certo a quella che presenta la scomparsa di uno ione nell'atomo.

Presso cloro e iodio nella formazione dello ione monovalente il numero di schermo delle orbite K o L diminuisce, contrariamente a quanto ci si può attendere dal semplice aumento del numero di elettroni esterni. Questo indicherebbe il prevalere sulla azione di schermo, della dilatazione delle schiere elettroniche nel passaggio atomo \rightarrow ione negativo.

Il caso di solfo-elemento solfo-ione si presenta normale. L'aumento delle cariche esterne dell'atomo dà luogo a un aumento del numero di schermo totale, $\epsilon' - \epsilon > 0$. La cosa non è però a sua volta singolare se confrontata col comportamento degli alogeni per cui $\epsilon' - \epsilon < 0$. Possiamo infatti supporre che uno degli elettroni di valenza dello solfo abbia la stessa funzione che l'unico del cloro (completare l'anello M_1), e perciò gli spetti ugual segno della variazione del numero di schermo (negativo). Allora la variazione del numero di schermo totale per l'altro elettrone sarà positiva e un po' più forte di quella che spetta ad ambedue gli elettroni di valenza (per esempio $x = 0.032 + 0.02 = 0.052$).

Pel passaggio da un elemento al successivo a metà del terzo gruppo della tavola periodica, vale a dire per l'aggiunta di una carica positiva al nucleo e una negativa alle schiere elettroniche esteriori, si ha variazione di schermo per l'orbita K positiva e relativamente sempre più forte di quella

(1) Teniamo presente in queste considerazioni la distribuzione degli elettroni fra gli anelli atomici dati da E. STONER, «Phil. Mag.», 48, 719, 1924.

che otteniamo per la formazione dello ione solfo ⁽¹⁾. Per quanto è noto circa i volumi atomici si ha qui una contrazione del sistema elettronico almeno fino allo solfo.

Si può dunque ritenere che un elettrone aggiunto all'atomo di solfo (stato instabile) non alteri sensibilmente le sue dimensioni, e all'altro spetti la funzione di produrre una dilatazione fino a portarlo a quelle dimensioni che sono richieste dalla sua stabilità.

4. — Sostanzialmente da quanto precede, deriva che mentre l'ione dei metalli alcalini è di volume inferiore a quello dell'atomo, l'ione negativo degli alogeni e dei metalloidi è superiore a quello dell'atomo.

Coi dati a nostra disposizione noi non possiamo fin qui dire altro che la variazione del raggio dell'orbita K pel cloro è 1/700 ⁽²⁾. Con espe-

(1) Per l'orbita di numero quantico principale n di due atomi successivi della tavola periodica possiamo scrivere:

$$W = Rb \cdot \frac{(Z - \epsilon)^2}{n^2} \quad W' = Rb \cdot \frac{(Z' - \epsilon')^2}{n^2}$$

ove W, Z e le altre lettere con o senza apice hanno il solito significato ($Z' = Z + 1$) o anche per $W = h\nu$, $W' = h\nu'$

$$n \sqrt{\frac{\nu}{R}} = Z - \epsilon \quad n \sqrt{\frac{\nu'}{R}} = Z' - \epsilon'$$

da cui per differenza:

$$\epsilon' - \epsilon = \left(Z' - n \sqrt{\frac{\nu'}{R}} \right) - \left(Z - n \sqrt{\frac{\nu}{R}} \right) = 1 + n \left(\sqrt{\frac{\nu}{R}} - \sqrt{\frac{\nu'}{R}} \right).$$

Coi dati forniti da Lindh e Fricke per gli elementi puri da Mg, $Z = 12$, a Fe, $Z = 26$, troviamo per $\epsilon' - \epsilon$ i seguenti valori sempre positivi per Z crescente:

12 Mg	13 Al	14 Li	15 L	16 S	17 Cl	18 A	19 K	20 Ca	21 Le	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe
0.08	0.08	0.07	0.08	0.07	0.06	0.05	0.05	0.06	0.06	0.06	0.07	0.05	0.07	

Facendo uso della tabella compilata da Bohr e Coster per le frequenze limite delle serie X, con dati tuttavia meno attendibili perchè non limitati a elementi liberi, si trova che $\epsilon' - \epsilon$ è ancora positivo fino a circa due terzi della tavola periodica, sia per l'orbita K che per le successive. Si nota una ragionevole tendenza della variazione del numero di schermo a crescere per le orbite meno interne nell'atomo. Il cambiamento di segno che si ha per alcune orbite verso la fine della tavola periodica, potrebbe indicare un diverso comportamento degli elementi più pesanti rispetto alle caratteristiche variazioni di volume degli elementi dei primi periodi.

(2) Pel raggio dell'orbita di un elettrone interno dell'atomo supposta circolare si ha facilmente $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2 n^2}{rh} \cdot \frac{1}{Z^*}$ quindi $\frac{dr}{r} = - \frac{dZ^*}{Z^*}$ (SOMMERFELD, *Atombau und Spektrallinien*, 3^a ed., p. 260, 1923) e infine $\frac{dr}{r} = - \frac{\epsilon' - \epsilon}{n \cdot \sqrt{\frac{\nu}{R}}}$.

rienze relative a orbite più esterne, ci si potrebbe avvicinare al valore effettivo della variazione del raggio atomico pel passaggio a ione negativo.

Mentre nella curva dei volumi atomici di L. Meyer il volume dell'alogeno è inferiore a quello del metallo alcalino che lo segue, per un complesso di considerazioni empiriche e teoriche è ammesso ormai che questo rapporto negli ioni è invertito, gli ioni dei metalli e degli alogeni sono di volume superiore a quello degli ioni positivi che seguono il gas raro ⁽¹⁾.

Il meccanismo proposto a interpretare lo spostamento dei limiti delle serie X, metterebbe dunque in luce dati sperimentali atti a stabilire la relazione esistente fra la curva periodica di L. Meyer per i volumi degli elementi e quelle di H. Grimm per i raggi degli ioni.

La questione ha una certa importanza non solo dal punto di vista teorico ma anche da quello pratico. Per risolvere problemi riferentisi a casi di strutture cristalline complesse si è trovato opportuno, coi dati forniti dalla analisi di cristalli più semplici, calcolare il raggio d'azione dei singoli elementi o ioni nella ipotesi preliminare che le sfere d'azione siano entro il composto a contatto reciproco e però le distanze fra atomi o ioni nei cristalli siano la somma dei raggi delle sfere d'azione.

Il Bragg suppone che i raggi delle sfere d'azione coincidano col raggio atomico, e perviene a una curva di raggi atomici che richiama quella di L. Meyer per i volumi degli ioni salvo in qualche dettaglio. Il Davey suppone che i raggi delle sfere d'azione coincidano con quelli degli ioni, ammettendo in più l'eguaglianza dello ione alogeno con quello dell'alcalino che lo segue. Egli ottiene una curva dei raggi ionici che ha similitudine con quella del Grimm.

Senza entrare in merito a un eventuale significato che i risultati pare attribuiscono anche alla ipotesi del Bragg, notiamo che quella del Davey, nonostante certa arbitrarietà di dettaglio, si presenta almeno in certi casi come più promettente in quanto tiene conto implicitamente del processo di cambiamento di volume degli elementi per la trasformazione in ione. La analisi cristallina attribuisce infatti alle sfere d'azione degli atomi dei cristalli omopolari dei metalli, raggio superiore a quello che risulta dai calcoli del Davey sulle sfere d'azione degli ioni relativi in cristalli eteropolari.

(1) Una discussione completa dei risultati empirici e teorici a questo proposito si trova in H. GRIMM, «ZS. für Phys. Chem.» 98, 343, 1922. La curva del Grimm per i raggi degli ioni è stata pubblicata anche dal SOMMERFELD in *Atombau und Spektrallinien*, p. 132.

Fisica. — *Una esperienza caratteristica nella birifrangenza elettrica o magnetica.* Nota ⁽¹⁾ di A. PONTREMOLI presentata dal Socio CORBINO ⁽²⁾.

Consideriamo un'onda luminosa di frequenza ν , polarizzata linearmente e che si propaghi in un gas costituito da molecole aventi la simmetria di un ellissoide di rotazione per le proprietà dielettriche o diamagnetiche.

Attribuiamo, per semplicità, ad ogni molecola un solo elettrone di polarizzazione: se la molecola ha rispetto alle sue proprietà ottiche la stessa simmetria che rispetto alle proprietà dielettriche o diamagnetiche, tale elettrone possederà due frequenze proprie, l'una ν_P per moti lungo l'asse polare, l'altra ν_E nella direzione ad esso normale.

Si operi in zone spettrali tanto lontane da ν_P e ν_E da poter trascurare lo smorzamento e sia infine ρ l'angolo che l'asse polare di una generica molecola forma col vettore elettrico F dell'onda incidente.

I momenti m_P ed m_E che questa molecola acquista, sotto l'azione dell'onda, rispettivamente lungo l'asse polare P e in una direzione ad esso normale E (che giaccia nel piano di F e di P), sono dati da

$$m_P = \frac{e^2 \cos \rho \cdot F'}{4 \pi^2 m (\nu_P^2 - \nu^2)} \quad , \quad m_E = \frac{e^2 \sin \rho \cdot F'}{4 \pi^2 m (\nu_E^2 - \nu^2)}$$

ove F' è il campo risultante da F e dalla polarizzazione che F produce nel mezzo, e ed m sono la carica e la massa dell'elettrone.

Abbreviando potremo scrivere

$$m_P = b_P \cdot F' \cdot \cos \rho \quad , \quad m_E = b_E \cdot F' \cdot \sin \rho$$

e per la componente m_P del momento della molecola, in direzione di F , otterremo

$$m_F = [b_E + (b_P - b_E) \cos^2 \rho] \cdot F'.$$

Il momento totale, dovuto a tutte le molecole, qualunque sia il loro orientamento, avrà per componente M_F in direzione di F

$$M_F = F' \int_0^N [b_E + (b_P - b_E) \cos^2 \rho] dN$$

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica Complementare della R. Università di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia l'8 ottobre 1925.

ove dN rappresenta il numero di molecole, fra le N per unità di volume, il cui asse giace in un angolo solido infinitesimo attorno alla direzione ρ .

Come ha dimostrato il Langevin⁽¹⁾, in assenza di un campo esterno orientante e non contribuendo i campi variabili dell'onda ad un orientamento, è

$$(1) \quad M_F = NF' \cdot \frac{b_P + 2b_E}{3}.$$

Imponiamo un campo orientante esterno H (elettrico o magnetico, costante) colle linee di forza nel piano del vettore elettrico e magnetico dell'onda luminosa, e consideriamo il triangolo sferico HFP, staccato su una sfera unitaria dalla direzione del campo H , dal vettore elettrico F e dall'asse polare P di una generica molecola. Siano θ, φ, ρ i lati HP, HF, FP, e ψ l'angolo HFP, avremo $\cos \theta = \cos \rho \cos \varphi + \sin \rho \sin \varphi \cos \psi$.

Se allora è

$$W = -\frac{1}{2} (P \cos^2 \theta + E \sin^2 \theta) \cdot H^2$$

l'energia potenziale della molecola⁽²⁾, si ha per il numero dN di molecole per unità di volume, i cui assi polari sono compresi nel rettangolo curvilineo tra ρ e $\rho + d\rho$, ψ e $\psi + d\psi$

$$(2) \quad dN = N \frac{e^{a \cos^2 \theta} \cdot \sin \rho \, d\rho \, d\psi}{\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi e^{a \cos^2 \theta} \sin \rho \, d\rho}$$

$$\text{ove } a = \frac{P - E}{2kT} H^2.$$

Il piccolo valore⁽³⁾ di a , nelle condizioni in cui si esperimenta, consente di sviluppare l'esponenziale in serie limitandosi alla prima potenza, pertanto dalla (2), eseguendo le integrazioni e riducendo, si ricava come valore della componente lungo F (che chiameremo M_H^F) del momento totale dovuto all'azione del vettore elettrico dell'onda, quando esiste un campo orientante H ,

$$M_H^F = NF' \left[\frac{b_P + 2b_E}{3} - \frac{2a}{45} (b_P - b_E) (1 - 3 \cos^2 \varphi) \right].$$

(1) LANGEVIN, *Le Radium*, t. VII, p. 249, 1910.

(2) $P \cos \theta$ ed $E \sin \theta$ sono i momenti che la molecola acquisterebbe rispettivamente in direzione di P e di E per effetto di un campo orientante unitario diretto come H , k la costante di Boltzmann e T la temperatura assoluta.

(3) LANGEVIN, loc. cit., p. 3 e 4.

Ora in un precedente lavoro ⁽¹⁾ abbiamo dimostrato che su un cono retto di apertura $54^{\circ}44'7''$, avente per asse il campo orientante, la distribuzione statistica delle molecole, i cui assi polari giacciono sul cono, è invariante rispetto al campo stesso (anche nullo) purchè costante e purchè non preesistano nella molecola momenti permanenti. Quale è la componente della polarizzazione elettrica del gas, lungo il vettore elettrico della radiazione incidente che la genera, se questo si trova proprio sul cono? Basterà porre $\varphi = 54^{\circ}44'7''$, essendo allora $\cos^2 \varphi = \frac{1}{3}$, si ricava, confrontando la (1), $M_P^H = M_P$, cioè anche la polarizzazione elettrica lungo le generatrici del cono è invariante rispetto al campo esterno orientante, se il vettore elettrico che la provoca giace sul cono.

Il mezzo è ancora birifrangente con le note proprietà uniassiche quando agisce il campo esterno. L'onda uscente dal mezzo è polarizzata ellitticamente: scindiamola in due componenti, l'una - con vettore elettrico parallelo a quello dell'onda incidente - avrà, per quanto si è esposto, un indice di rifrazione non influenzato dal campo orientante; l'altra - con vettore elettrico normale a quello incidente - dovrà avere invece un indice di rifrazione funzione di H^2 , essendo la polarizzazione elettrica proporzionale ad H^2 , perchè, a campo nullo, il mezzo è isotropo ed è nulla la componente del vettore elettrico incidente in questa direzione.

Questo risultato è estremamente caratteristico e ci sembra possa avere lo stesso valore probativo per la teoria dell'orientamento molecolare di Langevin, come l'esperienza sui ritardi assoluti (il cui rapporto deve essere — 2) e che si esegue sui liquidi; estendendo a questi la teoria fatta per i gas. Ma l'esperienza sui ritardi assoluti è molto delicata, mentre si può progettare una assai semplice per il controllo della proprietà che abbiamo annunciato.

Disponiamo sul cammino di uno dei fasci di un interferometro di Jamin un mezzo, colle caratteristiche di asimmetria presupposte e al quale si possa dare una birifrangenza elettrica o magnetica; usiamo luce monocromatica polarizzata linearmente, il cui vettore elettrico fermi l'angolo caratteristico trovato colle linee di forza e posponiamo al mezzo un nicol analizzatore parallelo al polarizzatore. Compensiamo sul secondo fascio, con un compensatore di Jamin, il cammino ottico della luce, nel mezzo, per campo nullo: le frangie non debbono spostarsi per effetto del campo.

Questa nuova esperienza - così intimamente legata al meccanismo della birifrangenza elettrica o magnetica - può riuscir oggi di particolare interesse, dopo le ricerche dell'Himstedt ⁽²⁾ che trova per varie sostanze come rapporto dei ritardi assoluti il valore di — 4, anzichè quello di — 2, preconizzato dalla teoria e dalle esperienze dell'Aeckerlein ⁽³⁾.

(1) PONTREMOLI, questo vol. dei « Rendiconti », p. 328.

(2) HIMSTEDT, « Ann. Phys. », 48, p. 1061, 1915.

(3) AECKERLEIN, « Phys. Zeitschr. », 7, p. 594, 1906.

Neppur questo metodo potrà tuttavia fornire una prova cruciale tra l'ipotesi della anisotropia molecolare e quella dei momenti permanenti, i contributi dovuti all'una o all'altra di queste caratteristiche comparando semplicemente sotto forma additiva nella birifrangenza risultante. Per discriminare le due ipotesi vale l'elegante metodo prospettato dal Corbino⁽¹⁾: il trascinamento dei liquidi isolanti in un campo rotante.

Chimica. — *Le varietà di ossido di torio e loro azione catalitica nella disidratazione dell'alcool.* Nota di G. R. LEVI⁽²⁾, presentata dal Socio G. BRUNI⁽³⁾.

Che l'ossido di torio agisca come energico catalizzatore nella reazione di formazione dell'etilene dall'alcool etilico fu dimostrato dal Sabatier⁽⁴⁾ e dai suoi collaboratori, particolarmente da Mailhe.

Gli autori non danno particolari indicazioni sull'ossido di torio adoperato; fanno osservare soltanto che la temperatura di reazione per l'alcool etilico deve essere superiore a 320°, e che in tal caso la reazione è praticamente quantitativa.

In alcune mie recenti ricerche ho avuto occasione di rilevare come alcune delle attuali cognizioni sull'ossido di torio e sulle sue varietà, debbano considerarsi errate e di ciò feci breve cenno in una comunicazione alla Società di Chimica Industriale in Milano⁽⁵⁾. Ho perciò voluto esaminare in modo particolare la questione delle varietà di ossido di torio in relazione alla loro struttura ed al loro potere come catalizzatori.

Le diverse varietà di ossido di torio.

Nei principali trattati⁽⁶⁾ si trovano descritti i seguenti tipi di ossido di torio: 1° ossido di torio ordinario amorfo, 2° ossido di torio ordinario cristallino, 3° ossido di torio meta (condensato).

Le diverse preparazioni date finora per l'ossido di torio amorfo debbono oggi considerarsi errate: infatti seguendo queste, Goldschmidt e Thomassen⁽⁷⁾ hanno ottenuto un prodotto perfettamente cristallino che ha dato buoni fotogrammi col metodo delle polveri, permettendo di stabilire che questa sostanza ha gli atomi di torio in un reticolo cubico a facce cen-

(1) CORBINO, « Rend. Lincei », 32, p. 145, 1923.

(2) Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica Generale del Politecnico di Milano.

(3) Presentato nella seduta del 1° novembre 1925.

(4) « Ann. Chimie et Physique », XX, 1910, p. 326.

(5) « Gior. Chim. Ind. e App. », VII, 410 (1925).

(6) Gmelin-Kraut's, 7^a ed., VI (1911), p. 107 e seg. Abegg III, 2 (1909), p. 833 e seg.

(7) « Vidensk. Skrif. Mat. Klasse », N. 2 (1923).

trate con $a = 5.61$, mentre gli atomi di ossigeno sono verosimilmente con una disposizione analoga a quella degli atomi di fluoro nella fluorite.

Circa i metodi dati come preparazione del ThO_2 cristallino non vi è nulla da obiettare.

Il cosiddetto prodotto meta si scioglie negli acidi più facilmente di quello normale; è assai leggero ed igroscopico, e a prima vista appare effettivamente come una varietà distinta.

I preparati da me esaminati sono:

- a) Idrato di torio puro asciugato all'aria.
- b) Idrato di torio puro asciugato a 80° .
- c) Idrato di torio puro asciugato a 120° .
- d) Ossido dall'idrato seccato a 340° .
- e) Ossido dall'idrato seccato a 1050° .
- f) Ossido meta dall'ossalato per riscaldamento a 750° .
- g) Ossido meta dal nitrato per riscaldamento a 750° .

a, b, c). L'idrato di torio fu ottenuto precipitando una soluzione di $\text{Th}(\text{SO}_4)_2$ con ammoniacca a freddo; dopo prolungati lavaggi per decantazione e filtrazione, il prodotto fu asciugato all'aria e a 80° . Il prodotto non era da considerarsi puro perchè occludeva 2.4 % di sali ammoniacali. Una porzione fu asciugata a 120° . Tutti e tre questi preparati esaminati col metodo delle polveri ed anticatodo di rame, risultarono completamente *amorfi*; poche e debolissime linee osservate vanno attribuite ai prodotti di occlusione.

d) L'ossido ottenuto dall'idrato seccato a 340° dava ancora alla calcinazione al rosso una perdita di 4.1 %, dovuta prevalentemente a sali ammoniacali; dopo lavaggio del prodotto seccato e finalmente macinato con acqua a caldo si asportarono in gran parte i sali ammoniacali, e il prodotto nuovamente seccato a 340° diede alla calcinazione una perdita dell'1.7 %. Esaminato con anticatodo di rame risultò completamente *amorfo*.

e) Il prodotto seccato come sopra e arroventato un'ora a 1050° diede un fotogramma perfettamente nido caratteristico di un prodotto cristallino con linee assai fine. Pei valori delle linee osservate vedi tabella.

f) Il prodotto ottenuto dall'ossalato e noto tipicamente come varietà meta diede, come risulta dai valori della tabella, un fotogramma identico al precedente, non solo per la posizione delle linee ma anche per la loro intensità. La differenza in più pei valori di θ osservati nel prodotto ordinario, si spiega con la maggiore opacità di questo ai raggi X in confronto alla varietà meta più leggera.

Nella varietà meta le linee appaiono meno fine, il che indica che il prodotto meta è anzi meno condensato di quello ordinario contrariamente a quanto viene generalmente affermato. La larghezza delle linee è del resto assai poca cosa e non permette di misurare la dimensione dei granuli.

È facilmente spiegabile la maggiore reattività della varietà meta, tenendo conto del fatto che i granuli più fini reagiscono più facilmente.

Pure alle più piccole dimensioni dei granuli è da attribuire la grande igroscopicità del prodotto; che si tratti di un semplice fenomeno fisico di assorbimento è dimostrato dall'identità di due fotogrammi ottenuti, uno con ossido meta secco, l'altro con ossido meta conservato per alcuni giorni in ambiente chiuso in presenza di acqua.

TABELLA.

N.	Ossido di torio normale		Ossido di torio meta		N.	Ossido di torio normale		Ossido di torio meta	
	θ	I	θ	I		θ	I	θ	I
1	29,4	m	29,0	m	14	78,8	f	77,5	f
2	31,4	m	30,6	md	15	83,3	md	82,0	d
3	34,0	md	33,2	md	16	87,4	ff	86,2	ff
4	41,4	d	40,5	d	17	93,7	ff	92,6	ff
5	43,3	d	42,6	d	18	97,8	d	95,8	d
6	45,2	d	44,5	d	19	104,8	m	103,7	md
7	48,0	f	47,0	f	20	111,5	ff	110,2	ff
8	51,0	d	50,0	d	21	114,0	m	112,8	m
9	56,7	ff	55,5	ff	22	123,7	ff	122,2	f
10	59,5	md	58,2	md	23	128,0	d	—	—
11	65,2	d	—	—	24	131,2	f	129,3	tuf
12	69,5	md	68,2	m	25	134,0	f	133,0	mf
13	76,4	f	75,1	f					

g) Il prodotto ottenuto dal nitrato diede un fotogramma che si può dire identico a quello del prodotto e) e perciò con granuli più grossi di quelli del prodotto ottenuto dall'ossalato. I valori praticamente identici non vengono riportati per brevità.

Azione delle diverse varietà di ossido di torio sulla disidratazione dell'alcool etilico. — Al metodo del capillare di Sabatier e Senderens ho preferito il seguente dispositivo: l'ossido di torio, sempre in una navicella di eguali dimensioni e nella stessa quantità, veniva posto nel centro di un tubo di vetro riscaldato a 340° con manicotto d'aria e a temperatura costante ($\pm 1^\circ$) usando un dispositivo autoregolatore Heraeus. Il tubo comunicava all'uscita con un comune azotometro, e all'entrata con un palloncino riscaldabile a 170° mediante un bagno elettrico purè autoregolabile. L'alcool delle varie esperienze nella quantità quasi eguale veniva posto in una bolla di vetro sottile e pesato esattamente. Dopo aver cacciato l'aria con una corrente di CO₂ pura e secca, si scaldava il bagno contenente il palloncino a 170° previa

rottura della bolla. Una corrente uniforme di CO_2 portava i vapori di alcool sul catalizzatore e l'etilene formata all'azotometro.

Furono fatte tre esperienze rispettivamente con 1° ossido di torio amorfo secondo *d*); 2° ossido cristallino normale secondo *e*); 3° ossido meta secondo *f*). Essi nelle identiche condizioni diedero il seguente risultato:

1° Con ossido di torio amorfo *d*) la resa in etilene è del 71 % del teorico e l'odore dei prodotti di condensazione è debolissimo.

2° Con ossido di torio cristallizzato normale *e*) la resa è dell'80 % e l'odore dei prodotti di condensazione è debole ma più distinto che nel caso precedente.

3° Con ossido di torio meta *f* la resa in etilene è quantitativa, il gas è praticamente puro ma odora fortemente per tracce di prodotti di condensazione.

Le tre esperienze sono perfettamente confrontabili, dato che le differenze nelle quantità di alcool fra una preparazione e l'altra non erano più di tre milligrammi, e le quantità di ossido e tutte le altre condizioni di esperienza identiche.

Tuttavia si deve osservare che, mentre il confronto fra le esperienze 1^a e 2^a non può dar luogo ad alcuna osservazione, trattandosi di prodotti che nella navicella occupano sensibilmente lo stesso volume, nel caso dell'ossido meta più leggero si ha un prodotto più adatto alla condensazione pel processo di catalisi, e perciò la sua spiccata azione può trovare una semplice e convincente spiegazione in questo fatto.

È infine interessante osservare che il prodotto amorfo dopo la catalisi risulta ancora tale e cioè, nessuna tendenza alla cristallizzazione, neppure incipiente, fu osservata per la contemporanea azione del calore e dei vapori di alcool. Anche facendo catalizzare da una piccola quantità di ossido amorfo una grande quantità di alcool si ebbe lo stesso risultato.

Non risultò perciò in queste esperienze una azione spiccatamente diversa fra lo stato cristallino e quello amorfo di una stessa sostanza dal punto di vista della catalisi. In base alle attuali concezioni dei reticoli cristallini e alla spiegazione dei veli condensati per azione delle valenze libere alla superficie del cristallo, non sarebbe sembrato improbabile trovare delle differenze assai forti, ma l'esperienza non ha confermato tale supposizione: non intendo naturalmente generalizzare per ora tale conclusione.

Riassumendo: 1° L'ossido di torio normale ed il cosiddetto ossido meta sono entrambi cristallini e sono identici. L'esistenza dell'ossido meta come specie distinta deve essere esclusa.

2° Viene dimostrata l'esistenza di una forma amorfa di ThO_2 stabile anche a temperature superiori ai 300°.

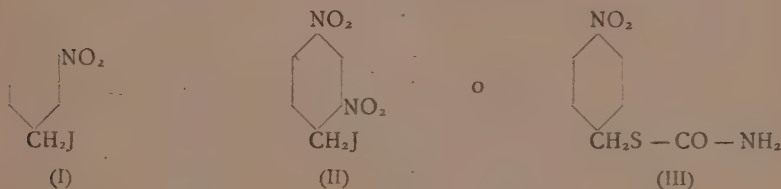
3° L'idrato di torio ottenuto nelle condizioni abituali di preparazione risulta amorfo e trasformabile sopra 300° nella forma amorfa di ThO_2 .

4° La struttura cristallina od amorfa dell'ossido di torio non ha notevole influenza sul suo potere catalitico nella disidratazione dell'alcool etilico.

Chimica. — *Sopra alcuni derivati del toluolo.* — Nota di
RAOUL POGGI, presentata dal Socio A. ANGELI ⁽¹⁾.

Nel corso di ricerche da me eseguite sopra numerosi derivati del toluolo, gran parte dei quali già noti, ho avuto modo di preparare alcuni nuovi composti di cui è dato brevemente conto nella presente Nota.

Si sono presi anzitutto in esame i nitrocomposti seguenti:



I derivati (I) e (II) sono stati preparati dai rispettivi cloruri bollendone la soluzione alcoolica con una quantità leggermente in eccesso di joduro potassico e cristallizzando dall'alcool il prodotto separatosi per diluizione con acqua.

Lo joduro del meta-nitrobenzile si presenta in splendidi prismetti tabulari a sezione quadrata, rifrangenti, leggermente colorati in giallo, a p. f. 84,5°-86°; insolubile in acqua, alquanto solubile in alcool a caldo, poco a freddo, abbastanza solubile in etere ed in benzolo.

Gr. 0.2181 di sostanza diedero, a 11° e 748.4 mm., cc. 9.9 di N.
Calcolato per $C_7H_6O_2NJ$ N % 5.33 trovato N % 5.37.

Il prodotto si è identificato trasformandolo e confrontandolo col relativo solfocianato già noto ⁽²⁾.

Lo joduro dell'orto-para-dinitrobenzile, di cui è fatto cenno da C. Loring Jackson e F. C. Whitmore ³⁾, ma non ancora descritto, cristallizza in minuti aghi tenuamente colorati in giallo, fondenti a 75,5°-76°; insolubile in acqua, alquanto solubile in alcool.

Gr. 0.186 di sostanza diedero, a 18° e 745.6 mm., cc. 14.8 di N.
Calcolato per $C_7H_4O_4N_2J$ N % 9.10 trovato N % 9.16.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica organica della R. Università degli Studi di Firenze.

(2) LUTTER, « Ber. », 30, 1066 (1897).

(3) « Journ. Americ. Chem. Soc. », 37, 1933 (1915); C., 1915, II, 1000.

Il tioetere (III) è stato ottenuto, come gli orto-⁽¹⁾ e meta-⁽²⁾ nitro-isomeri, sciogliendo il solfocianato di para-nitrobenzile ⁽³⁾ (una parte) in acido solforico concentrato (dieci parti); la soluzione, lasciata a sè per sette ore a 0°, versata in acqua ghiacciata, separa una massa cristallina dalla quale si è allontanato completamente l'acido solforico. Ricristallizzando dall'alcool, si hanno minuti cristalli bianco-lucenti a p. f. 140°-141°. Il prodotto è insolubile in acqua, abbastanza solubile in alcool etilico, amilico a freddo, solubilissimo a caldo; scaldato oltre i 100°, assume colorazione giallastra.

Gr. 0.1398 di sostanza diedero, a 12° e 751 mm., cc. 15.75 di N.

Calcolato per $C_8H_8O_2N_2S$ N % 13.21 trovato N % 13.33.

L'etere para-nitrobenzilico dell'acido monotiocarbamidico per ebollizione prolungata, a ricadere, con acido cloridrico al 20% elimina idrogeno solforato, anidride carbonica, ed ammoniaca e dà luogo alla formazione di un olio giallo-biancastro che per raffreddamento si rapprende in una massa cristallina compatta, da cui per successive cristallizzazioni da etere di petrolio si ottengono delle lamelle bianco-splendenti, a p. f. 55°, che si identificano per mercaptano del para-nitrobenzile ⁽⁴⁾:



Gr. 0.1753 di sostanza diedero, a 9° e 756.5 mm., cc. 12.2 di N.

Calcolato per $C_7H_7O_2NS$ N % 8.28 trovato N % 8.38.

Tale mercaptano, che possiede odore sgradevole di sostanza solforata, è volatile in corrente di vapor d'acqua, si ossida lentamente all'aria a bisolfuro del 4-4'-dinitrobenzile; quasi insolubile in acqua, assai solubile in alcool anche a freddo, dà dei mercaptidi metallici cristallini variamente colorati. La soluzione alcoolica di esso si colora in giallo chiaro con alcune gocce di KOH alcoolica, quindi s'intorbida colorandosi in rosso-mattone.

(1) GABRIEL e POSNER, «Ber.», 28, 1027 (1895).

(2) LUTTER, «Ber.», 30, 1067 (1897).

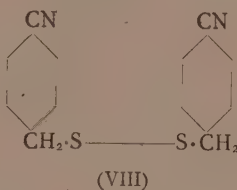
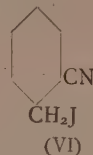
(3) Il solfocianato di para-nitrobenzile da me preparato dal cloruro relativo fonde a 85°-86°, si presenta in splendidi aghetti bianchi, mentre che il solfocianato ottenuto da HENRY, [«Ber.», 2, 638 (1869)] e segnato dal BEILSTEIN [«Handb. der Org. Chem.», vol. II, p. 1060 (1896)] come derivato dal cloruro del para-nitrobenzile, a 70° volatilizza.

Gr. 0.1438 di sostanza diedero, a 14° e 746 mm., cc. 17.9 di N.

Calcolato per $C_8H_8O_2N_2S$ N % 14.43 trovato N % 14.53.

(4) J. STRAKOSCH, «Ber.», 5, 698 (1872); S. PRICE e TWISS, «Soc.», 93, 1403 (1908); 95, 1727 (1909).

Vengo adesso alla descrizione di altri nuovi composti derivati dal toluolo, nei quali si trova collegato al nucleo benzenico un raggruppamento cianico. Sono essi il bromuro e lo ioduro del meta-cianbenzile, lo ioduro dell'orto-cianbenzile, il mercaptano del para-cianbenzile ed il disolfuro del p-p'-dicianbenzile ai quali spettano rispettivamente le seguenti formole di struttura:



Si è preparato l'alogenocomposto (IV) per bromurazione del meta-cianotoluene ottenuto con un rendimento di circa il 50 % dalla meta-toluidina, seguendo il metodo di Sandmeyer ⁽¹⁾.

La bromurazione è stata condotta riscaldando il meta-toluenitrile (a p. e. 209°-212°) a 160° con una quantità di bromo leggermente eccedente alla grammimolecola. Dopo raffreddamento si ha separazione di una massa giallo-marrone chiara, che cristallizza dall'alcool in prismetti bianchi, appena tendenti al nocciola, fondenti a 94°-95.5°.

Gr. 0.1875 di sostanza diedero, a 10° e 760.5 mm., cc. 11.3 di N.

Calcolato per C₈H₆NBr

N % 7.15

trovato N % 7.27.

Questo bromoderivato per trattamento, in soluzione alcoolica, con KSCN si trasforma nel solfocianato relativo già noto ⁽²⁾ a p. f. 55°, col quale si identifica.

Alla stessa combinazione bromurata si giunge facendo reagire la soluzione alcoolica del cloruro del meta-cianbenzile con NaBr; dopo una sola cristallizzazione dall'alcool si ha un prodotto a p. f. 90°.

Insolubile in acqua, solubile in alcool, specialmente a caldo, molto più solubile in etere ed in benzolo, è caratteristico per il suo odore che ricorda quello delle alghe marine.

(1) Cfr. BUCHKA e SCHACHTEBECK, «Ber.», 22, 841 (1889).

(2) EHRLICH, «Ber.», 34, 3370 (1901).

Gli ioduri (V) e (VI) sono stati preparati bollendo la soluzione alcolica dei cloroderivati corrispondenti con KJ e ricristallizzando i prodotti grezzi dall'alcool.

L'isomero meta (V) si presenta in cristalli prismatici a sezione quadrata, con facce assai regolari, bianchi, rifrangenti, a p. f. 113° – 114° .

Gr. 0.3202 di sostanza diedero, a 9.5° e 749.4 mm., cc. 16 di N.
Calcolato per C_8H_6NJ N % 5.76 trovato N % 5.95.

L'orto isomero (VI) fonde a 77° – 78° , cristallizza in bei cristalli rom-
bici, bianco-giallastri, rifrangenti, con facce assai sviluppate e con tremie.

Gr. 0.2098 di sostanza diedero, a 10.3° e 752 mm., cc. 10.35 di N.
Calcolato per C_8H_6NJ N % 5.76 trovato N % 5.88.

Entrambi gli ioduri hanno un leggero odore di alghe marine, sono insolubili in acqua, solubili in alcool a caldo, non molto a freddo, assai solubili in benzolo ed in etere.

È stato possibile ottenere il mercaptano (VII) ponendo a reagire per circa un'ora il cloruro del para-cianbenzile con tiosolfato sodico (una molecola) in alcool al 50%, all'ebollizione. Distillato l'alcool, la soluzione acquosa separa una sostanza bianca cristallina, in squamette, costituita verosimilmente dall'ariltiosolfato sodico:



la quale scaldata lungamente a 70° con acido solforico concentrato, dà luogo ad un olio tenuamente colorato in giallo, che lasciato a sè dopo raffreddamento solidifica in una massa compatta di cristalli bianco-giallastri. Dall'alcool e quindi dall'etere di petrolio si ottengono dei cristalli bianchi, tabulari, disposti in fasci i quali fondono nettamente a 43° .

Gr. 0.2287 di sostanza diedero, a 20° e 745.2 mm., cc. 19 di N.
Calcolato per C_8H_7NS N % 9.39 trovato N % 9.49.

Gr. 0.2430 di sostanza diedero gr. 0.3745 di $BaSO_4$.
Calcolato S % 21.49 trovato S % 21.17.

Il processo da me seguito per la preparazione di questo mercaptano è analogo a quello che S. Price e Twiss⁽¹⁾, seguendo il metodo di Bunte⁽²⁾ e Purgotti⁽³⁾, applicarono per ottenere i mercaptani del para, meta ed orto-nitrobenzile. Devo rilevare che nel prolungato riscaldamento con acido sol-

(1) Loc. cit.

(2) « Ber. », 7, 647 (1874).

(3) « G. », 20, 26 (1890).

forico concentrato dell'ariltiosolfato sodico, che si ha come prodotto intermedio, il gruppo cianico non è alterato ⁽¹⁾.

Questo mercaptano, di odore sgradevolissimo, dà luogo a dei mercaptidi variamente colorati; sublima lentamente, all'aria si altera ossidandosi nel corrispondente disolfuro. Molto solubile in alcool, etere, benzolo, cloroformio, assai in etere di petrolio, è insolubile in acqua.

Ossidato a caldo, in soluzione alcoolica, con tintura di jodio, la quale viene istantaneamente decolorata, dà luogo al disolfuro (VIII) che si presenta in prismetti lucenti, a riflessi argentei, a p. f. 147,5°.

Gr. 0.2138 di sostanza diedero, a 9.5° e 749.9 mm., cc. 17.5 di N.

Calcolato per $C_{16}H_{12}N_2S_2$ N % 9.46 trovato N % 9.76.

Questo disolfuro è poco solubile in alcool, insolubile in acqua, solubile in benzolo, da cui è stato ricristallizzato.

Sono in dovere di ringraziare il dott. Alberto Passerin d'Entrèves per la collaborazione prestatami nelle presenti ricerche.

Chimica. — *Azioni di presenza del carbone* ⁽²⁾. Nota di C. SANDONNINI, presentata dal Socio N. PARRAVANO ⁽³⁾.

L'impiego di sostanze che rendono sensibili alla luce reazioni che di per sè non lo sono, ha condotto a risultati molto interessanti. In alcune reazioni tra sostanze gassose sensibilizzate dalla presenza di cloro, studiate da Weigert ⁽⁴⁾ il meccanismo del processo pare basato sulla formazione dei cosiddetti nuclei di reazione, la cui esistenza venne provata anche sperimentalmente; per molte altre reazioni tra sostanze in soluzione che vengono accelerate coll'aggiunta di sostanze colorate ⁽⁵⁾, specialmente sali di ferro e di uranio, come p. es. l'ossidazione o la decomposizione di sostanze organiche

(1) Con lo stesso procedimento ho ottenuto, con un rendimento del 65 % in prodotto puro, il mercaptano del meta-cianbenzile e che fonde assai più alto di quanto descrive F. EHRLICH [« Ber. », 34, 3374 (1901)], e cioè a 41°-42.5° (invece di 24°-25°) e si presenta in piccoli prismi bianchi, lucenti. Come corpo intermedio si è separato il cianbenziltiosolfato-sodico, sotto forma di cristalli bianchi, fondenti a 112° in una massa lattiginosa. Tale mercaptano per ossidazione ha dato luogo al disolfuro del m-m'-dicianbenzile a p. f. 115°-116.5°, identico a quello già descritto di EHRLICH (loc. cit., p. 3372).

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Padova.

(3) Pervenuta all'Accademia il 20 ottobre 1925.

(4) « Ann. d. Physik », 24, 246 (1907).

(5) BENRATH, « Lehrb. d. Photoch. » (C. WINTER, Heidelberg 1912). WEIGERT, « Ahrens Sammlung. », 17, (1912).

e le reazioni che hanno luogo nel liquido di Eder⁽¹⁾, l'azione accelerante deve attribuirsi a sensibilizzazione ottica.

Recentemente K. W. Rosenmund, K. Luxat e W. Tiedemann⁽²⁾ hanno studiato l'influenza dei raggi ultravioletti su reazioni che conducono al distacco di atomi di alogeni direttamente legati ad anelli aromatici, ed hanno potuto stabilire processi sensibili di per sè stessi ai raggi ultravioletti, la cui sensibilità viene grandemente aumentata dalla presenza di sostanze apparentemente estranee al processo, che pur tuttavia anche da sole, e cioè senza l'intervento di radiazioni, hanno una debole azione catalitica sul processo stesso.

Così p. es. le reazioni tra derivati alogenati aromatici ed alcoolati con formazione di eteri, tra acidi p-alogeno-solfonici e potassa con formazione di ossiacidi, sono accelerate dalla luce ultravioletta da sola, come pure dai sali di rame all'oscuro, ma l'azione combinata della luce e dei sali di rame dà risultati molto maggiori della somma dei due risultati parziali. Il meccanismo di queste reazioni tuttavia non è ancora ben chiaro. Secondo gli autori è indifferente la forma colla quale viene aggiunto il sale di rame, poichè questo nelle condizioni di esperienza si riduce in uno stato di attività superiore al rame C di Ullmann ed anche del rame di Picard⁽³⁾.

Da qualche tempo sto studiando le azioni catalitiche del carbone finalmente diviso, e da una lunga serie di esperienze risulta che il carbone, in processi simili a quelli sopraccegnati non ha alcuna attività catalizzatrice; ma essendo pertanto in queste condizioni capace di assorbire moltissime radiazioni, ho voluto provare se sotto l'influenza di un'intensa illuminazione divenisse un più attivo catalizzatore degli stessi processi già di per sè stessi sensibili alla luce.

Tra i molti processi che mi sono proposto di studiare sotto questo punto di vista ho scelto dapprima la decomposizione dell'acido ossalico e alcune delle reazioni studiate da Rosenmund e collaboratori.

Il carbone usato era carbone di pioppo del Canada distillato a bassa temperatura e lavato con vapore d'acqua a 850°, poscia lavato con acido cloridrico bollente e di nuovo con vapore d'acqua sino ad eliminazione di tracce di cloro; il carbone così preparato conteneva solo quantità trascurabili di silice e veniva da ultimo macinato in polvere finissima.

La soluzione di acido ossalico di titolo noto era contenuta in un palloncino di quarzo trasparente, munito di un buon refrigerante a ricadere, e portata all'ebollizione con una piccola lampada Bunsen; l'illuminazione era fatta con una lampada ad arco con regolazione automatica, mantenuta sempre alla stessa distanza di 15 cm. dal palloncino di quarzo. Vennero usati elettrodi di carbone solo ed elettrodi animati con rame.

(1) WINTER, « Z. Wiss. Photogr. », 7, 409 (1909).

(2) « Ber. », 56, 1950 (1923).

(3) « Chem. Helv. Acta », 5, 147 (1922).

In queste condizioni una soluzione decimonormale di acido ossalico, dopo tre ore di illuminazione da sola non varia sensibilmente di titolo; anche l'aggiunta di quantità variabili di carbone non provoca che variazioni trascurabili, dovute forse ad assorbimento da parte del carbone. Per controllo ho voluto provare in queste condizioni la ben nota attività dei sali di uranio. L'aggiunta di gr. 0,01 di solfato di uranile per 100 cc. di soluzione di acido ossalico provocò infatti decomposizione dal 10 al 12 %. L'azione combinata di sali di uranio e carbone ebbe anzi effetto negativo e la decomposizione discese al 6-7 %. Nessuna differenza sensibile nei risultati si ebbe usando nella lampada ad arco elettrodi di solo carbone od elettrodi animati con rame.

Risultati molto più interessanti si ottennero colla reazione tra p-bromobenzolsolfonato potassico ed idrato potassico da soli, in presenza di rame, in presenza di carbone e di rame all'oscurità ed alla luce della medesima lampada.

La composizione della miscela iniziale delle sostanze reagenti era quella indicata da Rosenmund e collaboratori (loc. cit.). A 25 cc. di una soluzione di 30 gr. di p-bromobenzolsolfonato potassico in 250 cc. di acqua venivano aggiunti 25 cc. di soluzione di idrato potassico al 20 % e 5 gocce di soluzione al 5 % di solfato di rame (circa gr. 0.005 di rame), e la miscela era al solito posta nel palloncino di quarzo con refrigerante a ricadere. La temperatura all'ebollizione raggiunge così il 107° e si mantiene praticamente costante. È da tenere presente che i risultati ottenuti non sono confrontabili direttamente con quelli ottenuti dagli autori sopracitati, per la grande diversità della sorgente luminosa usata. Alla fine della reazione si dosava il bromo, posto in libertà come bromuro potassico, su tutta la miscela col metodo di Volhard.

Vennero eseguite quattro serie di esperienze alla luce ed all'oscurità:

senza catalizzatore

in presenza di solo carbone

in presenza di solo rame

in presenza di rame e carbone.

Nelle esperienze all'oscuro furono usati palloncini di vetro protetti da uno schermo metallico; l'oscurazione del resto non fu molto curata per la completa insensibilità della reazione alle radiazioni permeabili attraverso il vetro comune.

In ogni caso la durata dell'esperienza fu di quattro ore. Nelle tabelle sono date soltanto le decomposizioni percentuali del p-bromobenzolsolfonato, calcolate in base al bromo posto in libertà.

Anche in questo caso non si ebbero differenze sensibili usando nella lampada elettrodi di carbone solo o animati con rame.

TABELLA I

(senza catalizzatore).

N.	Quantità di catalizzatore	% decomposizione	
		all'oscuro	alla luce
1	—	tracce	1.55
2	—	»	1.83
3	—	»	1.94
4	—	»	1.65

TABELLA II

(in presenza di carbone).

N.	Quantità di catalizzatore	% decomposizione	
		all'oscuro	alla luce
5	0.20	0.80	2.75
6	0.20	0.95	3.21
7	0.05	0.65	2.52
8	0.05	—	2.28

TABELLA III

(in presenza di rame).

N.	Quantità di catalizzatore in grammi	% decomposizione	
		all'oscuro	alla luce
9	0.0012	3.78	7.79
10	0.0006	5.26	5.83
11	0.0006	4.66	6.64
12	0.0003	4.23	6.52

TABELLA IV

(in presenza di carbone e rame).

N.	Quantità di		% decomposizione	
	rame	carbone	all'oscuro	alla luce
13	0.0012	0.20	14.66	14.29
14	0.0012	0.05	23.70	26.28
15	0.0012	0.05	18.80	25.04
16	0.0012	0.05	—	24.20
17	0.0006	0.05	10.71	18.80
18	0.0006	0.025	14.66	14.29

La quantità di rame segnato nelle tabelle debbono ritenersi come valori molto approssimativi, essendo calcolate dalla concentrazione della soluzione di sale di rame usata e dal numero delle gocce. Tuttavia piccole differenze nella quantità di rame non possono portare grandi variazioni nei risultati, come si può dedurre dalle esperienze fatte variandone grandemente la quantità.

Da queste esperienze risulta che le attività singole del carbone e della luce per le reazioni considerate in queste condizioni, sono assai deboli e non vengono aumentate dalla loro azione combinata (Tabelle I, II).

I valori raccolti nella tabella III dimostrano, come Rosenmund e collaboratori avevano già trovato, che il processo è sensibile all'azione del rame do solo e che l'azione combinata del rame e della luce produce il maggiore effetto.

I risultati di maggiore interesse sono quelli ottenuti dall'azione combinata del carbone e del rame (Tabella IV). Già all'oscuro in questo caso la decomposizione diviene di gran lunga maggiore della somma degli effetti singoli. Con ogni probabilità la causa di questa deve risiedere nel fatto che il carbone, pur restando un assai poco attivo catalizzatore della reazione, funzionando come materiale inerte e poroso di gran superficie, viene a disperdere maggiormente il rame aumentandone l'attività, analogamente a molti altri casi di catalisi eterogenea.

Partendo da questo concetto ho voluto provare l'attività di alcune varietà di rame note per la loro attività sulla stessa reazione. Nella tabella V sono raccolti i risultati ottenuti col rame di Picard (loc. cit.) e col rame ridotto coll'ipofosfito secondo Mailhe e Murat ⁽¹⁾.

(1) « Bull. Soc. Chim. », 7, 952 (1907).

TABELLA V.

N.	CATALIZZATORE	% decomposizione	
		all'oscuro	alla luce
19	Rame Picard gr. 0.001 circa	17.50	21.77
20	Rame dall' ipofosfito gr. 0.001 circa	16.80	20.70
21	Rame di Picard + Carbone	18.02	22.57
22	Rame dall' ipofosfito + Carbone	17.80	20.68

Come si deduce dalle esperienze N. 19 e 20, con queste varietà di rame già all'oscuro e senza aggiunta di carbone la decomposizione raggiunta è molto forte e si avvicina a quella ottenuta da me col rame, preparato secondo Rosenmund e collaboratori, e carbone.

Ho inoltre preparato anche rame di Picard e all'ipofosfito in presenza di carbone, ma, usando all'incirca le quantità solite di rame e carbone, non ho riscontrato alcun aumento nella decomposizione (esperienze N. 21 e 22). Molto verosimilmente l'attività di queste due varietà di rame è dovuta alla loro maggior dispersione, che non viene aumentata dalla presenza del carbone.

Il laureando sig. Ettore Girardi mi fu di valido aiuto in queste ricerche, che è mia intenzione estendere ad altri processi impiegando sorgenti luminose più intense.

Geologia. — *Osservazioni sulla geologia dell'alta e media valle del Savio.* Nota del prof. PAOLO PRINCIPI, presentata dal Corrisp. GAETANO ROVERETO ⁽¹⁾.

Le arenarie oligoceniche a *Lepidocyclinae*, che costituiscono i rilievi di Moggiona e di Camaldoli, si estendono anche a NE di Badia Prataglia, separate dalla formazione arenacea dell'Eocene medio mediante una serie di scisti argillosi galestrini, i quali da Badia Prataglia si possono seguire fin presso Corezzo e Serra ⁽²⁾.

A Badia Prataglia gli scisti argillosi si presentano contorti ed arricciati con intercalazioni di sottili strati di arenaria; a NO del paese, invece, affiorano le arenarie oligoceniche in strati di spessore poco rilevante e quasi orizzontali con zone scistose, ai quali, procedendo verso il Passo dei Man-

(1) Pervenuta all'Accademia il 20 ottobre 1925.

(2) PRINCIPI P., *Nuove ricerche sul bacino pliocenico del Casentino.* « L'Universo », anno VI, 1925.

drioli, succedono altre arenarie in grossi banchi, immersi a SO e con strati calcarei ricchi di foraminifere. Queste arenarie vengono, poi, a contatto colle rocce marnoso-arenacee del Langhiano ed il limite fra le due formazioni è rappresentato da una linea assai irregolare, che da C. S. Giavolo passa per l'Eremo nuovo, Paretaio, il Nocicchio, il Capanno, Corneto e Poggio il Bastione.

Anche qui, come si osserva più a Sud in relazione agli strati calcarei dell'Eocene superiore⁽¹⁾, avendo gli strati del Miocene una immersione a S. SO, corrispondente a quella delle rocce oligoceniche, le marne arenacee langhiane lungo la linea suddetta appaiono sottostanti all'Oligocene. Questa disposizione deriva dal rovesciamento, che le stesse pieghe oligoceniche hanno subito per effetto del movimento orogenico verificatosi dopo la sedimentazione dei depositi langhiani.

*
* *

Il Langhiano o Burdigaliano è costituito, come nell'alta valle del Tevere, da banchi di marne arenacee grigio-giallastre con Pteropodi, intercalate con altre marne calcaree cerulee a frattura concoide e con sottili strati di arenaria compatta. I calcari marnosi si presentano notevolmente diffusi lungo le pendici meridionali del Poggio Valserra, mentre fin presso Bagno di Romagna predominano le marne arenacee grigie con strati di arenaria compatta, i quali, essendo più resistenti agli agenti atmosferici, risultano emergenti dalle rocce contigue. Le cosiddette « Scalacce » tra il Ponte del Montanino e la Cantoniera sono appunto costituite dall'affioramento delle testate di una serie di strati arenacei suborizzontali compresi entro sedimenti marnoso-scistosi, che facilmente vengono asportati dai fenomeni della denudazione.

Lungo il Fosso del Volanello tra il Poggiaccio e la Vetta della Croce, come pure entro il Fosso di Malagamba fra il Poggio Castellaccio e Poggio Pian delle Riti, le marne grigie arenacee contengono tracce di Pteropodi limonitizzati, alcune delle quali sono riferibili ai generi *Cavolinia* (C. cfr. *bisulcata* Kittl.) e *Vaginella* (V. cfr. *Calandrelli* Mich.).

Oltrepassato il paese di Bagno, riprendono sviluppo i calcari marnosi in strati lievemente inclinati a SO, che si disgregano in minutissime scagliette, ed intramezzati da scisti arenacei di color grigio-cinereo e da marne sabbiose arenacee giallastre, ricche di mica, con superficie ondulate. Queste marne appaiono assai estese nella collinetta di Corzano, dove presentano una immersione a NE, orientamento che si mantiene costante in tutta la serie stratigrafica sino a Valcava. Le marne arenacee di Poggio le Corsicchie e quelle, che affiorano lungo la strada S. Piero in Bagno-Santa Sofia, contengono qua e là residui di Pteropodi indeterminabili; mentre a Rove-

(1) PRINCIPI P., *Nuove osservazioni sulla geologia dell'alta valle del Tevere*. « Rend. R. Acc. dei Lincei », 1924.

reti in Val di Pondo, a M. Calbano e presso il cimitero di Seguno esistono dei banchi di calcare marnoso grigiastro con grandi Lucine, appartenenti in parte alla *Lucina De Stefanii* Rov. ed in parte alla *Lucina Doderleini* Di Stef. (= *L. pomum* Gioli non Des Moul.). A Rovereti⁽¹⁾, inoltre, nello stesso calcare sono stati riscontrati vari esemplari di *Modiola exbrocchii* Sacco, *Chrysodomus Hoernesii* Bell., *Morio* (*Galeodea*) *echinophora* L. sp., ed a M. Calbano alcuni individui di *Modiola exbrocchii* Sacco e di *Aturia Aturi* Bast. La presenza dell'*Aturia Aturi* e delle suddette specie di *Modiola* e di *Chrysodomus* attesta indubbiamente l'età miocenica dei calcari in questione.

Ad Est di S. Paolo, presso le sponde del Savio, delle marne arenacee scistose, giallastre, comprendono lenti o zone irregolari fortemente cementate, le quali passano a vere arenarie e sotto l'azione degli agenti atmosferici rimangono isolate, dando origine a numerosi massi sparsi sul terreno.

A Spinello, S. Andrea ed al Poggio Incisa affiorano dei banchi di arenaria giallastra grossolana, intramezzati da marnosisti cinerei, che dapprima risultano immersi a SO e, dopo una serie di arricciature e contorsioni complicate, presso Saiacco riprendono ad inclinare a NE.

A Civorio, nel Monte dei Faggi, lungo il fosso Lamaccia ed a Sud di Casella si diffondono dei calcari marnosi a frattura scheggiata, leggermente bluastri alla superficie e grigio-scuri se spezzati di recente; non di rado vi si riscontrano intercalati straterelli di marne durissime scheggiate rivestite di un intonaco bruno-scuio, le quali presso Bucchio contengono impronte di *Ostrea langhiana* Trab. o di calcari arenacei grigio-giallastri.

Poco dopo la diga, che sbarra il corso del Savio, gli strati riprendono la loro immersione a SO e sono costituiti in prevalenza da marne arenacee giallastre, accompagnate da scisti grigi marnosi, che sotto l'azione degli agenti atmosferici si disgregano in scagliette minutissime. Anche in questa zona gli strati si mostrano ondulati, arricciati e rotti in varia guisa, ma con immersione generale a SO.

Lungo la linea Bullato-Valbiano-Rocchetta gli strati nuovamente assumono l'immersione a NE e risultano costituiti in prevalenza da arenarie scistose giallastre con intercalazioni di marne cerulee. A Sarsina le arenarie si mostrano compatte, calcarifere, di colore ceruleo e su di esse le acque del torrente Molinello presso il ponte della strada carrozzabile hanno escavato caratteristiche marmitte di erosione.

*
* *

Non dappertutto si verifica la stessa successione litologica nella serie langhiana, e ciò per causa di variazioni laterali di facies, che determinano passaggi gradualissimi, non solo nel senso della verticale, ma anche nel

(1) DI STEFANO G., *Il calcare con grandi Lucine nei dintorni di Centuripe in provincia di Catania*. « Atti Accad. Gioenia di Sc. Nat. in Catania », Serie 4^a, vol. XVI, 1903.

senso orizzontale, tra i calcari marnosi, le marne azzurrognole, le marne arenacee e le arenarie. Le arenarie, tuttavia, per quanto appariscano intercalate a diversi livelli nella serie sopra descritta, assumono il loro massimo sviluppo nella parte più alta della formazione.

Queste rocce, infatti, si presentano estese da Sarsina fin oltre Sorbano ed a NO ed a SE di Mercato Saraceno, costituendo le colline di Maioletto, di Talamello, della Serra, del M. Pincio fino a Perticara e venendo poi ricoperte della formazione gessoso-solfifera. I fossili sono estremamente scarsi, specialmente negli strati inferiori, e consistono in alcuni esemplari di *Lucina* cfr. *Doderleini* Di Stef. provenienti dalle pendici orientali del M. Bandirola e da C. la Costa ad Ovest di Tezzo ed in un frammento di dente di *Carcharodon megalodon* Agass. trovato lungo il fosso di Campiano.

Gli strati superiori di questa formazione arenacea racchiudono talora lenti di arenaria grossolana o addirittura conglomeratiche, collegate o intercalate a banchi marnosi o sabbiosi giallastri incoerenti. I conglomerati, per lo più ridotti a ciottoli sparsi fra le marne e le sabbie, sono diffusi ad Est di Ranchio e di Sorbano e nei dintorni di Perticara e Mercatino; presso Musella le marne sabbiose con *Potamides lignitarum* ed *Ostrea crassissima* contengono esigue lenti di lignite di nessuna importanza pratica.

I ciottoli, improntati, sono generalmente di notevoli dimensioni e costituiti da calcari grigi dell'Eocene, analoghi a quelli del M. Carpegna e più raramente da arenarie grigio-verdastre e da diaspri e ftaniti rosse o rosso-brune. Nelle lenti conglomeratiche del M. Pincio, specialmente presso le C. Poggiolo tra Perticara e Talamello, lo Scarabelli ⁽¹⁾ riscontrò la presenza di piccoli ciottoli di calcari nerastri, che egli riferì a rocce mesozoiche della catena metallifera toscana, ammettendo così una diretta comunicazione tra questa regione e le Marche attraverso un'area più o meno estesa.

Successivamente il Chelussi ⁽²⁾ raccolse nella stessa località ciottoli di serpentina assai alterata, frammenti a spigoli smussati di diaspri e ftaniti rosse ed un ciottolo di gabbro a grossi elementi con plagioclasio completamente saussuritizzato, ritenendo anch'egli per tali elementi un'origine occidentale, cioè dalle formazioni ofiolitiche e diasprine della Toscana od anche da più lontano attraverso le medesime.

Intorno alla provenienza dei ciottoli di calcare nero è difficile formulare una ipotesi veramente attendibile, giacchè calcari neri si riscontrano anche nel Retico dell'Umbria centrale, come ad es. nel M. Malbe presso Perugia ⁽³⁾; invece i ciottoli diasprini e serpentinosi derivano assai proba-

(1) SCARABELLI G., *Descrizione della carta geologica del versante settentrionale dell'Appennino fra il Montone ed il Foglia*. Forlì, 1880.

(2) CHELUSSI I., *Appunti petrografici sopra alcune arenarie dell'Italia centrale*, « Boll. Soc. Geol. ital. », 1908, vol. XXVII.

(3) PRINCIPI P., *Classificazione dei terreni mesozoici dell'Umbria centrale*, « Atti Società Ligustica di Scienze e di lettere », vol. II, 1923.

bilmente dal disfacimento delle formazioni ofiolitiche, che sono diffuse tra l'alta valle del Tevere e quella del Senatello, e forse anche dalle argille scagliose, delle quali rimangono ancora cospicui lembi, spesso in giacitura diapira, nei dintorni di S. Leo, di Talamello e di S. Agata Feltria.

La zona arenacea descritta, succedendo in concordanza ai sedimenti langhiani ed essendo limitata superiormente da marne sabbiose con *Potamides lignitarum*, deve essere riferita al Miocene medio (Elveziano-Tortoniano), e corrisponde alle arenarie dell'Urbinate ⁽¹⁾, della Serra Maggio ⁽²⁾, della regione ad Est della catena del Catria ⁽³⁾ e dell'Alpe della Luna ⁽⁴⁾.

Al Tortoniano appartengono pure gli strati marnoso-conglomeratici di Sogliano e di Monte Gelli, che lo Scarabelli ⁽⁵⁾ pose erroneamente al di sopra della formazione gessoso-solfifera. A Sogliano, località di cui ebbero già ad occuparsi il Manzoni ⁽⁶⁾ ed il Fuchs ⁽⁷⁾, si osservano inferiormente delle argille sabbiose con lenti di lignite picea e caratterizzate dalla presenza del *Potamides lignitarum*, *Cerithium rubiginosum* ed *Ostrea crassissima*. Seguono verso l'alto delle sabbie gialle, anch'esse con *Potamides lignitarum*, delle argille bluastre con *Cardita Jouanneti* e finalmente un conglomerato a ciottoli prevalentemente calcarei con vari individui di *Pectunculus pilosus*.

A Monte Gelli sopra un complesso di argille scagliose e di calcari grigi a fucoidi dell'Eocene medio, corrispondente cronologicamente alla serie del M. Carpegna ⁽⁸⁾, riposano delle sabbie argillose contenenti esiguissimi straterelli di lignite e ricoperte alla lor volta di un'argilla verdastra fetida con *Cardita Jouanneti* e da un banco di sabbie parzialmente cementate con lenti conglomeratiche. Ad Ovest di Monte Gelli il Tortoniano è rappresentato in prevalenza da arenarie intercalate a marne sabbiose contenenti presso Montetiffi, Massamanente e Montebello lenti di argilla e di lignite.

I conglomerati sopra descritti non devono essere confusi con quelli di Pietrafagnana e di Pietrarubbia ⁽⁸⁾, riferibili alla parte più alta del Miocene superiore e derivanti da un deposito di spiaggia lasciato dal mare pontico durante il suo movimento di regressione.

(1) PRINCIPI, *I terreni miocenici della regione urbinata*, « Boll. Soc. Geol. ital. », 1925.

(2) PRINCIPI, *Il Miocene nella regione compresa fra i rilievi mesozoici eugubini e la catena del Catria*, « Rend. R. Accad. Lincei », 1922.

(3) PRINCIPI, *Studio geologico dei terreni ad Est della catena del Catria*, « Boll. Soc. Geol. ital. », 1923.

(4) PRINCIPI, *I terreni terziari dell'alta valle del Tevere*, « Boll. Soc. Geol. ital. », vol. XLIII, 1924.

(5) SCARABELLI, Op. cit.

(6) MANZONI, *Della fauna del lembo miocenico di Sogliano presso al Rubicone*, « Sitzb. d. Acad. d. Wissensch. », Wien, 1896.

(7) FUCHS T., *I membri delle formazioni terziarie nel versante settentrionale dell'Appennino fra Ancona e Bologna*, « Boll. R. Com. Geol. d'Italia », 1875, n. 7-8.

(8) PRINCIPI P., *I terreni terziari dell'alta valle della Marecchia*, « Boll. Soc. Geol. italiana », 1925.

Le arenarie sovrastanti alle serie langhiana rappresentano una formazione corrispondente cronologicamente ai calcari a briozoi ed all'arenarie calcarifere del M. Fumaiolo, di Pennabilli, del Sasso di Simone, del Simoncello, del M. Copiolo, di Talamello etc.; mentre i calcari a briozoi si sarebbero formati lungo littorali tranquilli, le arenarie ed i conglomerati corrisponderebbero a un deposito costituitosi allo sbocco di importanti corsi d'acqua.

*
* *

Anche nell'alta valle del Savio si osservano degli argilloscisti, con facies di argille scagliose, presentare delle giaciture analoghe a quelle riscontrate nell'alta valle del Tevere⁽¹⁾. Infatti presso S. Silvestro sulla sinistra del Savio e tra il Fossatone ed il fosso di Croce Santa sulla destra dello stesso fiume affiorano degli scisti argillosi varicolori con frammenti di calcari verdastri e di diaspri, i quali per un fenomeno di diapirismo si mostrano incuneati entro la formazione marnoso-arenacea langhiana, i cui strati sono in più punti rotti e raddrizzati sino alla verticale.

Queste rocce argillose sono prive di fossili, e quindi è impossibile determinare con precisione la loro età; ma probabilmente appartengono alla zona delle argille scagliose cretacee del M. Carpegna e di S. Agata Feltria, le quali nel M. Fumaiolo vengono a confondersi con i galestri eocenici, anch'essi in giacitura diapira⁽²⁾.

Falde notevoli di argille scagliose devono anche trovarsi intruse a distanze più o meno rilevanti dalla superficie del suolo. A Bagno di Romagna, a pochi metri dalla riva sinistra del Savio, fuoriescono dagli strati marnoso-arenacei del Langhiano alcune polle costituenti le Terme di S. Agnese. Le sorgive hanno una temperatura di circa 43° C., il che dimostra che le acque atmosferiche, infiltratesi nel terreno, risalgono all'esterno lungo linee di frattura dopo avere raggiunto profondità ragguardevoli. Dalle acque, inoltre, si sprigionano vari gas, tra cui acido solfidrico e metano, i quali verosimilmente traggono la loro origine dalle argille scagliose esistenti entro e al di sotto delle rocce mioceniche.

*
* *

Agli strati del Tortoniano fanno seguito presso Rivoschio, Linaro e Ciola, delle marne arenacee scistose con scisti argillosi fogliettati, ricchi talora di diatomee e di altri avvanzi fossiliferi. Nei dintorni di Rivoschio e Linaro a queste marne di color azzurrastro succedono altre marne grigie

(1) PRINCIPI, *Nuove osservazioni sulla geologia dell'alta valle del Tevere*.

(2) PRINCIPI, *I terreni terziari dell'alta valle della Marecchia*.

friabili con banchi di gesso compatto o a struttura lamellare (*seghe*), contenenti esigue ed irregolari zone di calcare solfifero.

A Piaia, Paderno, M. Petra, Sapigno gli scisti argillosi fogliettati alternano colla formazione gessosa: a Paderno il gesso, per lo più a struttura lamellare ed associato a lenti solifere, costituisce dei banchi piuttosto estesi, alternanti con marne grigie gessifere contenenti avanzi di *Lebias crassicauda* ed impronte di vegetali appartenenti alla *Sequoia Coultisae* Heer, *Arun-diniles Goeperti* (Münst), *Quercus etymodrys* Ung., *Carpinus grandis* Ung., *Laurus princeps* Heer, *Cassia phaseolites* Ung. Anche a Sapigno il gesso, in banchi od in lenti diapiriche entro le arenarie marnose della potenza di 50-60 cm., è unito a piccole quantità di solfo e ricoperte da strati di marne bituminose e di arenarie friabili a grossa grana. Nel giacimento di Perticara gli strati gessosi presentano in alcuni punti un caratteristico aspetto serpentiforme, forse in conseguenza di fenomeni di disidratazione e successiva idratazione del solfato di calcio.

Il complesso di queste rocce appartiene evidentemente al Sarmaziano: su di esso ad Est di S. Donato e di Marazzana e a Sud di Perticara si adagiano in perfetta concordanza delle marne cenerognole, seguite da un banco di conglomerato con strati di sabbie giallastre più o meno cementate. Gli elementi del conglomerato sono costituiti in prevalenza di calcari grigi dell'Eocene medio, ai quali si associano anche dei ciottoli da calcare elveziano, di arenarie calcarifere e di diaspri rossi o verdastri.

Questi conglomerati, coi quali si chiude la serie miocenica, stanno a rappresentare il Pontico e corrispondono a quelli di Pietrafagnana e di Pietrarubbia a SO del M. Carpegna.

Altri conglomerati, riferibili allo stesso livello geologico, si riscontrano a NO di Rivoschio tra Ricò e Cusercoli e nei dintorni di Voltre.

*
* *

I terreni del Miocene inferiore e medio (Langhiano-Tortoniano), che, come abbiamo già accennato, appariscono sottostanti alle arenarie oligoceniche per effetto del rovesciamento subito dalle pieghe del Paleogene, costituiscono nella regione studiata due anticlinali principali lievemente inclinate verso NE, le quali sono la prosecuzione di quelle esistenti ad Est e ad Ovest del M. Fumaiolo. La cerniera della prima passa per Castelvecchio, M. Comero, tra M. Frullo e M. Ceroso; mentre la seconda anticlinale alla Rocchetta si biforca in due rami, che si ricongiungono nuovamente nel Monte della Faggia a Nord del Savio.

Queste due pieghe comprendono una sinclinale, che rappresenta alla sua volta il prolungamento dell'altra del M. Fumaiolo ed il cui fondo nel territorio in esame è costituito interamente dalla formazione marnoso-arenacea langhiana.

Ad Est del Monte di Rullato, di Valbiano, di Montino e di M. Corvo succede un'altra ampia sinclinale, diretta anch'essa da NO a SE, il cui fianco occidentale è dapprima formato da marne ed arenarie del Miocene medio, ricoperte alla lor volta lungo la linea S. Paolo - Rivoschio - Linaro - Ciola dalla serie gessoso-solfifera del Sarmaziano e dalle marne sabbiose del Pontico. Il margine orientale di quest'ultima piega costituisce, invece, i rilievi che da Polenta si estendono a Formignano, Airola, M. Farneto e Sogliano.

La sinclinale risulta divisa in due parti da un'ondulazione secondaria, per effetto della quale la formazione gessosa dà origine a numerosi e piccoli affioramenti lungo il tratto compreso tra Falcino e Monte Gelli; essa va, poi, a terminare contro i rilievi eocenici del gruppo del M. Carpegna, che durante il Miocene superiore separavano il mare sarmaziano e pontico di S. Agata Feltria e di Mercato Saraceno, da quello che si estendeva più a Sud di Macerata Feltria fin verso Urbania ed Urbino ⁽¹⁾.

Biologia. — *Il valore degli Eterocromosomi.* Nota preliminare della dott. BEATRICE TORELLI, presentata dal Corrisp. RAFFAELE.

In questa nota espongo il primo risultato di uno studio del monosoma (x-cromosoma di alcuni autori), nelle spermatogonie e spermatociti, studio che mi auguro di completare in seguito, per poter giungere a risultati generali. Sin da ora mi è grato porgere i più vivi ringraziamenti al Prof. Ermanno Giglio-Tos, direttore dell'Istituto di biologia marina in San Bartolomeo di Cagliari, che ha richiamato la mia attenzione sull'argomento e che largamente mi ha incoraggiato mentre eseguivo le ricerche.

Le osservazioni sono state fatte su due ortotteri: *Pamphagus marmoratus* e *Caloptenus italicus*. Del primo ho potuto avere maschi adulti, del secondo una sola larva. Per ottenere preparati dove il monosoma fosse messo in evidenza, le sezioni, fatte dai testicoli, sono state colorate o con violetto di genziana o con fucsina fenicata, e poi decolorate. Si riesce nell'intento se si prolunga l'azione di una soluzione assai diluita del colore, e successivamente si fanno dei lenti passaggi negli alcool. Anche la decolorazione, che dà l'olio di garofano, può essere utile. In questo modo ho ottenuto migliori risultati che non seguendo il metodo Biondi-Heidenhain, che dà una colorazione troppo intensa alla massa nucleare e al citoplasma. Si osserverà che il monosoma resiste alla decolorazione assai più che non i granuli cromatici e, in tal modo, il contrasto tra le due formazioni è evidente. Se questa proprietà rispetto alle sostanze coloranti sia un particolare carattere

(1) PRINCIPI P., *I terreni terziari dell'alta valle della Marecchia.*

chimico del monosoma, o sia dovuto allo stato di condensazione in cui si trova, sarà oggetto di una ulteriore e più precisa indagine.

Certo dà valore a questo dubbio il fatto osservato anche da altri studiosi, quali per esempio il Granata⁽¹⁾, che quando ancora il monosoma non si è costituito, cioè si trova in uno stato di diffusione nella cellula, si riconoscono alcune masse, che per essere più intensamente colorate delle altre, si crede sieno quelle che costituiranno l'x-cromosoma.

Nei testicoli di *Caloptenus* osservati, non si sono trovati che spermatogonie assai giovani. Qui il monosoma comincia a rendersi visibile, quando sono già iniziati i movimenti della cariocinesi, ma prima che si siano costituiti i cromosomi. Se le cellule sono ancora in riposo, si vedono solo delle masse intensamente colorate che, come ho già detto, sono forse quelle che formeranno il monosoma.

È facile vedere tale formazione risultare di tanti granuli e solo più tardi assumere l'aspetto di una massa compatta e ben definita. È da credere perciò che precedentemente l'x-cromosoma si trovi in una fase di disaggregazione, per cui non è possibile riconoscerlo. Nelle spermatogonie di *Caloptenus* può assumere forma varia, raramente sferica, più spesso appiattita, assai aderente alla membrana nucleare. Posizione questa frequentemente riscontrata in altri casi.

Di *Pamphagus* ho avuto sempre individui maturi, e nei testicoli ho trovato spermatociti, spermidi e spermatozoi. Il monosoma di queste cellule si colora sempre intensamente, è di forma sferica e appare a volte granuloso, a volte come una massa ben compatta. Tutto ciò fa supporre che l'x-elemento si formi nelle spermatogonie prime, dalla riunione di tanti granuli i quali, pur restando più o meno uniti tra di loro, subiscano negli stati di riposo tra le successive mitosi, uno sgretolamento. E non mi sembra possa escludersi, come ha fatto Brunelli⁽²⁾, che il monosoma vada soggetto in alcuni casi ad una completa disaggregazione, pari a quella che miss Stevens⁽³⁾ ammette in *Stenopelmatus* e forse anche a quella che Moore e Robinson⁽⁴⁾ descrivono in *Periplaneta*. Del resto anche Brunelli, nelle figure della spermatogenesi di *Gryllus*⁽⁵⁾ e di *Tryxalis*⁽⁶⁾, mostra che il monosoma nel ricostituirsi del nucleo dopo le divisioni spermatogoniali, appare

(1) GRANATA L., *Le cinesi spermatogenetiche, di Pamphagus marmoratus* Burm. « Arch. f. Zell. 4° B., 2° Heft. », Leipzig, 1910.

(2) BRUNELLI G., *Le spermatogenesi nel Gryllus desertus* Pall. « Mem. R. Acc. Lincei », serie 5ª, vol. VII, fasc. II. Roma, 1909.

(3) STEVENS B. M., *Studies in spermatogenesis*. « Carnegie Inst. ». Washington, September 1905.

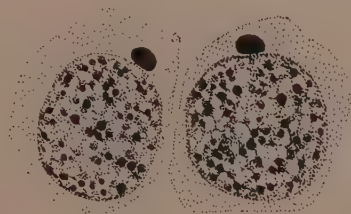
(4) MOORE and ROBINSON, *On the behaviour of the nucleolus in the spermatogenesis of Periplaneta americana*. « Quart. Journ. Micr. Sc. », vol. XLVIII. London, 1905.

(5) BRUNELLI G., *Le spermatogenesi della Tryxalis* (Prime divisioni spermatogoniali). « Mem. Soc. Ital. di Sc. », serie 3ª, tomo 16°.

sgretolato. Infine è molto probabile, secondo quanto suggerisce Wilson ⁽¹⁾ che la condensazione del monosoma non avvenga completamente in tutte le specie, e i singoli componenti possono unirsi a formare un sol corpo, ma possono anche apparire come parti isolate che si accostano nelle mitosi di maturazione per formare un elemento complesso.

In questa maniera verrebbe a perdere molto valore la distinzione tra elemento semplice ed elemento complesso, su cui lo stesso Wilson si dilunga tanto a parlare.

Nell'osservare gli spermatociti, nelle primissime fasi della cariocinesi, quando ancora la membrana nucleare non è scomparsa, mi è accaduto di vedere assai spesso il monosoma esterno al nucleo, ma sempre vicino ad esso. Per rilevare questa posizione è necessario che il monosoma capiti lateralmente e non sopra al nucleo, perchè nel secondo caso apparirà come interno al nucleo stesso (fig. 1). Negli spermidi è più difficile rilevare questa posizione e ciò si spiega del resto, quando si pensi che intanto solo il 50 per cento delle cellule contengono il monosoma, e che questi elementi sono assai più piccoli degli spermatociti.



Se nelle spermatogonie di *Caloptenus* non è possibile vedere il monosoma esterno al nucleo, non deve farci meraviglia. Ciò è dovuto in parte alla sua forma, ma ancora più alla grande aderenza che contrae con la membrana nucleare.

Precedentemente altri studiosi hanno rilevato una posizione extranucleare del monosoma, almeno durante qualche fase della cariocinesi. Le descrizioni che Moore e Robinson ⁽²⁾ hanno fatto della spermatogenesi di *Periplaneta americana*, ci lasciano un po' perplessi se ritenere il « nucleolo » da loro trovato, omologo al cromosoma accessorio di Mac Clung; tuttavia qualche cosa di analogo è stato descritto anche da Miss Stevens in *Stenopelmatus* e *Blattella* ⁽³⁾.

Il « nucleolo » di Moore e Robinson, alla fine della prima divisione di maturazione si dissolverebbe nel citoplasma, dove si distingue durante tutta

(1) WILSON, *The cell*. 3 ed., The Macmillan Comp., New-York, 1905.

(2) Vedi nota 4, p. 446.

(3) Vedi nota 3, p. 446.

la fase meiotica. Nelle spermatociti seconde, non si riconosce nessuna formazione che possa paragonarsi al « nucleolo », e negli spermidi se ne forma un altro che ha però origine diversa dal precedente, essendo formato a spese della cromatina, dopo la seconda divisione di maturazione.

Miss Stevens, loc. cit., nelle spermatociti di *Stenopelmatus* ha visto un cospicuo elemento che si colora intensamente con tutti i colori cromatici, aderente strettamente alla membrana nucleare. Dice poi l'A. che dopo la prima mitosi di maturazione: « The element-x is conspicuous in one-half of the cells (fig. 72, 73), it may be included in the nucleus as in figure 72, or it may be partly or wholly outside, as in figure 74, 75, 76. In the latter case, but not in the former, it is surrounded by its own membrane ».

Nel caso di *Blattella* lo stesso A. dice: « Figure 149 is an exceptional case, where one chromatin element (possibly x) has evidently divided late and been left out in the cytoplasm, a smaller chromatin granule is also present in the cytoplasm, of each spermatid ».

Ma dopo soggiunge che, non essendo molto costante il fenomeno, non si può senz'altro accettare l'ipotesi di Moore e Robinson, di una disintegrazione del monosoma nel citoplasma.

Anche Brunelli ammette che, almeno in qualche momento l'x-cromosoma appaia indipendente dal nucleo; infatti egli scrive a proposito del *Gryllus* che « nella prima divisione, il monosoma si mostra indipendente dalla figura cariocinetica », e più tardi: « Intercinesi . . . il monosoma nella ricostituzione del nucleo non viene a far parte di esso, ma comportandosi come un cariomerite, si elabora una vescicola a parte, totalmente indipendente dal nucleo ».

Fenomeni analoghi ripete l'A. per *Tryxalis*⁽¹⁾.

Le figure tanto di Stevens che di Brunelli a questo riguardo sono di una convincente evidenza.

Il concetto che noi dovremmo formarci sul monosoma sarebbe quello di un corpo che in alcuni momenti forma parte integrante del nucleo, altre volte, invece, mostra avere una certa indipendenza, il che è un po' strano. Risulta invece dalle presenti osservazioni che il monosoma è una formazione assolutamente extranucleare, avendolo potuto riconoscere fuori del nucleo nelle spermatociti di *Pamphagus*, quando le cellule sono in riposo.

Concludiamo quindi che il monosoma ha caratteri tutti particolari.

Non è oramai da mettersi in dubbio che esso espliciti durante la cariocinesi un'attività diversa da quella degli altri cromosomi, si voglia o no accettare l'opinione di Mohr⁽²⁾, che la differenza è dovuta al solo fatto di essere il monosoma un elemento impari.

(1) BRUNELLI G., *La spermatogenesi della Tryxalis (Divisioni maturative)*. « Mem. R. Acc. Lincei », serie 5^a, vol. VIII, fasc. 16^o. Roma, 1911.

(2) MOHR O. L., *Sind die Heterochromosomen wahre Chromosomen?* « Arch. f. Zell. », 14^o B., 2^o Heft, 1917.

È un corpo esterno al nucleo.

Possiamo dunque dire che il monosoma sia una formazione extranucleare che accompagna i cromosomi nelle figure cariocinetiche.

Anche senza prender parte alla discussione sull'ufficio di determinante del sesso del monosoma, discussione del resto che dalle presenti conclusioni non viene per niente modificata, si può ancora dare a tale formazione il valore di un cromosoma?

A me non sembra che sia possibile.

Fisiologia. — *Dell'influenza di soluzioni saline sulla resistenza al digiuno delle giovani anguille*⁽¹⁾. Nota di UMBERTO D'ANCONA presentata dal Socio GIULIO FANO.

Nelle mie ricerche sulla biologia degli storioni⁽²⁾ esaminando gli scudi ossei onde servirmene per la determinazione dell'età, avevo notato che l'alternanza sugli stessi di strati chiari e oscuri, dovuta al susseguirsi delle stagioni, era data da zone più o meno ricche di sostanza inorganica. Mediante prove di decalcificazione e di calcinazione avevo osservato che, mentre gli strati che si formano nei mesi estivi sono ricchi di sali di calcio, quelli invernali ne sono più poveri. Donde le linee che si osservano sugli scudi e che mi erano servite alla determinazione dell'età, sono dovute a una più o meno abbondante deposizione di sostanza inorganica su una matrice organica relativamente omogenea.

Osservazioni press'a poco simili erano già state fatte da Reibisch (1899), da Heincke (1902-4), da Haempel (1910) su otoliti e ossa di alcuni Teleostei. Ritengo poi che una causa uguale abbiano anche le linee annuali che si osservano sulle squame di molti Teleostei. Così, per esempio, sulle squame dell'anguilla si notano alla superficie esterna degli *scleriti* calcarei che mancano in corrispondenza alla formazione invernale. Nei Gadidi si hanno scleriti più piccoli nella formazione invernale, più grandi in quella estiva.

Tale fenomeno può perciò essere considerato generale e si può quindi affermare che *nei pesci durante l'estate si ha una più abbondante deposizione di sostanza inorganica (di sali di calcio evidentemente) nelle parti scheletriche che non durante l'inverno.*

Fui subito indotto a mettere tale fenomeno in rapporto colla diversa nutrizione dei pesci durante i mesi caldi e i mesi freddi, ed infatti già nella mia Memoria sugli storioni accennai a tale ipotesi. Fui poi in essa mag-

(1) Dall'Istituto di Anatomia e Fisiologia comparata della R. Università di Roma; presentata nella seduta del 1º novembre 1925.

(2) D'ANCONA U., *Contributo alla biologia degli storioni nelle acque italiane*. Ministero Economia Nazionale. Ispettorato Pesca, 1924.

giormente confermato dai risultati di numerose esperienze trovati nella moderna letteratura sul metabolismo del calcio.

Troppo ardua impresa sarebbe il voler riassumere la letteratura fisiologica e patologica sul metabolismo del calcio, che specialmente in questi ultimi tempi s'è enormemente arricchita. Io qui mi limiterò ad accennare ai risultati di alcune fra le più recenti ricerche che maggiormente mi sono servite per interpretare i fenomeni di cui mi sono occupato. In altra occasione mi riservo di dare un riassunto bibliografico più completo ⁽¹⁾.

In primo luogo è risaputo da tempo che nei casi di nutrizione deficiente si manifestano alterazioni nello scheletro. Così negli anni della guerra e in quelli immediatamente successivi in Austria e in Germania sono state notate in gran quantità alterazioni scheletriche derivanti dalla deficiente nutrizione (rachitide, osteomalacia, osteoporosi, artrite deformante) (Hirsch ⁽²⁾, Beninde ⁽³⁾, Dalyell e Chick ⁽⁴⁾).

Ciò si spiega facilmente quando si tiene presente un fatto noto da lungo tempo, che cioè nel digiuno si ha uno stato di acidosi (Castellino ⁽⁵⁾, Brugsch ⁽⁶⁾, Benedict ⁽⁷⁾, ecc.).

D'altronde si sa pure che l'acidosi produce un aumento di eliminazione del calcio per via urinaria, calcio che viene tolto dai tessuti. Così Steenbock, Nelson e Hart ⁽⁸⁾, Forbes ⁽⁹⁾, Bogert e Kirkpatrick ⁽¹⁰⁾ rilevano che i cibi acidotici producono una maggior eliminazione di calcio attraverso le urine che i cibi alcalotici. Zucker ⁽¹¹⁾ somministrando a degli uomini dell'acido (HCl) trova aumento del calcio nell'urina. Similmente Floris ⁽¹²⁾ somministrando acido lattico. Inoltre secondo Underhill, Honeji e Bogert ⁽¹³⁾ il lattato di calcio preso per bocca può rendere positivo il bilancio del calcio nei casi in cui è negativo.

Watt ⁽¹⁴⁾ crede che ci sia una sorta di equilibrio del calcio tra il sangue, gli osteoblasti, e la matrice dell'osso. Se il sangue è ricco di calcio le cellule possono prenderlo e passarlo alla matrice, viceversa se il sangue è

(1) Per un'abbondante letteratura sul metabolismo del calcio nei diversi casi patologici, si veda il lavoro del FLORIS, « Arch. Farmacol. Sper. », vol. XXXV, 1923.

(2) « Münch. med. Wochenschr. », Jg. 67, 1920.

(3) « Veröff. a. d. Geb. d. Medicinalverw. », Bd. X, 1920.

(4) « Lancet. », vol. 201, 1921.

(5) « Riv. Igiene e Sanità pubbl. », vol. IV, 1893.

(6) « Zeitschr. exp. Pathol. u. Therapie », 1906.

(7) « Carnegie Inst. », Washington, 1907.

(8) « Journ. Biol. Chem. », vol. XIX, 1914.

(9) « Ohio Agric. Exp. Stat. Bull. », 207, 1919.

(10) « Journ. Biol. Chem. », vol. LIV, 1922.

(11) « Proc. Soc. Exp. Biol. a. Med. », vol. XVIII, 1921.

(12) Lavoro citato.

(13) « Journ. Exp. Med. », vol. XXXII, 1920.

(14) « Biol. Bull. », vol. XLIV, 1923.

povero di calcio le cellule lo prendono dalla matrice e lo cedono a quello. Wells trova che il calcio è asportato dalle ossa quando c'è una grande richiesta di esso nel corpo, per esempio, nella gravidanza. Bigwood ⁽¹⁾ rileva poi uno stretto parallelismo nel plasma sanguigno tra la concentrazione degli idrogenioni e il tenore in calcio ionizzato; egli ammette perciò una stretta dipendenza tra la concentrazione degli ioni calcici e probabilmente l'equilibrio di tutti gli ioni metallici da una parte e l'equilibrio acido-base dall'altra. Freudenberg e György ⁽²⁾ d'altra parte trovano che gli anioni in genere esercitano un'azione inibente sulla fissazione del calcio sulla cartilagine. White P. Corson ⁽³⁾ attribuisce ad acidosi con conseguente perdita di Ca la causa dell'osteomalacia. Pure secondo Park, Shipley, McCollum e Simmonds ⁽⁴⁾, quando l'organismo non può coprire mediante il nutrimento il contenuto in calcio del sangue, lo prende dallo scheletro. Simili sono le conclusioni di Blum, Delaville e van Caulaert ⁽⁵⁾; l'ossificazione e la conservazione della struttura delle ossa sono condizionate da un equilibrio acido-base che normalmente ha una predominanza basica. Tutti gli spostamenti di questo equilibrio verso il lato acido, vale a dire tutti gli stati di acidosi causano delle alterazioni dello scheletro. Se si tratta di ossa in via di formazione si ha un'arresto dell'ossificazione, se si tratta di ossa già formate c'è decalcificazione (osteomalacia, diabete grave con acidosi, gravidanza).

Da tutte queste premesse viene logico il concludere che *l'acidosi prodotta dalla scarsa alimentazione viene neutralizzata dagli ioni metallici tolti dai tessuti che più ne sono ricchi, in primo luogo dallo scheletro* ⁽⁶⁾. Perciò le zone chiare e oscure che si notano sulle squame e sulle parti scheletriche dei pesci dipendono da periodi di più intensa o più scarsa alimentazione con conseguenti stati di acidosi ⁽⁷⁾.

Da quanto più su ho esposto risulta pure che somministrando del calcio per bocca si può compensare il bilancio negativo dell'organismo (Underhill, ecc. ⁽⁸⁾). Da altre ricerche risulta però anche che tra il metabolismo dei vari metalli alcalini e alcalino-terrosi c'è una sorta di equilibrio. Qui senza occuparmi di tutta la vasta letteratura sull'argomento a cominciare dalle ricerche di Loeb sul *Fundulus*, mi limiterò a ricordare alcuni reperti che maggiormente interessano il mio argomento.

(1) « C. R. Soc. Biol. », t. LXXXIX, 1923.

(2) « Biochem. Zeitschr. », Bd. 129, 1922.

(3) « Arch. Int. Med. », vol. XXX, 1922.

(4) « Journ. Biol. Chem. », vol. L, 1922.

(5) « C. R. Soc. Biol. », t. XCII, 1925.

(6) Per il meccanismo della normale compensazione dell'acidosi del sangue si veda la rivista del QUAGLIARIELLO, « Arch. Sc. Biol. », vol. VII, 1925.

(7) Anche durante il periodo riproduttivo si notano sulle squame e sulle ossa dei pesci dei cerchi. D'altronde s'è visto che durante la gravidanza si ha uno stato di acidosi.

(8) Già BUNGE (v. RICHET, *Dict. de Physiol.*, t. IX, 1913), aveva supposto che i sali alcalini neutralizzassero gli acidi provenienti dalla scomposizione delle sostanze proteiche.

Così Mendel e Benedict⁽¹⁾ e Bogert e McKittrick⁽²⁾ trovano una interrelazione tra il metabolismo del calcio e quello del magnesio. Eppinger e Ullmann⁽³⁾ e Shohl e Sato⁽⁴⁾ rilevano un rapporto tra il metabolismo del Ca e del Mg e quello del Na; somministrando bicarbonato di sodio trovano un aumento di eliminazione del Ca e del Mg. Spiro⁽⁵⁾ poi conclude che l'introduzione di un ione nell'economia dell'organismo può influenzare gli altri anche senza che avvenga una reazione chimica, perciò non si hanno soltanto *mineralizzazioni* e *demineralizzazioni*, ma anche *transmineralizzazioni*.

Partendo da tutte queste constatazioni ho pensato, allo scopo di ricavarne delle conclusioni generali sui rapporti del digiuno colla biologia dei pesci, di fare degli allevamenti di cieche d'anguilla tenendole a digiuno in acqua priva di sali e in varie soluzioni saline.

In un *primo esperimento* iniziato il 2 marzo 1923 ho messo in recipienti di 1 litro di capacità, dei gruppi di 10 cieche (lunghe da 62 a 74 mm.), appena pescate alla montata a Maccarese (Roma). In un recipiente ho messo acqua proveniente dalla condotta dell'Acqua Marcia⁽⁶⁾ senza aggiunta di sali, in altri ugualmente dell'Acqua Marcia a cui avevo aggiunto rispettivamente l'1 ‰ di Na_2CO_3 , CaCl_2 , NaCl . La temperatura dell'ambiente, essendosi l'esperimento prolungato fino al 3 luglio, andò aumentando da 12° a 24°⁽⁷⁾. Nell'allevamento in Na_2CO_3 le cieche morirono tra il primo e il secondo giorno, evidentemente intossicate; in quello in CaCl_2 si ebbe una forte mortalità da principio, ma alcune cieche adattatesi all'ambiente resistettero abbastanza a lungo. Più evidenti furono i risultati per i due allevamenti in acqua sola e in acqua con cloruro di sodio. Le cieche di quest'ultimo dimostrarono una evidente maggiore resistenza all'inanizione in confronto a quelle del primo.

Un *secondo esperimento* fu iniziato il 21 marzo 1923 nelle stesse condizioni del primo. Le cieche, sempre a gruppi di 10, furono messe in acqua senza sali, in acqua con Na_2CO_3 0.5 ‰ e NaCl 5 ‰. Le cieche allevate in Na_2CO_3 ebbero una forte mortalità i primi giorni, ma poi le prime si adattarono; quelle invece allevate in NaCl mostrarono una evidente maggiore resistenza al digiuno in confronto a quelle allevate in acqua sola.

Disgraziatamente in questi due primi esperimenti non furono fatte misure ponderali con sufficiente rigore, in modo che preferisco tralasciare i dati relativi.

(1) « Am. Journ. Physiol. », vol. XXV, 1909.

(2) « Journ. Biol. Chem. », vol. LIV, 1922.

(3) « Arch. inn. Med. », Wien, Bd. I, 1920.

(4) « Journ. Biol. Chem. », vol. LVIII, 1923.

(5) « Monatschr. f. Kinderheilk, Bd. XXV, 1923.

(6) L'Acqua Marcia contiene per litro soltanto 0.11 gr. di CaO e 0.286 gr. di composti inorganici fissi complessivamente (MAURO, NASINI, PICCINI, *Analisi chimica dell'acqua potabile della città di Roma*, 1885 e ZANNELLI, « Annali d'Igiene », anno XXXIII, 1923).

(7) L'acqua e le soluzioni saline venivano cambiate ogni giorno.

Onde ricontrollare i risultati dei due esperimenti suesposti e onde completarli coll'osservazione della perdita ponderale, nell'inverno del 1924 ho iniziato un'altra serie di esperimenti.

Un *terzo esperimento* fu iniziato il 3 gennaio 1924 sempre con cieche di Maccarese. La temperatura si mantenne tra i 9° e i 14½° C. Anche qui furono fatti allevamenti di gruppi di 10 cieche in acqua senza aggiunta di sali e in acqua con aggiunta di NaCl 1‰, di KJ 1‰, di CaCl₂ 1‰, di BaCl₂ 1‰ e di Na₂CO₃ 1‰⁽¹⁾. Una parte delle cieche morirono i primi giorni, le altre furono tenute in allevamento fino al 5-7 febbraio; allora esse furono pesate vive dopo essere state asciugate con carta bibula, quindi seccate e incenerite. Dò in forma tabellare i risultati di questo esperimento:

Allevamento	N. delle cieche alla fine	Lunghezza media mm.	Peso medio totale gr.	Peso medio normale gr.	Decremento	Peso medio secco gr.	Peso medio ceneri gr.
Acqua sola .	5	64	0.158	0.225	29.7 %	0.030	0.0026
NaCl 1‰ .	6	66.1	0.199	0.248	19.7 %	0.037	0.0046
KJ 1‰ .	7	65	0.180	0.236	23.7 %	0.037	0.0033
CaCl ₂ 1‰ .	4	66.2	0.211	0.249	15.2 %	0.049	0.0040
BaCl ₂ 1‰ .	6	65.6	0.206	0.243	15.2 %	0.041	0.0043
Na ₂ CO ₃ 1‰ .	4	67.7	0.218	0.266	18.0 %	0.047	0.0057

Il 14 marzo 1924 fu iniziato un *quarto esperimento*: usando concentrazioni saline più forti e diverse temperature. Essendosi poi nei precedenti esperimenti notata una forte mortalità di cieche nei primi giorni, gli esemplari da mettersi in coltura furono dapprima per alcuni giorni allevati in acqua senza sali onde adattarli alle condizioni di laboratorio e soltanto dopo furono messi in esperimento, aumentando la soluzione salina di 1‰ al giorno fino ad arrivare al 5‰ desiderato. Inoltre nel precedente esperimento (terzo) le cieche erano state pesate una ad una, cosa che per il peso delle ceneri, avendo io a mia disposizione soltanto una bilancia che indicava il milligrammo (mentre ne sarebbe stata necessaria una indicante il decimilligrammo), dava origine a una non trascurabile causa di errore. Onde ridurla ritenni necessario pesare unitamente tutte le cieche di ciascun allevamento.

(1) In questo terzo e nel quarto esperimento l'acqua e le soluzioni saline venivano sostituite ogni due giorni. Tutte le altre condizioni dell'esperimento erano uguali a quelle degli esperimenti precedenti.

In questo quarto esperimento feci tre allevamenti (acqua senza sali, NaCl 5 ‰, CaCl₂ 5 ‰) a temperatura 8½–17½°, due (acqua senza sali e NaCl 5 ‰) a temperatura 8½–15½°, altri due poi (acqua senza sali e NaCl 5 ‰) in termostato a temperatura costante di circa 27° C.

Tutte le cieche di questi allevamenti furono tenute in vita fino al 26 aprile e allora furono trattate come quelle del terzo esperimento. Ecco i risultati:

Tempe- ratura	Allevamento	N. delle cieche	Lun- ghezza media mm.	Peso medio totale gr.	Peso medio normale gr.	Decre- mento	Peso medio secco gr.	Peso medio ceneri gr.
8½–17½°	Acqua sola	10	62.3	0.115	0.208	44.7 ‰	0.025	0.0036
	NaCl 5 ‰	8	62.5	0.118	0.210	43.8 ‰	0.023	0.0032
	CaCl ₂ 5 ‰	10	63.5	0.126	0.220	42.7 ‰	0.027	0.0038
8½–15½°	Acqua sola	10	60.7	0.105	0.193	45.3 ‰	0.023	0.0036
	NaCl 5 ‰	10	63.9	0.125	0.224	44.1 ‰	0.026	0.0041
27°	Acqua sola	3	60.3	0.073	0.189	61.3 ‰	0.014	0.0023
	NaCl 5 ‰	9	61.8	0.091	0.203	55.1 ‰	0.019	0.0035

Riassumendo i dati di questi esperimenti si può dunque dire che nelle soluzioni saline all'1 ‰ le cieche hanno resistito al digiuno più a lungo e hanno perduto meno sia in peso totale che in peso secco e in peso delle ceneri, che non in acqua senza aggiunta di sali. In secondo luogo le cieche messe in soluzioni saline al 5 ‰ a temperatura bassa, non hanno presentato un comportamento differente in confronto a quelle tenute in acqua sola, invece hanno perduto meno in peso totale⁽¹⁾, in peso secco e in peso delle ceneri se allevate a temperatura più elevata. Per cui si può concludere che, *almeno in determinate condizioni di concentrazione e di temperatura, le giovani anguille resistono meglio al digiuno in date soluzioni saline (metalli alcalini e alcalino terrosi) che non in acqua dolce e che in quelle subiscono un minor decremento in peso totale, in peso secco e in quantità complessiva di sostanza inorganica* ⁽²⁾.

(1) Naturalmente le perdite di peso sono troppo forti per essere ascritte a un semplice fenomeno osmotico, come rilevò il GUEYLARD nel *Gasterosteus* («C. R. Soc. Biol.», t. LXXXVII, 1922).

(2) PUGLIESE («Atti Accad. Fisiocr.», Siena, ser. IV, vol. VI, 1894 e «Arch. It. Biol.», t. XXVI, 1897) osserva pure che il cloruro di sodio rende i cani più resistenti al digiuno e che esso diminuisce la perdita di peso, però non dà una interpretazione al fenomeno.

Mettendo in relazione i risultati di queste esperienze colle suaccennate osservazioni sulle ossa e sulle squame dei pesci e colle ricordate ricerche di altri autori, mi pare che si possano inquadrare tutti questi fenomeni in un quadro unico, ammettendo cioè *che lo stato di acidosi prodotto dal digiuno causi una decalcificazione delle parti scheletriche* ⁽¹⁾, *decalcificazione che può essere evitata neutralizzando l'acidosi con degli ioni metallici introdotti nell'organismo* ⁽²⁾.

Ulteriori esperienze che inizierò quest'inverno serviranno a maggiormente precisare le condizioni in cui si svolgono i fenomeni suaccennati.

Fisiologia. — *Studi sulla blastocinesi degli insetti.* Nota di REMO GRANDORI, presentata dal Corrisp. RAFFAELE ⁽³⁾.

Riprendendo gli studi, da lungo tempo interrotti, sullo sviluppo embrionale degli insetti, mi sono proposto di estendere le ricerche a numerose specie di diversi ordini e famiglie, onde illustrare i capitoli meno conosciuti dell'embriologia di questi organismi. Ed ho cominciato a studiare quel fenomeno tuttora tanto discusso e così poco spiegato che è la blastocinesi; cioè quel complesso di movimenti che, ad un determinato momento dello sviluppo embrionale, conduce l'embrione a giacere in una posizione affatto diversa da quella in cui erasi formata la stria germinale primitiva.

Le mie ricerche sono appena iniziate; tuttavia l'importanza e la chiarezza di alcuni risultati ottenuti intorno alla blastocinesi della *Pieris brassicae* m'inducono a darne qui una prima comunicazione in forma preliminare.

L'uovo di questa farfalla presenta notevoli difficoltà di studio: anzitutto le sue dimensioni (mm. 1 circa di lunghezza e mm. 0.3-0.4 di larghezza) eppoi l'assoluta impossibilità di distinguere il lato dorsale da quello ventrale, rendono difficilissima l'orientazione dell'uovo per poter condurre sezioni nella direzione voluta; e d'altra parte, data l'opacità completa del vitello,

(1) LIPSCHÜTZ (« Zeitschr. allg. Physiol. », Bd. XII, 1910), MORGULIS (« Archiv Entw. », Bd. XXXII, 1911) e RUSS e WEINLAND (« Zeitschr. Biol. », Bd. LIX, 1912) trovano aumento delle ceneri durante il digiuno. Ciò è forse da riferirsi all'alcalinità dell'acqua in cui gli animali (salamandra, anguilline) furono allevati.

(2) Come ho già accennato nel mio lavoro sulla biologia degli storioni, nella valutazione di questi fenomeni non si deve dimenticare che anche tra secrezioni interne e assimilazione del calcio (BLENCKE, « Veröff. a. d. Geb. d. Medicinalverw. », Bd. XI, 1920; BAUER, « Wien. Klin. Wochenschr. », Jg. 34, 1921) e tra questa e l'avitaminosi (HART, STEENBOCK e HOPPERT, « Journ. Biol. Chem. », vol. XLVIII, 1921; BOGGERT e TRAIL, « Journ. Biol. Chem. », vol. LIV, 1922) sono state notate correlazioni, come pure che la temperatura può anche direttamente influire sull'assimilazione del Ca (FREUDENBERG e GYÖRGY, « Biochem. Zeitschr. », Bd. 129, 1922).

(3) Presentata nella seduta del 1° novembre 1925.

non è possibile condurre lo studio dell'embrione con altro metodo che con quello delle sezioni.

Tali difficoltà sono però compensate dalla grande quantità di materiale che è facilissimo procurarsi e dalla sottigliezza del corion, che è perfettamente sezionabile; cosicchè potei, fra le molte centinaia di uova sezionate in serie, ritrovare tutti gli stadi più dimostrativi e chiarire, a grandi linee, tutto il processo della blastocinesi.

Lo sviluppo embrionale in questa specie è molto rapido, e si compie, in agosto, in 5 giorni circa; la blastocinesi si verifica già alla 3^a giornata dopo la deposizione. Le prime fasi della segmentazione, la migrazione superficiale dei blastomeri, la formazione del blastoderma e della stria germinale coi suoi due foglietti, si svolgono con modalità simili a quelle già note per molti insetti ectoptichici; tali fenomeni conducono alla formazione di una stria germinale che presenta 18 metameri primitivi, di cui i primi 4 appartengono alla testa, i 3 successivi al torace e gli altri 11 all'addome. In seguito i 4 segmenti cefalici si fondono in 1 solo, i 3 toracici restano inalterati, e gli 11 addominali divengono 10 per fusione degli ultimi due.

La stria germinale dopo la formazione del mesoderma si presenta, su sezioni sagittali, a mo' di lettera C rovesciata (se si pone il lato ventrale dell'uovo a destra dell'osservatore, come nelle unite figure); le due labbra della lettera C sono prolungate fin quasi a toccarsi, cosicchè la stria percorre quasi tutta la periferia dell'uovo e descrive quasi una lettera O. In altri lepidotteri la stria è molto più corta e non occupa che circa la metà della periferia dell'uovo e talora anche meno (p. es. nel *Bombyx mori*).

Non appena si pronunciano le due invaginazioni ectodermiche dello stomodeo e del proctodeo, la stria germinale subisce un raccorciamento che aumenta quanto più le due invaginazioni si approfondano (fig. 1); questi due fenomeni vanno di pari passo con l'individualizzazione del sistema nervoso; alla fine della 2^a giornata dopo la deposizione i tre processi sono compiuti, e riscontriamo: i fondi ciechi dello stomodeo e proctodeo ravvicinati al grado massimo, raccorciamento dell'embrione in grado tale da farlo giacere e re-trarre quasi completamente nella metà ventrale dell'uovo, e i gangli nervosi tutti bene individualizzati (fig. 2). Confrontando la figura 1 con la figura 2 si constata iniziata la fusione dei gangli 2°-3°-4° a formare il ganglio sottoesofageo, e quasi compiuta la fusione dei due ultimi gangli addominali. In questo momento di massimo raccorciamento embrionale, la catena nervosa consta adunque di 14 gangli: 2 cefalici, 3 toracici e 9 addominali.

Al principio della 3^a giornata dalla deposizione si è già pronunciato in modo evidentissimo il movimento della blastocinesi (fig. 3). Senza qui discutere sulla possibile spiegazione delle cause del fenomeno, dirò che tutto avviene come se una spinta di un corpo contundente si esercitasse sulla superficie ventrale del 7° segmento addominale dell'embrione, in direzione della risultante fra una componente ventro-dorsale e una componente antero-po-

steriore (fig. 3); per effetto di tale ipotetica spinta questo punto dell'embrione s'infossa fortemente, cosicchè la superficie ventrale dell'embrione, da convessa che era sul lato ventrale dell'uovo, diventa concava. La parte anteriore dell'embrione in un primo momento non partecipa che in lieve misura allo spostamento, cosicchè l'embrione assume su sezioni sagittali la caratteristica foggia di lettera S.

Intanto progrediscono le fusioni dei gangli nervosi: il ganglio sottoesofageo è divenuto unico, e così pure l'8° e 9° ganglio addominale dello stadio precedente sono fusi in un ganglio solo. Così il sistema nervoso centrale della vita di relazione ha raggiunto la definitiva struttura della vita larvale, e consta di 2 gangli cefalici, 3 toracici, 8 addominali. Non è ancora individualizzato il piccolo ganglio frontale.

Ancor prima che si raggiungesse il massimo raccorciamento dell'embrione erano comparsi sui margini ventrali dei due fondi ciechi dello stomodeo e proctodeo, gli abbozzi delle bandellette cellulari che daranno origine all'intestino medio. Tali bandellette, che gli Autori chiamano - per il loro destino - endodermiche, tendono a circoscrivere (dapprima ventralmente, poi sui lati, e poi dorsalmente) quella porzione di vitello che si trova *in situ* fra i due fondi ciechi dello stomodeo e proctodeo (figg. 1-5), e mentre si svolge il processo della blastocinesi esse proliferano completando appunto tale rivestimento. In tal modo ha origine l'epitelio dell'intestino medio (fig. 5).

L'infossamento pronunciato sul 7° segmento addominale permette all'estremità dell'addome embrionale di allungarsi nello spazio prodottosi fra la superficie ventrale dell'embrione e la parete ventrale dell'uovo. L'accrescimento dell'embrione in lunghezza riprende ora attivissimo; la regione cefalica rimane sempre fissa nella sua posizione verso il polo micropilare, ed allungandosi continuamente verso lo stesso polo la regione addominale dell'embrione, questo viene gradatamente ad assumere la conformazione a mo' di lettera U, di cui però una branca è ancora molto più corta dell'altra (fig. 4), tantochè l'apertura anale viene a trovarsi a livello dell'introflessione ipodermica fra 1° e 2° segmento toracico.

Si è prodotta così quella che possiamo chiamare la *grande curvatura embrionale*.

Il vertice dell'angolo prodottosi sul 7° segmento addominale è rappresentato da tale segmento soltanto all'inizio del fenomeno; successivamente tutto avviene come se il corpo contundente restasse fermo nel punto ove si è infossato, e, al disotto di esso l'embrione andasse scorrendo per allungarsi e distendersi; cosicchè, poco dopo, il vertice della piega è formato dal 6° segmento addominale, poi dal 5° (fig. 4), poi dal 4° e poi dal 3° (fig. 5). Raggiunto quest'ultimo stadio, l'addome embrionale si è allungato fino a raggiungere l'altezza del labbro inferiore. La conformazione dell'embrione a lettera U è ora assai più spiccata (cfr. fig. 5 con fig. 4), ma i due rami sono tuttora disuguali nè mai si uguaglieranno in seguito, perchè la grossa

testa embrionale occupa quasi interamente la calotta submicropilare dell'uovo, e la sua parete ipodermica, molto ispessita e non cedevole alla pressione dell'addome che tende ancora ad allungarsi, chiude la via all'ulteriore allungamento (fig. 5). Questo si verifica perciò d'ora in poi su una linea e su un piano tutto diverso da quello su cui è avvenuto finora.

Quando però la condizione di cose rappresentata nella figura 5 è raggiunta, vi è una nuova fase di arresto nell'allungamento dell'embrione, durante la quale l'estremità addominale esercita una pressione sempre crescente sulla superficie ventrale della regione cefalica, pressione resa evidente dalla pieghettatura crescente delle pareti ipodermiche addominali.

Mentre si compiva la prima fase fin qui descritta della blastocinesi, avvenivano altri importanti fenomeni. La parete dorsale dell'embrione, che prima della blastocinesi non esisteva se non in minima parte (figg. 1-3), si è andata gradatamente completando: le due falde della piega amniotica cefalica e addominale e le falde laterali vanno avvicinandosi e circoscrivono un foro dorsale sempre più ristretto (*ombelico*) che mette in comunicazione la cavità del *mesenteron* ripiena di vitello con tutta la massa del vitello extraembrionale (fig. 3). Durante la blastocinesi il foro ombelicale s'impiccolisce ancora (fig. 4) e allo stadio di embrione a lettera U diviene piccolissimo (fig. 5) e si sposta antero-posteriormente perchè anche la parete dorsale dell'embrione — ormai quasi completa — segue l'allungamento generale di questo; l'ombelico però (allungandosi anche l'intestino anteriore) viene sempre a trovarsi in posizione di poco anteriore a quella del fondo cieco stomodeale. In preparati di stadi pochissimo più avanzati di quello di figura 5, l'ombelico è obliterato, la parete dorsale ipodermica è completa e l'amnio forma un sacco completamente chiuso avvolgente l'embrione.

Il vitello extraembrionale va sempre diminuendo, e allo stadio di embrione ad U non ne rimane che una piccola massa formante una calotta submicropilare (fig. 5) compresa fra amnio e sierosa. La piccola massa di vitello rimasta compresa nel *mesenteron* va anch'essa a tale stadio esaurendosi; poco più tardi essa sarà del tutto esaurita, ed è col suo esaurimento che coincide il nuovo fenomeno di allungamento dell'embrione, il quale con ciò provvede — oltrechè a raggiungere le dimensioni di larva pronta allo schiudimento — anche ad introdurre nel suo intestino l'ultima provvista di nutrimento che esso non potrebbe altrimenti assorbire, essendo questo residuo di vitello rimasto fuori del corpo embrionale ed essendo l'ombelico ormai chiuso.

Ad un certo momento la pressione esercitata dal turgore dei tessuti in accrescimento, fa sì che l'estremo addome si ripiega improvvisamente una seconda volta in maniera che l'asse longitudinale degli ultimi segmenti addominali s'incurva lateralmente, deviando dal piano sagittale. E mentre gli ultimi segmenti dell'addome sporgono a sinistra di tale piano, i primi sporgono a destra. Nella sezione di figura 6 s'incontra difatti la testa, il torace

e i primi 3 articoli dell'addome; poi la sezione non comprende la regione addominale media e interessa invece l'estremità dell'addome fino all'ano rivolta in senso antimicropilare; evidentemente il medio addome è deviato fuori del piano sagittale e l'estremità addominale si è ripiegata in direzione antero-posteriore su di un piano che fa angolo di 90° col piano sagittale.

Una riprova di ciò si ha in sezioni frontali (figg. 7-8). La figura 7 è condotta sul piano frontale, la cui proiezione si potrebbe tracciare sulla figura 6 con una retta che passando fra ganglio sopraesofageo e ganglio frontale, tagli il ganglio sottoesofageo, i 3 toracici e il 1° addominale. Continuando a sezionare lo stesso uovo su piani sempre più a destra di questa linea, le sezioni cesseranno in breve dall'interessare la regione cefalotoracica, e comprenderanno solo l'estremità dei pezzi boccali, ma taglieranno invece la regione addominale, ottenendosi la figura 8; in questa la regione cefalotoracica deve supporre tutta giacente al disotto del piano della figura, con la superficie ventrale dell'embrione rivolta in alto (deviazione dell'addome embrionale a sinistra dell'embrione eppoi di nuovo a destra) oppure al disopra della figura (deviazione a destra eppoi a sinistra). Probabilmente i due casi avvengono con uguale frequenza.

Simultaneamente alla deviazione l'addome embrionale subisce evidentemente una *torsione*, che si rende bene evidente nei primi 4 articoli addominali; vedasi infatti la asimmetrica distribuzione della sostanza grigia e sostanza bianca nel 3° e 4° ganglio addominale, in figura 8.

Si è prodotta così la *piccola curvatura embrionale* e l'embrione ha raggiunto la giacitura definitiva, ripiegandosi due volte su sè stesso e ritorcendosi. Durante questo fenomeno, che chiamo di *ravvolgimento* per distinguerlo dal *rivolgimento* (o *blastocinesi*) con cui non ha nulla a che fare, le membrane embrionali si lacerano e vien deglutito il vitello extraembrionale della calotta micropilare; brandelli di sierosa e di amnio si riconoscono qua e là fra l'ipoderma e il corion; la cavità dello stomodeo, finora sgombra di vitello, ora ne è piena (figg. 5-6) e la calotta di vitello è sparita; l'intestino medio è rifornito di più abbondante vitello, il quale invade parte dell'intestino posteriore finora sgombro (figg. 5, 8); i due fondi ciechi dello stomodeo e proctodeo sono ora pervii; evidentemente il vitello extraembrionale, non più trattenuto dall'amnio, si è inoltrato per la bocca, fino alla stretta piega dell'intestino posteriore del 7° segmento addominale, ove l'accollamento delle pareti intestinali impedisce al vitello d'inoltrarsi fino all'ano.

*
* *

Riassumendo, i momenti più salienti dello sviluppo embrionale di questo insetto si possono così riepilogare:

a) formazione di una stria germinale occupante quasi l'intera periferia dell'uovo, descrivente quasi una lettera O;

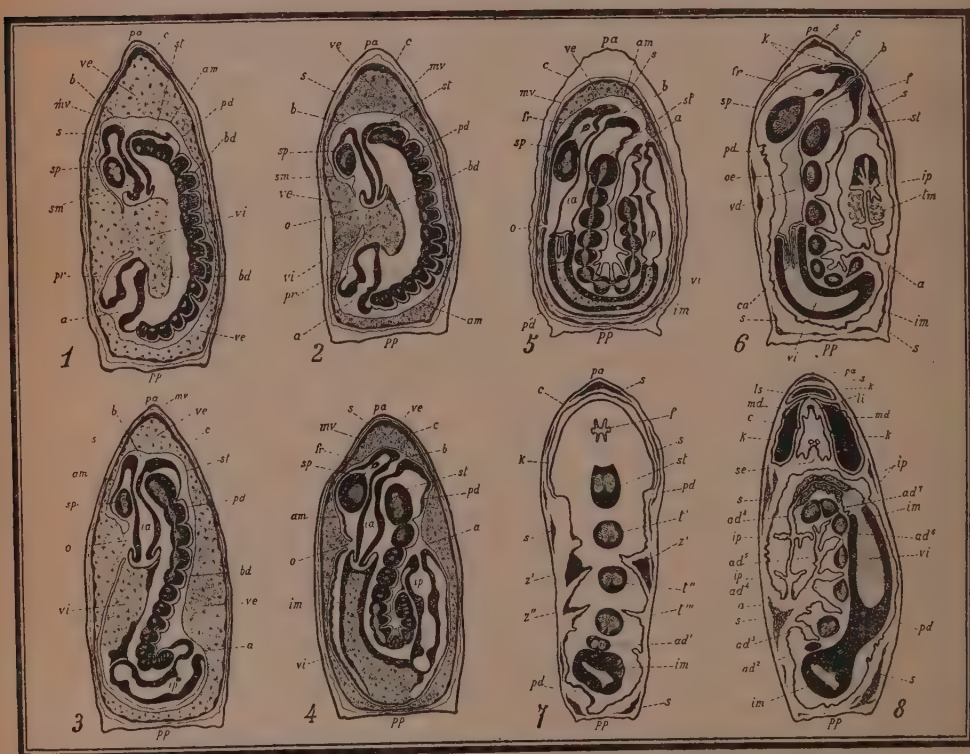
b) raccorciamento della stria sul lato ventrale dell'uovo (stadio di lettera C);

c) incurvamento dell'addome verso il lato dorsale dell'uovo (stadio di lettera S);

d) rapida ripresa dell'allungamento dell'embrione fino ad uno stadio di lettera U;

e) pausa;

f) nuovo incurvamento dell'addome che rivolge l'estremità verso il polo posteriore dell'uovo, con conseguente deviazione dell'asse embrionale in parte a destra e in parte a sinistra del piano sagittale, e torsione di 90° del piano sagittale della piccola curva addominale rispetto a quello della testa e del torace.



SPIEGAZIONE DELLE FIGURE.

Tutte le figure sono tratte da sezioni di uova di *Pieris brassicae*; tutte sono disegnate ad ingrandimento di 45 diametri, tutte sono semischematiche, ma i contorni di tutti gli organi sono esattamente disegnati alla camera lucida Abbé-Apathy.

Fig. 1: Sezione sagittale di uovo 2 giorni dopo deposto. — Fig. 2: Come la precedente, ma con embrione un po' più avanzato. — Fig. 3: Come le precedenti, al principio del 3° giorno. — Fig. 4: Come le precedenti, alla fine del 3° giorno. — Fig. 5: Lo stesso, al 4° giorno. — Fig. 6: Sezione parallela all'asse longitudinale dell'uovo, ma facente un lieve angolo col piano sagittale, al 5° giorno della deposizione. — Fig. 7: Sezione frontale di uovo al 5° giorno, a livello dei gangli toracici. — Fig. 8: Sezione frontale dello stesso uovo della figura precedente a livello dei gangli addominali.

SPIEGAZIONE DELLE LETTERE.

<i>a</i>	, apertura anale.	<i>o</i>	, apertura ombelicale.
<i>ad¹-ad⁸</i>	, 1°-8° ganglio addominale.	<i>oe</i>	, esofago.
<i>am</i>	, amnio.	<i>pa</i>	, polo anteriore.
<i>b</i>	, bocca.	<i>pd</i>	, parete ipodermica.
<i>bd</i>	, bandellette endodermiche dell'intestino medio.	<i>pp</i>	, polo posteriore.
<i>c</i>	, corion.	<i>pr</i>	, proctodeo.
<i>ca</i>	, cardias.	<i>s</i>	, sierosa.
<i>f</i>	, faringe.	<i>se</i>	, tubi escretori delle ghiandole sericigene.
<i>fr</i>	, ganglio frontale.	<i>sm</i>	, stomodeo.
<i>ia</i>	, intestino anteriore.	<i>sp</i>	, ganglio sopraesofageo.
<i>im</i>	, » medio.	<i>st</i>	, » sottoesofageo.
<i>ip</i>	, » posteriore.	<i>t¹-t¹'-t¹''</i>	, 1° - 3° gangli toracici.
<i>k</i>	, rivestimento di chitina.	<i>tm</i>	, tubi malpighiani.
<i>li</i>	, labbro inferiore.	<i>vd</i>	, vitello deglutito.
<i>ls</i>	, » superiore.	<i>ve</i>	, » extraembrionale.
<i>md</i>	, mandibole.	<i>vi</i>	, » intestinale.
<i>mv</i>	, membrana vitellina.	<i>z¹-z¹'</i>	, 1ª - 2ª zampa toracica.

G. C.

ERRATA CORRIGE.

Nota del Socio F. ZAMBONINI e del prof. R. G. LEVI, (fasc. n. 9, p. 305), da aggiungere in nota:

$$(1) \frac{40.07 + 137.4}{2} = 88.74, \text{ mentre il peso atomico dello stronzio è } 87.6.$$



RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del dicembre 1925

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Chimica-fisica. — *Soluzioni solide fra composti di elementi a valenza diversa. Cloruro di litio e cloruro di magnesio anidri.* Nota ⁽¹⁾ del Socio G. BRUNI e di A. FERRARI ⁽²⁾.

L'isomorfismo fra fluoruro di litio e fluoruro di magnesio è stato studiato mediante i raggi X da G. Bruni e G. R. Levi ⁽³⁾ e in seguito da A. Ferrari ⁽⁴⁾. Per questa coppia non si sono potuti studiare cristalli misti con percentuali superiori al 20 % di MgF_2 , giacchè con un contenuto maggiore anche i cristalli misti temprati si scompongono e d'altra parte le miscele più ricche di MgF_2 rispetto a LiF non si prestano allo studio.

Da queste considerazioni fummo portati a studiare il sistema $MgCl_2-LiCl$, la cui miscibilità, in tutti i rapporti allo stato solido, era nota dall'analisi termica eseguita da Sandonnini ⁽⁵⁾.

L'esame di questi composti è reso difficile dalla grande deliquescenza dei sali in questione. Dopo aver sperimentati diversi dispositivi (camere con sostanze avidi d'acqua, tubetti di vetro Lindemann al borato di litio per racchiudere il sale, ecc.) abbiamo verificato che il metodo migliore per avere dei fotogrammi delle suddette sostanze consisteva nel riempire, col sale fuso in corrente di acido cloridrico e rapidamente macinato dopo raffreddamento, dei piccoli tubicini di carta da sigarette protetti da un velo

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale del R. Politecnico di Milano.

(2) Presentata nella seduta del 1° novembre 1925.

(3) Questi « Rendiconti », vol. 33, (5^a) 1924 (2° sem.), 377.

(4) Questi « Rendiconti », vol. 1, (6^a) 1925 (1° sem.), 664.

(5) « Gazz. Chim. », vol. 44, 1924 (1° sem.), 777.

di paraffina. Tutte queste manipolazioni del sale anidro erano fatte in ambiente mantenuto il più possibile secco mediante anidride fosforica.

I dati ricavati dal fotogramma del cloruro di litio, eseguito col metodo delle polveri di Debye-Scherrer e Hull, impiegando un tubo Coolidge ad elettroni con anticatodo di rame sono raccolti nella seguente tabella nella quale i simboli hanno il significato più volte detto nei nostri precedenti lavori.

TABELLA 1^a LiCl.

N.	δ	$\frac{\delta}{2}$ corr. (1)	$\frac{\delta}{2}$ corr.	d	$h_1 n_2 h_3$	a	Intensità		
							osservate	calcolate (2) colla	
								formola (1)	formola (2)
1	31.8	15.20	0.262	2.935	111	5.090	f	54.9	64.6
2	36.6	17.62	0.303	2.541	200	5.083	f	47.6	45.7
3	52.2	25.05	0.424	1.815	220	5.087	f	45.6	46.5
4	61.3	30.10	0.502	1.527	113	5.070	f	45.7	60.2
5	64.3	31.60	0.524	1.469	222	5.090	d	22.0	23.4
6	75.7	37.37	0.607	1.267	400	5.070	md	14.0	14.4
7	83.5	41.33	0.660	1.166	331	5.085	m	29.8	36.5
8	86.0	42.60	0.677	1.137	240	5.090	f	44.3	42.5
9	96.2	47.75	0.741	1.039	224	5.100	f	40.8	39.1
10	104.0	51.73	0.785	0.981	151	5.102	f	30.5	39.6
					333				
11	118.0	58.80	0.855	0.901	440	5.100	m	23.8	24.0
12	127.0	63.35	0.893	0.862	153	5.100	ff	72.5	79.4
13	130.0	64.87	0.905	0.851	600	5.106	ff	75.1	75.1
					442				

(1) La correzione introdotta (ammettendo il preparato trasparente) è espressa dalla formola:

$$\delta' = \delta - r [1 + \text{sen } (90^\circ - \delta)]$$

dove δ è l'angolo letto e δ' quello corretto per lo spostamento derivante dal diametro del preparato il cui raggio è r .

(2) Il calcolo delle intensità è fatto con le formole (1) e (2) di confronto (vedi A. FERRARI, «Rend. Lincei», vol. 14, 1^o semestre [1925], 665); qui però è aggiunta la correzione dovuta all'indebolimento delle intensità osservate per le prime linee per le quali si ha un maggior attraversamento del preparato.

Le intensità calcolate sono così moltiplicate per dei coefficienti che diminuiscono le prime aumentando le ultime. I detti coefficienti dati da DEBYE, [«Physik. Zeitschr.», XIX (1918), 481] sono per la 111 0.780; per la 220 0.860; per la 113 0.982; e dalla 400 in avanti 1.2; per i valori mancanti abbiamo eseguito l'interpolazione. Osserviamo che questi coefficienti sono dati pel caso particolare del carbonio e non sono quindi applicabili a tutto rigore in questo caso. Tuttavia li abbiamo usati giacchè essi introducono un logico e sicuro miglioramento che trascurato accrescerebbe l'inesattezza del calcolo.

In questa tabella il cloruro di litio è ordinato secondo una cella cubica il cui spigolo a misura 5.10 \AA e di volume 132.65 \AA^3 ; la densità ponendo nella cella 4 molecole è:

$$\frac{4 \times 42.4 \times 1.66 \times 10^{-24} \text{ gr.}}{132.65 \times 10^{-24} \text{ cm.}} = 2.12$$

in buon accordo con quella determinata sperimentalmente 2.06. ⁽¹⁾ Il valore di a è leggermente inferiore a quello dato per la stessa sostanza dai precedenti autori ⁽²⁾.

Analogamente al cloruro di litio il fotogramma di quello di magnesio si ordina secondo una cella cubica.

TABELLA 2^a MgCl_2

N.	δ	$\frac{\delta}{2}$ corr. (3)	sen $\frac{\delta}{2}$ corr.	d	$h_1 h_2 h_3$	a	Intensità osservate
1	31.80	15.20	0.262	2.437	111	5.087	f
2	36.60	17.16	0.303	2.540	200	5.080	ff
3	44.40	21.56	0.367	2.700	211	5.140	d
4	52.00	25.40	0.429	1.793	220	5.075	ff
5	61.50	30.20	0.502	1.532	113	5.082	d
6	64.50	31.71	0.526	1.464	222	5.075	mf
7	75.50	37.30	0.606	1.270	400	5.080	md
8	83.60	41.40	0.661	1.165	331	5.078	d
9	86.00	42.60	0.677	1.137	240	5.080	ff
10	96.60	48.08	0.744	1.035	224	5.072	f
11	104.00	51.73	0.786	0.979	115	5.090	mt
					333		
12	130.50	65.13	0.908	0.848	600	5.090	mf
					442		

(1) LANDOLT, *Tabellen* (1923), 301.

(2) I valori dati per a sono:

$a = 5.17 \pm 0.02$ E. POSNJAK e R. W. G. WYCKOFF « Journ. Washington Acad. of Sciences », 12, 1922, 248.

$a = 5.132$ W. P. DAVEY « Phys. Rev. », 21, 1923, 143.

$a = 5.143 \pm 0.006$ H. OTT « Phys. Zeitschr. », 24, 1923, 209.

(3) A differenza che nel caso precedente del cloruro di litio per il maggior peso atomico del magnesio rispetto al litio qui abbiamo usato la correzione di Pauli espressa dalla formula:

$$\delta' = \delta - \frac{r}{2} (1 + \cos \delta)$$

dove δ è l'angolo misurato, δ' quello corretto ed r il raggio del cilindretto impiegato come preparato.

In questa tabella gli indici sono espressi come monometrici allo scopo di confrontarli con quelli della tabella 1^a; ma con questo non intendiamo fare alcuna affermazione sul sistema a cui appartiene il cloruro di magnesio.

La dimensione che si ricava dalla tabella 2^a come più probabile per lo spigolo a del cubo elementare è 5.09 \AA , da cui il volume 131.87 \AA^3 e il peso specifico:

$$\frac{2 \times 96.23 \times 1.66 \times 10^{-24} \text{ gr.}}{131.87 \times 10^{-24} \text{ cm.}} = 2.47$$

in buon accordo con quello determinato sperimentalmente $2.32^{(1)}$.

Fotogrammi identici a quello i cui dati sono riassunti nella sopra riportata tabella si sono avuti in numerose esperienze eseguite sia con cloruro di magnesio temprato dopo la fusione in corrente di acido cloridrico, sia col prodotto ricotto.

Dai dati della tabella 1^a e 2^a si ricava il diagramma della figura 1, nel quale sulle ascisse sono portati gli angoli sotto i quali si presentano le rispettive linee, e sulle ordinate le intensità delle linee stesse.

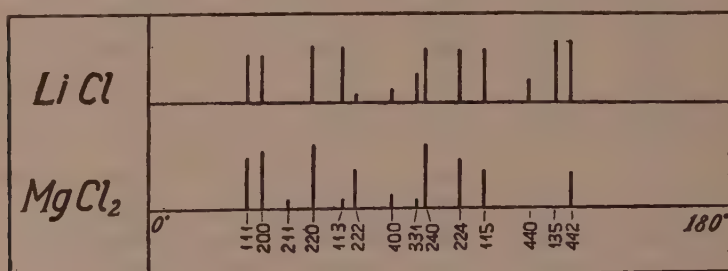


Fig. 1.

Come mostra chiaramente il diagramma i due fotogrammi non differiscono che nella intensità delle linee, ma le posizioni in cui queste si presentano sono eguali. Infatti le dimensioni della cella che si ricavano dalle tabelle 1^a e 2^a sono (nei limiti degli errori sperimentali nei quali può rientrare la leggera differenza di $a = 5.10$ e $a' = 5.09$) eguali. Geometricamente le due celle elementari sono due cubi.

Abbiamo anche preparato i cristalli misti nelle proporzioni $\text{Li}_2\text{Cl}_2 - 2\text{MgCl}_2$ e $2 \text{ Li}_2\text{Cl}_2 - \text{MgCl}_2$ da miscele fuse e solidificate e ne abbiamo ottenuti i fotogrammi, sia da materiali temprati, che ricotti. In tutte le condizioni si hanno fotogrammi coincidenti con quelli dei componenti, salvo che per le intensità.

Questa inaspettata coincidenza dei due spettrogrammi rende impossibile un'indagine completa sulle soluzioni solide non permettendo una distin-

(1) LANDOLT, *Tabellen* (1923), 302.

zione fra esse e le semplici miscele meccaniche dei due componenti. Infatti un fotogramma eseguito con la miscela meccanica di cloruro di litio e cloruro di magnesio fatta agitando i due sali polverizzati in un pesafiltro completamente secco e chiuso, mostra le linee dei due componenti perfettamente sovrapposte. D'altro lato questo modo di operare non può far pensare che si siano formati cristalli misti.

È quindi impossibile verificare con questo metodo se i cristalli misti ottenuti per solidificazione delle miscele fuse si sdoppino a più bassa temperatura, per quanto la somiglianza dei reticoli, la forma della curva di solidificazione e l'assenza di effetti termici nel raffreddamento trovata da Sandonnini rendano assai verosimile che queste soluzioni solide siano stabili anche a temperatura ordinaria.

Resterebbe ora da esaminare come possa interpretarsi la struttura di questi due composti per spiegare il loro isomorfismo. Rispetto al cloruro di litio gli studi precedenti di Wyckoff, Davey e Ott, coincidono nell'attribuirgli una struttura cubica a faccie centrate tipo NaCl.

Sulla struttura del cloruro di magnesio anidro nulla è noto.

Tra le strutture appartenenti al sistema monometrico studiate coi raggi Röntgen una sola è stata fino ad ora ritrovata avente una cella contenente due molecole del tipo AB_2 , quella della cuprite. Il calcolo delle intensità dovute ad una simile struttura, confrontato con quelle osservate, esclude la possibilità di attribuire al cloruro di magnesio un reticolo simile.

D'altronde una struttura monometrica è esclusa anche dall'esame ottico. Da questo esame del quale dobbiamo ringraziare il prof. E. Artini, risulta essere il cloruro di magnesio anidro da noi impiegato, birifrangente uniasico negativo, come anche è accennato nel Groth⁽¹⁾.

Bisogna quindi concludere che si tratta di una sostanza presentante struttura pseudocubica, ma in realtà appartenente ad un sistema uniassico. Abbiamo quindi cercato di stabilire una struttura che risponda a queste condizioni, in accordo colle intensità delle linee osservate, che renda conto nel modo più razionale dell'isomorfismo osservato col cloruro di litio e della possibilità della compenetrazione dei due reticoli in modo da formare cristalli misti in tutti i rapporti.

In una prossima nota renderemo conto dei risultati ottenuti in questa ricerca in cui abbiamo preso in esame anche la struttura di altri cloruri anidri di metalli bivalenti.

Riassumendo:

1° Il cloruro di magnesio anidro dà col metodo delle polveri un fotogramma corrispondente ad un reticolo cubico coincidente con quello del cloruro di litio.

2° La cella elementare contiene due molecole $MgCl_2$ e corrisponde a quella contenente quattro molecole $LiCl$.

(1) « Chem. Krystall. », 1906, I, 208.

3° I dati fondamentali delle due celle sono:

	a	Vol =	dens. calc.	dens. nota
4LiCl	5.10 Å	132.65 Å ³	2.12	2.06
2MgCl ₂	5.09 »	131.87 »	2.47	2.32

4° Essendo il cloruro di magnesio anidro birifrangente uniassico si ammette per esso una struttura pseudocubica appartenente ad uno dei sistemi tetragonale od esagonale.

Errata-corrige alla nota: *I reticoli cristallini dei fluoruri di litio e magnesio e il loro isomorfismo*, di A. FERRARI presentata dal Socio G. BRUNI.

pag. 665 riga 6: $Q = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$ vale pel sistema monometrico; mentre per il tetragonale diventa $Q = h_1^2 + h_2^2 + \frac{a^2}{c^2} h_3^2$ questo valore è quello impiegato nel calcolo delle intensità di MgF₂.

pag. 666 e 668: nelle due formole che danno la densità invece di 1. 66.10⁻²⁴ gr leggere 1.66. 10⁻²⁴ gr.

pag. 668 riga 16: il riferimento (2) a Bragg era «Philos. Magaz. 1920 (6) 40 169» mentre quello riportato è l' (1) della pag. 670 riga 6.

pag. 668: nella tabella alla riga SnO₂ invece di $c = 3.19$ leggere $c = 3.14$.

pag. 669: nelle coordinate della cella gli x del parametro come pure gli o devono avere il medesimo carattere.

pag. 670 riga 7: invece di S_{100} leggerè S_{110} .

Chimica. — *Ricerche sull' isomorfismo dei molibdati dei metalli delle terre rare con quelli del calcio, dello stronzio, del bario e del piombo.* Nota del Socio F. ZAMBONINI e del prof. R. G. LEVI⁽¹⁾.

V. DEDUZIONI DALL' ANALISI RÖNTGENOGRAFICA DEI MOLIBDATI DI La, Ce, Pr, Nd, Sm. CRISTALLI MISTI DI MOLIBDATO DI CERIO E DI CALCIO.

Se si confrontano le varie tabelle della Nota IV, si scorge subito il perfetto isomorfismo dei composti La₂(MoO₄)₃, Ce₂(MoO₄)₃, Pr₂(MoO₄)₃, Nd₂(MoO₄)₃ e Sm₂(MoO₄)₃. La struttura cristallina è la stessa in tutti, come risulta dalla identità degli spettrogrammi, che presentano, salvo pochissime eccezioni senza importanza, i medesimi piani riflettenti e con la stessa intensità.

Confrontando, poi, le tabelle dei molibdati dei metalli rari che vanno dal lantanio al samario con quelle nelle quali sono stati riassunti i risultati ottenuti per i molibdati dei metalli alcalino-terrosi e del piombo, appare evidente la identità di struttura cristallina dei due gruppi di molibdati. Tutti i piani riflettenti osservati nei molibdati dei metalli del gruppo del cerio

(1) Pervenuta all'Accademia il 15 luglio 1925.

sono stati ritrovati nei fotogrammi di qualcuno almeno dei corrispondenti composti alcalino-terrosi, salvo, forse, (104) e (203). Si tratta, però, di due piani riflettenti di scarsissima importanza. (104) è comparso nel solo fotogramma del molibdato ceroso, debolissimo: è, notato, infatti, *ddd*. Nel CaMoO_4 si è osservata una linea, pure *ddd*, con $\theta = 70^\circ$, e che corrisponde, all'incirca, a (104): per questo simbolo si calcolerebbe $a_0 = 3.71$, valore un po' anormale, che potrebbe, tuttavia, spiegarsi anche con la difficoltà della lettura. (203) si ha nei fotogrammi dei due molibdati di Ce^{+++} e di Sm : è *dd* o *d*. In quello di CaMoO_4 vi è una linea, con $\theta = 71.5$, che è indubbiamente corrispondente ad una radiazione β : considerata, però, anche come α , rappresenterebbe (203), con $d = 1.316$ e $a_0 = 3.66$, valore perfettamente normale.

Per i molibdati dei metalli del gruppo del cerio presi in esame si hanno, riassumendo, i risultati seguenti ⁽¹⁾:

	a_0	c_0	V_0	Peso atomico del metallo raro	Numero d'ordine
$\text{La}_2(\text{MoO}_4)_3$. . .	3.78	5.86	83.7	139.0	57
$\text{Ce}_2(\text{MoO}_4)_3$. . .	3.77	5.89	83.7	140.25	58
$\text{Pr}_2(\text{MoO}_4)_3$. . .	3.76	5.805	82.1	140.9	59
$\text{Nd}_2(\text{MoO}_4)_3$. . .	3.74	5.79	81.0	144.3	60
$\text{Sm}_2(\text{MoO}_4)_3$. . .	3.69	5.81	79.1	150.4	62

Da questi dati emerge chiaramente il risultato importante, che nel solido elementare del volume su indicato è contenuto $\frac{1}{3}$ $\text{R}_2^{++}(\text{MoO}_4)_3$. In tale ipotesi, si ha, infatti, il seguente confronto più che soddisfacente fra i valori del peso specifico trovati sperimentalmente e quelli calcolati in base alle dimensioni del reticolo, servendoci della formula

$$\text{peso spec.} = \frac{\frac{1}{3} M \times 1.64 \cdot 10^{-24}}{a_0^3 c_0 \cdot 10^{-24}}$$

nella quale M è il peso molecolare per la formula $\text{R}_2^{++}(\text{MoO}_4)_3$, a_0 e c_0 rappresentano i lati del reticolo elementare.

	MOLIBDATO di				
	La	Ce	Pr	Nd	Sm
Peso specifico calcolato.	4.95	4.97	5.07	5.19	5.40
» » determinato sperimentalmente	4.77	5.03	4.84	5.14	5.36 ⁽²⁾

(1) Per i molibdati di La, Ce, Pr, Nd si sono presi, per il rapporto $a:c$, i valori dati da uno di noi nel lavoro più volte citato: per il molibdato di Sm si è accettato quello calcolato dal dott. G. CAROBBI $a:c = 1:1,5745$.

(2) Determinazione del dott. CAROBBI.

Possiamo, perciò, concludere che *nella serie isomorfa dei molibdati dei metalli alcalino-terrosi e di quelli del gruppo del cerio i solidi elementari contengono dei volumi equivalenti di quei composti*. Si è, così, per la prima volta risolta, in modo da non lasciare adito a dubbi, una questione che, come si è accennato in principio del presente scritto, è di fondamentale importanza per l'isomorfismo fra composti di elementi a valenza differente.

Merita anche attenzione il fatto che nei molibdati dei metalli rari esaminati il volume del solido elementare diminuisce regolarmente al crescere del peso atomico e del numero d'ordine. Per a_0 questa relazione è evidentissima, ed il distacco fra il molibdato di samario e quello di neodimio corrisponde precisamente al fatto che, mentre lantanio, cerio, praseodimio e neodimio hanno numeri d'ordine immediatamente successivi, fra il neodimio ed il samario vi è una differenza di *due* unità nei rispettivi numeri d'ordine, dovuta all'elemento intermedio, ancora incognito, 61.

Per c_0 si hanno piccole irregolarità, dovute al fatto che questo lato del reticolo si è calcolato da a_0 e dal valore, determinato in base alle misure cristallografiche, del rapporto $\frac{c}{a}$, il quale varia sensibilmente, anche per differenze di pochi minuti primi nei valori angolari ⁽¹⁾. Ci ripromettiamo di sottomettere ad un calcolo più rigoroso i nostri fotogrammi, appunto con lo scopo di esaminare accuratamente le relazioni quantitative che passano fra il numero d'ordine degli elementi rari del gruppo del cerio e le dimensioni del reticolo. Cercheremo, anzi, di estendere i nostri studi alle terre ittriche, in modo da avere un quadro completo per tutti i molibdati degli elementi con numero d'ordine dal 57 al 71. Per intanto, i risultati approssimativi da noi ottenuti vanno pienamente d'accordo con quelli che V. M. Goldschmidt ⁽²⁾ ha pubblicato or ora sugli ossidi dei metalli delle terre rare; egli ha, appunto, trovato che le dimensioni dei solidi elementari, e, quindi, i loro volumi, diminuiscono regolarmente al crescere del numero d'ordine.

L'avere noi, indipendentemente da Goldschmidt e dai suoi collaboratori, osservato nei molibdati dei metalli della cerite lo stesso fatto che il valente studioso norvegese ha constatato verificarsi negli ossidi di quei metalli, sta ad indicare che noi ci troviamo in presenza di un fenomeno di carattere generale per i composti di quegli elementi.

Essendo risultato in modo evidente, che i molibdati dei metalli alcalino-terrosi e del piombo e quelli dei metalli del gruppo del cerio (i *lantani*di

(1) Per il molibdato ceroso è da osservare non essere improbabile che in esso sia contenuto anche Ce^{+++} , come starebbe ad indicare il suo colore.

(2) V. M. GOLDSCHMIDT, F. ULRICH e T. BARTH, *Zur Krystallstruktur der Oxyde der seltenen Erdmétalle*. « Norske Videnskaps-Akad. i Oslo I. Matem.-Naturwd. Klasse », 1925, No 5.

di V. M. Goldschmidt) possiedono la stessa struttura cristallina, era chiaro che quella medesima struttura doveva rinvenirsi nei loro cristalli misti. Noi abbiamo studiato dei cristalli misti di CaMoO_4 e di $\text{Ce}_2(\text{MoO}_4)_3$, contenenti rispettivamente 6.5 e 29 % $\text{Ce}_2(\text{MoO}_4)_3$. Non è comparsa alcuna nuova riga nei fotogrammi, i quali sono sostanzialmente identici a quello del molibdato di calcio puro, tanto da riuscire del tutto inutile il riportare qui in esteso l'elenco dei piani riflettenti osservati.

Dal fotogramma dei cristalli misti con 6.5 % $\text{Ce}_2(\text{MoO}_4)_3$, si deduce $a_0 = 3.67$, ossia la piccola quantità di cerio che ha sostituito il calcio non ha prodotto una variazione apprezzabile nelle dimensioni del reticolo del molibdato di calcio puro. Per i cristalli misti con 29 % di molibdato ceroso si ha, invece, $a_0 = 3.70$, un valore, cioè, più elevato di quello di CaMoO_4 puro, e compreso fra i valori di CaMoO_4 e $\text{Ce}_2(\text{MoO}_4)_3$, che sono, come abbiamo già veduto, 3.67 e 3.77 rispettivamente.

I cristalli misti di molibdato di calcio e di molibdato ceroso non presentano, perciò, alcun particolare carattere strutturale. È da escludersi, quindi, una sostituzione di uno all'altro composto per celle unitarie, che, come abbiamo veduto, contengono pesi equivalenti dei due sali, perchè, in tale caso, dovrebbero certamente osservarsi, nei fotogrammi, delle nuove linee. Invece, poichè nei solidi elementari si ha CaMoO_4 e, rispettivamente, $\frac{1}{3} \text{Ce}_2(\text{MoO}_4)_3$, ossia un uguale numero di atomi di molibdeno e di ossigeno, la formazione di cristalli misti fra il molibdato di calcio e quello di cerio avviene semplicemente per sostituzione di un catione all'altro. Trattandosi di elementi a valenza diversa, non può, naturalmente, la sostituzione verificarsi atomo ad atomo, ma, al contrario, per reticoli equivalenti di atomi. S'intende pure che la sostituzione deve avvenire in modo « disordinato », come si esprime Vegard ⁽¹⁾, perchè altrimenti dovrebbero comparire dei nuovi massimi, che, invece, non sono stati affatto osservati.

Se si confrontano le costanti reticolari dei molibdati alcalino-terrosi e del piombo con quelle dei molibdati dei metalli del gruppo del cerio, si nota che il molibdato di samario è molto vicino a quello di calcio, mentre gli altri molibdati delle terre hanno valori compresi fra quelli che competono a CaMoO_4 ed a SrMoO_4 , e sono più vicini a quest'ultimo, e, quindi, anche al molibdato di piombo. In relazione con questo fatto va ricordato che, mentre tutti e cinque i molibdati dei metalli rari studiati presentano miscibilità completa allo stato solido con PbMoO_4 ⁽²⁾, il molibdato di samario è quello che dà cristalli misti in proporzioni più estese con CaMoO_4 .

(1) *Die Konstitution der Mischkristalle und die Raumbfüllung der Atome*. Videnskapselskabet's Skrifter I. Mat.-Naturw., Klasse Kristiania 1921, No. 6.

(2) Per $\text{Ce}_2(\text{MoO}_4)_3$ la miscibilità è solo limitata, per il polimorfismo di questo composto.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Costruzione di invarianti proiettivo-differenziali di una superficie.* Nota di E. BOMPIANI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA ⁽¹⁾.

I. — ESTENSIONE DEL PARALLELISMO DI LEVI-CIVITA.

In molte geometrie elaborate in questi ultimi anni l'ente che si studia è definito, rispetto al gruppo che caratterizza la geometria, da più forme differenziali. Se fra esse ve n'è una quadratica si può assumere come base per un calcolo differenziale assoluto o, in forma geometrica, per definire il trasporto parallelo secondo Levi-Civita. Questa specie di trasporto, che prescinde dalle altre forme differenziali, non fornisce tutte le proprietà geometriche dell'ente; e rimane il problema di trovare un'operazione geometrica che dipenda da tutte quelle forme.

La nozione di parallelismo dipende dalle altre due di angolo e di geodetica definite tutt'e due dalla forma quadratica.

Nel caso in cui sia data una forma quadratica, definita anche a meno di un fattore, ed un'altra forma differenziale qualsiasi, l'estensione desiderata può farsi ripetendo lo stesso procedimento costruttivo del Levi-Civita ove però alle geodetiche della forma quadratica si sostituiscano quelle dell'altra forma.

2. Illustro queste considerazioni applicandole allo studio di una superficie nel gruppo delle applicabilità proiettive: in tal caso la forma fondamentale è l'*elemento lineare proiettivo* di Fubini che, assunte a linee coordinate sulla superficie le linee asintotiche, può scriversi

$$(1) \quad E = \frac{\beta du^2 + \gamma dv^2}{du dv};$$

si escludono le sviluppabili e le quadriche ($\beta = \gamma = 0$).

La forma quadratica è $a du dv$ con $a \neq 0$ arbitrario.

L'equazione differenziale delle estremali di E, $\delta \int E = 0$, è

$$(2) \quad 2(du dv^2 - dv du^2)(\beta du^2 + \gamma dv^2) = \left(\frac{\partial \log \beta}{\partial u} du - \frac{\partial \log \gamma}{\partial v} dv \right) (\beta du^2 + \gamma dv^2) du dv + \\ + \left(\beta \frac{\partial \log \gamma}{\partial v} du^2 - \gamma \frac{\partial \log \beta}{\partial u} dv^2 \right) du^2 dv^2 \quad (3).$$

(1) Presentata nella seduta del 15 novembre 1925.

(2) Queste estremali hanno preso il nome di geodetiche proiettive, ipergeodetiche o pangeodetiche (FUBINI): l'ultimo nome sta ad indicare che esse possono considerarsi

Il parametro più conveniente da cui si possono far dipendere i punti di una curva è, secondo la natura del problema, l'*arco proiettivo* s , definito, a meno d'una costante addittiva, da $ds = E$; quindi indicando con apici le derivate rispetto ad s si avrà come equazione di normalizzazione per i *parametri* u' , v' di una direzione superficiale

$$(3) \quad \beta u'^3 + \gamma v'^3 = u' v'$$

da cui per derivazione rispetto ad s si ha

$$(4) \quad (3 \beta u'^3 - u' v') \frac{u''}{u'} + (3 \gamma v'^3 - u' v') \frac{v''}{v'} = \\ = \beta u'^3 \frac{d \log \gamma / \beta}{ds} - u' v' \frac{d \log \gamma}{ds} = \gamma v'^3 \frac{d \log \beta / \gamma}{ds} - u' v' \frac{d \log \beta}{ds}.$$

Tenuto conto della (3) la (2) può scriversi

$$(5) \quad \frac{v''}{v'} - \frac{u''}{u'} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \log \beta}{\partial u} u' - \frac{\partial \log \gamma}{\partial v} v' \right) + \frac{1}{2} \left(\beta \frac{\partial \log \gamma \beta^2}{\partial v} u'^2 - \gamma \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u} v'^2 \right)$$

e questa per la (4) dà luogo alle equazioni seguenti che definiscono le derivate dei parametri, rispetto ad s , lungo una pangeodetica:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{u''}{u'} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \log \beta}{\partial u} u' + \frac{1}{2} \gamma \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u} v'^2 - \\ &\quad - \frac{3}{2} \beta \gamma \left(\frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u} u' + \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} v' \right) u' v' \\ \frac{v''}{v'} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \log \gamma}{\partial v} v' + \frac{1}{2} \beta \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} u'^2 - \\ &\quad - \frac{3}{2} \beta \gamma \left(\frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u} u' + \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} v' \right) u' v'. \end{aligned} \right.$$

La normalizzazione fatta (3), cioè la scelta dell'arco s , ha il vantaggio su altre possibili di avere carattere intrinseco e di rendere razionali intere in u' , v' le derivate u'' , v'' .

3. - SPOSTAMENTO PROIETTIVO DI UNA DIREZIONE SUPERFICIALE.

Si consideri una curva uscente da P in direzione $\frac{du}{ds} = u'$, $\frac{dv}{ds} = v'$ e una direzione pure uscente da P (e come la prima appartenente alla super-

su tutte le superficie (escluse le sviluppabili e le quadriche); mentre le *forme normali* di FUBINI (v. appresso) e le loro estremali possono considerarsi soltanto sopra le superficie non rigate ($\beta \gamma \neq 0$).

ficie) definita da $\frac{\delta u}{\delta s} = \xi_1$, $\frac{\delta v}{\delta s} = \xi_2$. Queste due direzioni d e δ formano con le tangenti asintotiche in P il birapporto $\xi_2 u' / \xi_1 v'$.

Vogliamo definire come spostamento proiettivo della direzione $\delta(\xi_1, \xi_2)$ quello che fa passare da essa alla direzione $(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2)$ uscente da $P' = P + dP$ e formante ivi con la geodetica proiettiva PP' e con le due tangenti asintotiche lo stesso birapporto delle analoghe in P .

Per la conservazione del birapporto dev'essere

$$(7) \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{\xi_2 u'}{\xi_1 v'} \right) = 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{\xi_2'}{\xi_2} - \frac{\xi_1'}{\xi_1} = \frac{v''}{v'} - \frac{u''}{u'}$$

mentre se vogliamo conservare a $\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2$ il significato di parametri di direzione deve aversi

$$(8) \quad \frac{d}{ds} (\beta \xi_1^2 + \gamma \xi_2^2 - \xi_1 \xi_2) = 0.$$

Queste due condizioni definiscono $\frac{d\xi_1}{ds}$ e $\frac{d\xi_2}{ds}$; svolgendole si ha:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi_2' &= \frac{1}{2} \beta \xi_1^2 \left(\frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u} u' - \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} v' + 3 \beta \frac{\partial \log \gamma \beta^2}{\partial v} u'^2 - 3 \gamma \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u} v'^2 \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \xi_2 \left(\frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u} u' + \frac{\partial \log \gamma}{\partial v} v' + \beta \frac{\partial \log \gamma \beta^2}{\partial v} u'^2 - \gamma \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u} v'^2 \right) \end{aligned} \right.$$

ed una analoga per ξ_1' (le quali valgono, e si semplificano, anche nel caso in cui sia p. es. $\beta = 0, \gamma \neq 0$, purchè si tenga conto della (3)). Per $\xi_1 = u', \xi_2 = v'$ si hanno le (6).

4. - CURVATURA PANGEODETICA DI UNA CURVA.

Consideriamo una curva e la geodetica proiettiva o pangeodetica tangente ad essa in P . Il logaritmo del birapporto delle tangenti alle due curve e delle tangenti asintotiche in $P' = P + dP$ diviso per l'elemento d'arco ds dà un invariante del 2° ordine relativo alla curva in P . Indicando con d i differenziali sulla curva e con dg i differenziali sulla pangeodetica tangente detto birapporto vale

$$\frac{v' + dv'}{u' + du'} \cdot \frac{u' + dg u'}{v' + dg v'}$$

e perciò la curvatura ora definita, in base alla (5) è

$$(10) \quad \frac{v''}{v'} - \frac{u''}{u'} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \log \beta}{\partial u} u' - \frac{\partial \log \gamma}{\partial v} v' \right) - \frac{1}{2} \left(\beta \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} u'^2 - \gamma \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u} v'^2 \right).$$

A questa curvatura si può dare una forma diversa se la superficie non è rigata, $\beta\gamma \neq 0$, e se s'introducono le forme normali di Fubini

$$\varphi_2 = 2\beta\gamma du dv, \quad \varphi_3 = 2\beta\gamma(\beta du^3 + \gamma dv^3), \quad \bar{\varphi}_3 = 2\beta\gamma(\beta du^3 - \gamma dv^3).$$

Indicando con δ i differenziali controvarianti rispetto a φ_2 , sicchè

$$\delta^2 u = d^2 u + \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u} du^2, \quad \delta^2 v = d^2 v + \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v} dv^2 \quad (10) \text{ si scrive}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2\beta\gamma(du\delta^2 v - dv\delta^2 u)}{\varphi_3} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} du - \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} dv \right) \frac{\varphi_2}{\varphi_3} - \\ & - \frac{1}{2} \left(\beta \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} du^2 - \gamma \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} dv^2 \right) \frac{\varphi}{\varphi_3^2} \end{aligned}$$

ove le due forme tra parentesi hanno significato invariante; indicando con $\delta\varphi_3$ la forma ottenuta differenziando φ_3 rispetto a φ_2 detta curvatura si scrive pure

$$\begin{aligned} (11) \quad & \frac{2\beta\gamma(du\delta^2 v - dv\delta^2 u)}{\varphi_3} - \frac{1}{2} \frac{\delta\varphi_3}{\varphi_3^2} \varphi_2 - \\ & - \frac{1}{2} \left(\beta \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} du^2 - \gamma \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} dv^2 \right) \frac{\varphi_2^2}{\varphi_3^2}. \end{aligned}$$

Se si calcola la precedente espressione per un sistema ∞^2 di linee proiettivamente definito sulla superficie si ottiene un invariante differenziale del 1° ordine di significato geometrico noto; p. es. per le linee assiali associate alla congruenza degli spigoli di Green si ha l'invariante

$$-\frac{\varphi_3}{\varphi_3} - \frac{1}{2} \left(\beta \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} du^2 - \gamma \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} dv^2 \right) \frac{\varphi_2^2}{\varphi_3^2}.$$

5. - INVARIANTI PROIETTIVI DI UNA SUPERFICIE.

Con procedimento analogo otteniamo invarianti per applicabilità proiettive della superficie. Basterà calcolare la curvatura in un punto di una linea appartenente ad un sistema ∞^1 invariante per tali deformazioni. Se si ricorre al sistema delle linee canoniche definite da $h_1 du - h_2 dv = 0$ ove

$$h_1 = \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} \text{ e } h_2 = \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} \text{ la curvatura di una di esse in un punto}$$

è l'invariante

$$\begin{aligned} & \frac{h_1 h_2}{2(\beta h_2^3 + \gamma h_1^3)^2} \left[\left\{ h_2 \frac{\partial \log h_1^2/\beta}{\partial u} - h_1 \frac{\partial \log h_2^2/\gamma}{\partial v} - 2 \frac{\partial^2 \log \gamma/\beta}{\partial u \partial v} \right\} (\beta h_2^3 + \gamma h_1^3) - \right. \\ & \quad \left. - (\beta h_2^3 - \gamma h_1^3) h_1 h_2 \right]; \end{aligned}$$

esso è indeterminato solo se sono indeterminate le linee canoniche; è infinito se e solo se le linee canoniche sono linee di Darboux; mentre si annulla quando le linee canoniche sono le asintotiche di un sistema (ma non solo in questo caso).

Invece la curvatura di una linea di Segre, pure invariante della superficie, vale $\frac{1}{24} (b_1 \gamma^{1/3} - b_2 \beta^{1/3}) (\beta \gamma)^{2/3}$; e il prodotto delle tre curvature delle linee di Segre uscenti da un punto è, a meno d'un fattore numerico, l'invariante razionale $(b_1 \gamma + b_2 \beta) / (\beta \gamma)^2$ di cui già avevo dato un'altra interpretazione geometrica ⁽¹⁾.

Matematica. — *Sulla convergenza delle serie di funzioni ortogonali.* Nota di CARLO SEVERINI, presentata dal Corrisp. GINO LORIA ⁽²⁾.

È noto ⁽³⁾ che, se:

$$(1) \quad \Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_n(x), \dots$$

è una successione di funzioni, sommabili insieme coi loro quadrati, ortogonali e normali in un intervallo finito (a, b) , e:

$$(2) \quad C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$$

è una successione qualsivoglia di costanti (reali), soggette alla condizione che converga, per qualche valore di k maggiore di zero, la serie:

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^k C_n^2,$$

risulta convergente quasi dappertutto in (a, b) la serie:

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} C_n \Phi_n(x).$$

Questo risultato, che per la sua generalità presenta speciale interesse, e segna un progresso notevole nella teoria delle serie di funzioni ortogo-

(1) *Contributi alla geometria proiettivo-differenziale di una superficie*, « Bollettino Unione Matem. Ital. », 1924, n. 6.

(2) Pervenuta all'Accademia il 5 agosto 1925.

(3) Cfr. E. W. HOBSON, *On the convergence of series of orthogonal functions*, « Proceedings of the London Mathematical Society », Ser. 2, Vol. 12, Part. 4, pp. 297-308.

nali (3), può a sua volta essere ulteriormente generalizzato, come mi propongo di far vedere.

1. Si tratta di provare che la (4) converge quasi dappertutto nell'intervallo (a, b) , se, per qualche valore intero, positivo di λ , converge la serie:

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{2^{\lambda}-1} C_n^2 + 2 \sum_{n=2^{\lambda}}^{3^{\lambda}-1} C_n^2 + \dots + p \sum_{n=p^{\lambda}}^{(p+1)^{\lambda}-1} C_n^2 + \dots$$

In tale ipotesi si consideri un numero positivo, comunque scelto, δ , ed un valore p_1 dell'indice p , tale da avere:

$$(6) \quad p_1 \sum_{n=p_1^{\lambda}}^{(p_1+1)^{\lambda}-1} C_n^2 + (p_1+1) \sum_{n=(p_1+1)^{\lambda}}^{(p_1+2)^{\lambda}-1} C_n^2 + \dots + \\ + (p_1+p) \sum_{n=(p_1+p)^{\lambda}}^{(p_1+p+1)^{\lambda}-1} C_n^2 + \dots \equiv \delta,$$

Il valore p_1 soddisfi inoltre alla condizione:

$$(7) \quad p_1 \equiv \binom{\lambda}{n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \lambda).$$

Pongasi dopo ciò:

$$S_q(x) = \sum_{n=1}^q C_n \Phi_n(x) \quad (q = 1, 2, \dots),$$

e si consideri l'insieme degl'indici:

$$p_1^{\lambda}, (p_1+1)^{\lambda}, \dots, r^{\lambda}-1 \quad (r > p_1).$$

Si ha:

$$(8) \quad \int_a^b [S_{r^{\lambda}-1}(x) - S_{q^{\lambda}-1}(x)]^2 dx = C_{q^{\lambda}}^2 + C_{q^{\lambda}+1}^2 + \dots + C_{r^{\lambda}-1}^2 \quad (q < r).$$

(3) Cfr. P. FATOU, *Séries trigonométriques et séries de Taylor* « Acta mathematica », T. 30 (1906), pp. 335-400; H. WEYL, *Ueber die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunctionen fortschreiten* « Mathematische Annalen », Bd. LXVII (1909), pp. 225-245. Cfr. anche C. SEVERINI, *Sulla convergenza delle serie di funzioni ortogonali* « Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania », Serie V, vol. VIII (1915), Memoria XX.

Dando a q successivamente i valori $p_1, p_1 + 1, \dots, r-1$, e sommando membro a membro le corrispondenti eguaglianze, che si traggono dalla (8), risulta:

$$(9) \quad \int_a^b \sum_{p_1}^{r-1} q \left[S_{r, \lambda_{-1}}(x) - S_{q, \lambda_{-1}}(x) \right]^2 dx = \\ = \sum_{p_1}^{(p_1+1)^{\lambda_{-1}-1}} C_n^2 + 2 \sum_{(p_1+1)^{\lambda}}^{(p_1+2)^{\lambda_{-1}-1}} C_n^2 + \dots + (r-p_1) \sum_{(r-1)^{\lambda}}^{r^{\lambda_{-1}-1}} C_n^2,$$

e quindi:

$$(10) \quad \int_a^b \sum_{p_1}^{r-1} q \left[S_{r, \lambda_{-1}}(x) - S_{q, \lambda_{-1}}(x) \right]^2 dx \leq p_1 \sum_{p_1}^{(p_1+1)^{\lambda_{-1}-1}} C_n^2 + \\ + (p_1+1) \sum_{(p_1+1)^{\lambda}}^{(p_1+2)^{\lambda_{-1}-1}} C_n^2 + \dots + (r-1) \sum_{(r-1)^{\lambda}}^{r^{\lambda_{-1}-1}} C_n^2.$$

Indicando con E_r l'insieme dei punti di (a, b) , in cui si ha:

$$\sum_{p_1}^{r-1} q \left[S_{r, \lambda_{-1}}(x) - S_{q, \lambda_{-1}}(x) \right]^2 \equiv \delta^2.$$

segue dalla (10), che deve essere:

$$m E_r \leq \frac{1}{\delta^2} \left[p_1 \sum_{p_1}^{(p_1+1)^{\lambda_{-1}-1}} C_n^2 + (p_1+1) \sum_{(p_1+1)^{\lambda}}^{(p_1+2)^{\lambda_{-1}-1}} C_n^2 + \dots + (r-1) \sum_{(r-1)^{\lambda}}^{r^{\lambda_{-1}-1}} C_n^2 \right],$$

ossia per la (6):

$$(11) \quad m E_r \leq \delta.$$

Se ne deduce che in un insieme F_r , contenente il complementare di E_r rispetto ad (a, b) , pel quale si ha:

$$m F_r \geq b - a - \delta,$$

risulta:

$$(12) \quad \left| S_{r, \lambda_{-1}}(x) - S_{q, \lambda_{-1}}(x) \right| \leq \delta \quad (p_1 \leq q \leq r-1)$$

e quindi:

$$(13) \quad \left| S_{q, \lambda_{-1}}(x) - S_{q_1, \lambda_{-1}}(x) \right| \leq 2\delta \quad \left(\begin{matrix} p_1 \leq q \leq r-1 \\ p_1 \leq q_1 \leq r-1 \end{matrix} \right).$$

S'indichi ora con:

$$r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$$

una successione crescente di valori di r e con:

$$(14) \quad F_{r_1}, F_{r_2}, \dots, F_{r_n}, \dots$$

i corrispondenti insiemi, determinati come è stato dianzi detto per F_r . Di questi insiemi (14) ognuno contiene il seguente, ed ha una misura maggiore od eguale a $b - a - \delta$. Detto F il prodotto degl'insiemi (14), risulta allora:

$$m F = \lim_{n \rightarrow \infty} m F_{r_n}$$

e quindi:

$$m F \geq b - a - \delta.$$

Nell'insieme F si ha:

$$(15) \quad \left| S_{q^{\lambda-1}}(x) - S_{q^{\lambda-1}}(x) \right| \leq 2\delta \quad \left(\begin{matrix} q \equiv p_1 \\ q_1 \equiv p_1 \end{matrix} \right).$$

2. Per un valore qualsivoglia dell'indice p , maggiore od uguale a p_1 , posto:

$$(16) \quad P_1 = \binom{\lambda}{1} p^{\lambda-2} + \binom{\lambda}{2} p^{\lambda-3} + \dots + \binom{\lambda}{\lambda-2} p + \binom{\lambda}{\lambda-1},$$

donde segue:

$$(17) \quad p^\lambda + P_1 p = (p+1)^\lambda - 1,$$

si considerino i seguenti gruppi d'indici:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & p^\lambda - 1, p^\lambda, p^\lambda + 1, \dots, p^\lambda + p - 1; & H_0^{(1)}, \\ & p^\lambda + p - 1, p^\lambda + p, p^\lambda + p + 1, \dots, p^\lambda + 2p - 1; & H_1^{(1)}, \\ & \dots, & \dots, \\ & p^\lambda + vp - 1, p^\lambda + vp, p^\lambda + vp + 1, \dots, p^\lambda + (v+1)p - 1; & H_v^{(1)}, \\ & \dots, & \dots, \\ & p^\lambda + (P_1 - 1)p - 1, p^\lambda + (P_1 - 1)p, p^\lambda + (P_1 - 1)p + 1, \dots, p^\lambda + P_1 p - 1; & H_{P_1-1}^{(1)}, \\ & p^\lambda + P_1 p - 1, p^\lambda + P_1 p; & H_{P_1}^{(1)}. \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Si ha:

$$\int_a^b \sum_{i=1}^p \left[S_{p^{\lambda}+vp-1}(x) - S_{p^{\lambda}+vp+q-1}(x) \right]^2 dx = p C_{p^{\lambda}+vp}^2 + \\ + (p-1) C_{p^{\lambda}+vp+1}^2 + \dots + C_{p^{\lambda}+(v+1)p-1}^2 \quad (v=0, 1, 2, \dots, P_1-1),$$

e quindi:

$$(19) \quad \int_a^b \sum_{i=1}^p \left[S_{p^{\lambda}+vp-1}(x) - S_{p^{\lambda}+vp+q-1}(x) \right]^2 dx \leq p \sum_{p^{\lambda}+vp}^{p^{\lambda}+(v+1)p-1} C_n^2 \\ (v=0, 1, 2, \dots, P_1-1).$$

Inoltre:

$$(20) \quad \int_a^b \left[S_{p^{\lambda}+P_1p-1}(x) - S_{p^{\lambda}+P_1p}(x) \right]^2 dx = C_{(p+1)^{\lambda}-1}^2.$$

Dalla (19) segue che l'insieme dei punti di (a, b) , in cui può essere:

$$\sum_{i=1}^p \left[S_{p^{\lambda}+vp-1}(x) - S_{p^{\lambda}+vp+q-1}(x) \right]^2 \geq \delta^2 \quad (v=0, 1, 2, \dots, P_1-1),$$

deve avere una misura minore od uguale a:

$$\frac{p}{\delta^2} \sum_{p^{\lambda}+vp}^{p^{\lambda}+(v+1)p-1} C_n^2 \quad (v=0, 1, 2, \dots, P_1-1),$$

il che significa che, in un insieme di punti di (a, b) , la cui misura è maggiore od uguale a:

$$b-a - \frac{p}{\delta^2} \sum_{p^{\lambda}+vp}^{p^{\lambda}+(v+1)p-1} C_n^2 \quad (v=0, 1, 2, \dots, P_1-1),$$

si ha:

$$\sum_{i=1}^p \left[S_{p^{\lambda}+vp-1}(x) - S_{p^{\lambda}+vp+q-1}(x) \right]^2 \leq \delta^2 \quad (v=0, 1, 2, \dots, P_1-1)$$

e quindi:

$$(21) \quad \left| S_{p^{\lambda}+vp-1}(x) - S_{p^{\lambda}+vp+q-1}(x) \right| \leq \delta \quad \left(\begin{matrix} v=0, 1, 2, \dots, P_1-1 \\ q=1, 2, \dots, p \end{matrix} \right).$$

Analogamente dalla (20) segue che l'insieme dei punti di (a, b) , in cui può essere:

$$\left[S_{p^{\lambda} + p_1 p - 1}(x) - S_{p^{\lambda} + p_1 p}(x) \right]^2 \equiv \delta^2$$

deve avere una misura minore od uguale ad:

$$\frac{1}{\delta^2} C_{(p+1)^{\lambda-1}}^2,$$

cioè che in un insieme di punti di (a, b) , la cui misura è maggiore od uguale a:

$$b - a - \frac{1}{\delta^2} C_{(p+1)^{\lambda-1}}^2,$$

risulta:

$$\left[S_{p^{\lambda} + p_1 p - 1}(x) - S_{p^{\lambda} + p_1 p}(x) \right]^2 \equiv \delta^2$$

e quindi:

$$(22) \quad \left| S_{p^{\lambda} + p_1 p - 1}(x) - S_{p^{\lambda} + p_1 p}(x) \right| \equiv \delta.$$

La (21) e la (22) conducono al risultato che in un insieme G_i di punti di (a, b) , la cui misura è maggiore od uguale a:

$$b - a - \frac{p}{\delta^2} \sum_{p^{\lambda}}^{(p+1)^{\lambda-1}} C_n^2,$$

deve aversi:

$$(23) \quad \left| S_q(x) - S_{q^{(1)}}(x) \right| \equiv \delta \quad (p^{\lambda} - 1 \equiv q \equiv (p+1)^{\lambda} - 1),$$

ove $q^{(1)}$ rappresenta il primo indice del gruppo:

$$H_v^{(1)} \quad (v = 0, 1, 2, \dots, p_1),$$

al quale appartiene q .

Matematica. — *I complessi quadratici di rette di S_4 .* Nota di BENIAMINO SEGRE, presentata dal Corrisp. GINO FANO.

In una Memoria di prossima pubblicazione studio i *complessi quadratici di rette di S_4* . Qui mi propongo di esporre i principali risultati a cui sono pervenuto ⁽¹⁾.

1. Un complesso quadratico di rette di S_4 generale, ha una *varietà singolare* X a 3 dimensioni, di 6° ordine e 30ª classe, luogo dei punti pei quali il cono del complesso ha una generatrice doppia. Questa varietà ha a sua volta una *curva doppia* x , di ordine 40 e genere 81, luogo dei punti di S_4 per cui il cono del complesso si spezza in 2 stelle ∞^2 .

La forma X ha inoltre una ∞^2 di *spazi tangenti doppi stazionari*, ed una ∞^2 di *spazi bitangenti*: la prima è di classe 120, la seconda di classe 220; quest'ultima si spezza in due ∞^2 , di classi 40, 180.

Detti *singolari* i piani di S_4 che segano il complesso secondo un fascio di rette da contarsi due volte, si ha che vi sono in S_4 ∞^3 piani singolari; ognuno di essi è *tritangente* la varietà singolare: *le rette singolari relative ai tre punti di contatto stanno nel piano stesso, e concorrono in un punto*.

Una retta singolare del complesso *tocca* la X nel relativo punto singolare, onde la sega ulteriormente in 4 punti: le rette singolari a questi relative stanno in *uno stesso spazio*, che è precisamente lo spazio singolare relativo alla retta prima considerata. A questa inoltre appartengono 4 piani singolari del complesso: essi stanno pure in quello spazio, ed il loro *birapporto* coincide con quello dei suddetti 4 punti.

Vi sono ∞^4 *stelle* ∞^2 di rette del complesso. I centri di queste stelle costituiscono la curva x doppia di X . Gli spazi di quelle stelle sono spazi *tritangenti* della X : essi costituiscono un insieme ∞^1 d'indice 80 e genere 161.

Si ha un numero finito, e pari a 40, di *piani rigati del complesso*. Ognuno di essi è 12-secante la curva x , e *tocca* X lungo una cubica piana. Esso è asse di un fascio d'iperpiani che sono *tritangenti* la forma X . Per ognuno dei 40 piani rigati del complesso passano 12 spazi *quadritangenti* della X .

2. Vi sono 42 rette singolari del complesso incidenti a *tre piani generici* di S_4 . Le ∞^2 rette singolari incidenti ad *un piano generico* costi-

(1) Alcuni di tali risultati ed alcune definizioni, su cui non mi soffermo per brevità, si hanno in particolare dalla mia Nota *Sui complessi algebrici di rette di S_n* « Rend. Acc. Lincei » (5) 33 (1924), p. 218.

tuiscono una V_3^{26} . Per un punto di S_4 passano generalmente 10 rette singolari del complesso. Le ∞^2 rette singolari che stanno in uno spazio, oppure sono incidenti ad una retta generica, costituiscono rispettivamente una rigata d'ordine 16 oppure 26.

Le rette singolari del complesso relative ai punti di una sezione piana od iperpiana di X , riempiono rispettivamente una V_2^{18} od una V_3^{22} . Le rette singolari relative agli spazi singolari del complesso che contengono un punto od una retta generica di S_4 , costituiscono rispettivamente una V_3^{10} od una V_2^{10} .

Si ha un numero finito di piani singolari del complesso giacenti in uno spazio assegnato, oppure incidenti a tre rette generiche di S_4 , e rispettivamente pari a 16 od a 56. Vi sono ∞^2 piani singolari che contengono un punto assegnato, oppure che sono incidenti lungo rette ad un piano fisso generico di S_4 , essi riempiono rispettivamente una V_3^{20} od una V_3^{16} .

3. Sia r una retta generica di S_4 . I coni del complesso relativi ai vari suoi punti costituiscono un sistema Σ irriducibile ∞^1 e d'indice 2: l'involuppo W di questo sistema si dirà la forma del complesso relativa ad r . W è il luogo dei punti di S_4 per cui il cono del complesso tocca r .

La forma W è del 4° ordine e 6° classe. Essa passa doppiamente per r ; un piano per questa retta la sega ulteriormente secondo la conica del complesso in esso contenuta. Su r vi sono 6 punti doppi bispaziali di W , che non sono altro che le traccie di X su r . W ha una ulteriore curva doppia nodale w , luogo dei centri dei fasci di rette del complesso, il cui piano passa per r . La curva w non ha punti comuni colla r , ed è dell'8° ordine e di genere 5.

La curva w si proietta doppiamente dalla retta r , e quindi secondo un cono T del 4° ordine. Questo cono tocca W ovunque la incontra, e quindi lungo una superficie τ dell'8° ordine. Questa superficie è rigata: le sue generatrici sono corde di w , ed inoltre sono incidenti ad r . Per ogni punto di questa retta escono 4 generatrici di τ , le quali sempre stanno in uno stesso spazio: tale spazio, al muoversi del punto sulla r varia attorno ad un piano fisso ρ , che si appoggia a τ lungo una quartica.

Vi sono 6 spazi tangenti di W che contengono un piano assegnato generico: i loro punti di contatto si proiettano da r secondo 6 piani di uno stesso cono quadrico. La W come involuppo d'iperpiani contiene semplicemente 6 stelle ∞^2 , i cui assi r_i sono incidenti ad r , e si appoggiano al piano ρ in 6 punti di una conica. La retta r come involuppo ∞^2 d'iperpiani è 4-pla per W ; per r vi sono ∞^1 spazi, costituenti un insieme d'indice 12 e genere 3, per cui due dei 4 punti di contatto con W coincidono: essi sono precisamente gli spazi tangenti del cono T . La forma W ha poi 6 altri sistemi ∞^1 d'indice 2 di spazi tangenti doppi, e nessuna singolarità ulteriore.

Il sistema Σ è contenuto in una rete di quadriche, la cui curva *Jacobiana* è spezzata nella retta r , nelle suddette 6 rette r_i , ed inoltre in una C_3 piana, appartenente al piano ρ ed appoggiata in un punto a ciascuna delle rette r_i . Il sistema dei piani di S_4 che sono *quadriseccanti* la curva w si spezza in due sistemi ∞^2 . L'uno è d'indice 6, ed è costituito da piani che si appoggiano a ρ in punti della suddetta C_3 ; l'altro è di indice 4, ed è costituito da piani che si appoggiano ad r ; i primi segano W secondo una coppia di coniche; i secondi toccano W lungo una conica. La curva w è proiettata quadruplamente da ciascuna delle rette r_i .

La forma W , e quindi pure w , T , e τ , è mutata in sè dalla omologia armonica di assi r e ρ . Essa poi tocca la curva x ovunque la incontra.

La figura studiata si determina univocamente dandone (ad arbitrio in S_4) ρ , ρ e 6 punti di w .

4. Sia π un piano generico di S_4 . Le rette del complesso che gli appartengono involupperanno una conica C_2 ; esso inoltre segnerà X secondo una curva C_6 .

L'involuppo V del sistema ∞^2 dei conici del complesso col vertice su π si dirà la forma del complesso relativa a π . V è il luogo dei punti di S_4 per cui il cono del complesso tocca π .

La forma V è del 6° ordine e 24ª classe. Essa passa doppiamente per π ; uno spazio per questo piano la sega ulteriormente secondo la superficie (di Kummer) singolare del complesso secondo cui lo spazio considerato sega il dato complesso. Le superficie che così si hanno si appoggiano a π secondo quartiche piane: queste curve costituiscono un sistema ∞^1 d'indice 2, il cui involuppo si spezza in C_2 e C_6 . Queste ultime curve sono doppie unispatiali per V .

Oltre a π la V ha una curva v doppia nodale, luogo dei punti di S_4 il cui cono del complesso tocca π lungo una retta. La v è del 28° ordine e genere 54; essa si appoggia a π nei 12 punti d'intersezione delle curve C_2 e C_6 . Vi sono 30 rette incidenti a π e quadriseccanti v ; tali rette stanno su V , ed anzi questa forma ha lungo ognuna di esse uno spazio tangente fisso.

V ha ∞^2 spazi tangenti doppi stazionari: tale ∞^2 è di classe 96 ed ha il fascio di spazi di asse π multiplo secondo 24. V ha inoltre una ∞^2 della 100ª classe di spazi bitangenti: questa ∞^2 è spezzata in tre diversi sistemi; uno di questi tre, della 36ª classe, è costituito dagli ∞^1 fasci d'iperpiani che hanno per assi i vari piani singolari del complesso che si appoggiano lungo rette a π . Questi ∞^1 piani si appoggiano a v in 6 punti di una conica lungo la quale essi toccano V . Il suddetto sistema ∞^2 ha il fascio di spazi di asse π multiplo secondo 16. Gli altri due sistemi ∞^2 di spazi bitangenti sono di classe 24 e 40.

La forma V tocca la X ovunque la incontra.

5. Una retta r del complesso contiene una, e generalmente una sola, coppia di punti i quali sono centri di due fasci di rette del complesso di uno stesso piano: i due punti si diranno *associati ad r* , e fra loro *coniugati*.

Se r descrive una *rigata* algebrica del complesso di *ordine m* , la coppia di punti che le è associata descrive generalmente una *curva d'ordine $6m$* .

Un *punto* generico di S_4 ha ∞^1 punti ad esso coniugati, distribuiti in due *quartiche razionali*, appoggiate alle 10 rette singolari del complesso che escono dal punto stesso. Se questo descrive una *retta* generica di S_4 , le due quartiche coniugate descrivono una *superficie del 48° ordine*, che si appoggia in 36 punti alla retta stessa. Del pari i punti coniugati ai punti di un *piano* generico riempiono una *forma del 48° ordine*, che sega il piano stesso in una curva spezzata in una parte del 36° ordine, luogo di punti autoconiugati, ed in una seconda del 12° ordine, luogo di coppie di punti coniugati distinti.

In S_4 vi sono ∞^3 *punti autoconiugati*: essi costituiscono una *forma del 36° ordine*, che passa semplicemente per i 40 piani rigati del complesso, ed ha la curva α multipla secondo il numero 6.

La forma suddetta *tocca* la X ovunque la incontra, e quindi lungo una V_2^{108} che ha 6-pla la curva α .

I punti autoconiugati sono i *centri* dei fasci di rette del complesso che appartengono ai piani singolari del medesimo.

Gli ∞^3 piani singolari del complesso si possono, ed in ∞^2 modi diversi, raggruppare in sistemi ∞^1 costituenti una *ipersuperficie sviluppabile*. Uno generico di quei piani sta in *tre* sistemi siffatti, in corrispondenza alle tre rette singolari del complesso che esso contiene. Gli spazi che toccano lungo di esso questi tre sistemi, sono gli *spazi singolari* relativi a quelle tre rette; le rispettive rette *caratteristiche* non sono altro che le rette che congiungono a due a due i punti singolari relativi a dette rette singolari.

Teoria dei numeri. — *Sulle equazioni indeterminate delle unità di norma negativa nei corpi quadratici reali.* Nota di GIOVANNI SANSONE presentata dal Socio L. BIANCHI.

I. È noto che l'esistenza di unità di norma negativa di un corpo quadratico reale implica la risolubilità in numeri interi reali delle equazioni di Pell-Fermat ⁽¹⁾.

$$(I) \ x^2 - Dy^2 = 1 \quad , \quad (II) \ x^2 - 2Dy^2 = -1 \quad , \quad (III) \ x^2 - Dy^2 = -4,$$

con D intero (reale) positivo dispari, privo di fattori quadrati.

(1) Cfr. L. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria dei numeri algebrici* (Bologna, Zanichelli, 1923), p. 172 e 211.

Alla questione di trovare la possibilità delle equazioni (I), (II), (III) dato D , risponde la teoria delle frazioni continue ⁽¹⁾. Dirichlet cercò di dedurre questa possibilità dall'esame dei fattori primi di D ⁽²⁾, ma eccettuato il caso che D sia primo ⁽³⁾, si hanno finora dei criteri soltanto sufficienti ⁽⁴⁾.

In questa Nota nei numeri 2 e 3 abbiamo dato dei criteri *necessari* per la risolubilità delle equazioni (I), (II), (III) dipendenti dal carattere quadratico dei fattori primi di primo grado in cui si decompone nel campo di Gauss il numero D .

In una prossima Nota esamineremo l'equazione $x^2 - 2Dy^2 = -1$ nel caso che D sia primo. Dirichlet trova che per i numeri D della forma $8n + 5$ l'equazione è sempre possibile, ma non è noto un criterio necessario e sufficiente per D primo della forma $8n + 1$ ⁽⁵⁾. Noi proveremo che per D primo della forma $16n + 9$, la condizione

$$\frac{D-1}{2} \equiv -1 \pmod{D}$$

data da Dirichlet soltanto come sufficiente è anche necessaria, mentre per i numeri primi D della forma $16n + 1$ abbiamo trovato come condizione necessaria che D abbia la forma $(1 + 8A)^2 + (8B)^2$.

Abbiamo chiusa questa seconda Nota con un teorema sul numero intero negativo di minor valore assoluto rappresentabile con la forma $(1, 0, -D)$. I risultati indicati rappresentano uno studio delle equazioni (I), (II), (III); mi sembrano però degni di nota in quanto sono presentate altre vie per l'esame delle equazioni stesse, e completano in qualche punto ricerche già note.

2. Consideriamo l'equazione

$$(I) \quad x^2 - Dy^2 = -1,$$

con D intero positivo dispari. Da essa si ha:

$$(1 + ix)(1 - ix) = Dy^2.$$

(1) Cfr. P. GAZZANIGA, *Gli elementi della teoria dei numeri* (Padova, Fr. Drucher, 1903), p. 155. L'equazione $x^2 - Dy^2 = -1$ ha soluzioni se la frazione continua periodica relativa allo sviluppo dell'irrazionale quadratico \sqrt{D} ha periodo dispari.

(2) L. DIRICHLET'S WERKE, I B., p. 221 e seg. [*Einige neue Sätze über unbestimmte Gleichungen*].

(3) Per D primo della forma $4n + 1$ la (I) è sempre possibile. [Cfr. DIRICHLET, loc. cit. (3), p. 225; oppure DIRICHLET, *Lezioni sulla teoria dei numeri* (trad. it. di A. FAIFOFER, Venezia, 1881), pp. 194-195. Cfr. anche SOMMER, *Introduction à la théorie des nombres algébriques* (trad. francese di A. LEVY, Paris, Hermann, 1911), p. 115].

(4) Dei criteri sufficienti per la (I) e (II) sono oltre che nella citata memoria di DIRICHLET in «F. Tano, *Journal V. Crelle*», 1889, *Sur quelques théorèmes de Dirichlet*.

(5) Cfr. DIRICHLET, loc. cit. (3), pp. 226-227.

I numeri interi $1 + ix$, $1 - ix$ non sono divisibili per 2 ed hanno tutti i loro divisori primi (nel campo di Gauss) di primo grado; ne segue che y è dispari (perciò x pari) e che D ed y hanno tutti i loro divisori primi reali della forma $4n + 1$. Effettuando la scomposizione nel campo di Gauss dei numeri D ed y in fattori primi (di primo grado) che supponiamo tutti scritti sotto forma primaria, ed osservando che avendosi x pari, $1 + ix$ e $1 - ix$ sono primi tra loro, e che se un fattore divide $1 + ix$ il suo coniugato divide $1 - ix$, potremo porre:

$$(1) \quad i^2 (1 + ix) = (a + bi) (\alpha - \beta i)^2, \quad \rho = 0, 1, 2, 3$$

con $D = a^2 + b^2$, $y = \alpha^2 + \beta^2$; a, b, α, β interi positivi o negativi, a ed α dispari, b e β pari. Siccome il primo membro della (1) deve avere come il secondo membro la forma primaria, avremo nella (1) $\rho = 0$, ed uguagliando le parti reali e i coefficienti dell'immaginario dei due membri si ha:

$$a(\alpha^2 - \beta^2) + 2b\alpha\beta = 1, \quad x = b(\alpha^2 - \beta^2) - 2a\alpha\beta.$$

In conclusione se $a^2 + b^2 = D$ indica una scomposizione del numero D in somma di due quadrati, con $a \equiv 1 \pmod{4}$ (b pari) e α, β è una soluzione intera dell'equazione

$$(2) \quad a(\alpha^2 - \beta^2) + 2b\alpha\beta = 1,$$

con $\alpha \equiv 1 \pmod{4}$ si soddisfa alla (1) con

$$x = b(\alpha^2 - \beta^2) - 2a\alpha\beta, \quad y = \alpha^2 + \beta^2.$$

Moltiplicando la (2) per a ($\neq 0$ perchè dispari) si ha:

$$(3) \quad (a\alpha + b\beta)^2 - D\beta^2 = a.$$

Per $\beta = 0$ si ha $a\alpha^2 = 1$, quindi $a = 1$, $\alpha = 1$, e posto $b = 2k$ perciò $D = 1 + 4k^2$ si ha che quando D abbia forma $D = 1 + 4k^2$, la (1) è possibile ed ha la soluzione minima positiva $x = 2|k|$, $y = 1$.

Per $\beta \neq 0$ dalla (3) si ha che condizione necessaria per la possibilità dell'equazione (1) è che il numero $D = a^2 + b^2$ [$a \equiv 1 \pmod{4}$] ammetta una decomposizione in somma di due quadrati tale che sia a residuo quadratico di tutti i fattori primi di D . (La condizione vale anche per $a = 1$).

Si ha da qui ad es. che l'equazione $x^2 - 205y^2 = -1$ non ha soluzioni.

È infatti $205 = 5 \times 41 = (-3)^2 + (\pm 14)^2 = (13)^2 + (\pm 6)^2$ e si ha $\left(\frac{-3}{5}\right) = -1$, $\left(\frac{13}{5}\right) = -1$.

Ma al criterio ora enunciato possiamo sostituirne un altro in cui compare il carattere quadratico nel campo di Gauss dei fattori primi (di primo grado) del numero D .

Per la possibilità dell'equazione (I) abbiamo detto che deve aver luogo l'equazione

$$(4) \quad 1 + ix = (a + bi)(\alpha - \beta i)^2, \quad D = (a + bi)(a - bi).$$

Sommando la (4) con la equazione ottenuta cambiandovi i in $-i$ si ha:

$$(5) \quad (1 + i)^2 = i(a + bi)(\alpha - \beta i)^2 + i(a - bi)(\alpha + \beta i)^2.$$

Se allora p_1, p_2, \dots, p_k indicano i fattori primi primari di primo grado del numero $a + ib$, se cioè è:

$$a + ib = p_1 p_2 \dots p_k,$$

[$D = p_1 p_1^o p_2 p_2^o \dots p_k p_k^o$; p_b^o indica il numero primo coniugato di p_b] dovrà essere per la (5)

$$(6) \quad \left[\frac{ip_1 p_2 \dots p_k}{p_b^o} \right] = 1 \quad (1) \quad \text{per} \quad h = 1, 2, \dots, k.$$

Si ha quindi: *condizione necessaria perchè l'equazione (I) abbia soluzioni è che esista una decomposizione del numero $D = p_1 p_1^o p_2 p_2^o \dots p_k p_k^o$ in fattori primi primari di primo grado per la quale valgano le (6).*

Così per l'esempio precedente è

$$D = 205 = (1 + 2i)(1 - 2i)(5 + 4i)(5 - 4i),$$

e avendosi

$$\left[\frac{i}{5 \pm 4i} \right] = 1, \quad \left[\frac{5 \pm 4i}{5 \mp 4i} \right] = 1, \quad \left[\frac{1 \pm 2i}{5 \pm 4i} \right] = -1$$

le (6) non risultano soddisfatte.

Il criterio ora enunciato permette di costruire quante si vogliono equazioni (I) con D prodotto di $2, 3, \dots$ fattori primi reali della forma $4n + 1$ le quali NON ammettono soluzioni intere.

Si scelgano infatti k numeri primi distinti di primo grado p_1, p_2, \dots, p_k di norma congruo 1 modulo 8, in guisa che si abbia:

$$\left[\frac{p_2}{p_1} \right] = \left[\frac{p_2}{p_1^o} \right] = 1, \quad \left[\frac{p_3}{p_1} \right] = \left[\frac{p_3}{p_1^o} \right] = 1, \dots, \left[\frac{p_{k-1}}{p_1} \right] = \left[\frac{p_{k-1}}{p_1^o} \right] = 1, \quad \left[\frac{p_k}{p_1} \right] = \left[\frac{p_k}{p_1^o} \right] = -1.$$

(1) Per il significato del simbolo $\left[\frac{m}{p} \right]$ relativo ai residui quadratici nel campo di Gauss, cfr. L. BIANCHI, loc. cit., p. 87 e seg.

Questa scelta può farsi in infiniti modi, ed avendosi:

$$\left[\frac{i}{p_1} \right] = (-1)^{\frac{N p_1 - 1}{4}} = 1, \quad \left[\frac{p_1}{p_1^0} \right] = \left(\frac{2}{N p_1} \right) = 1, \quad (1)$$

si avrà anche

$$\left[\frac{i p_1 p_2 \cdots p_k}{p_1^0} \right] = -1,$$

e questa relazione sussiste se ad uno qualunque dei fattori p_1, p_2, \dots, p_k si sostituisce il suo coniugato, come si ha dalle relazioni:

$$\left[\frac{p_2^0}{p_1^0} \right] = \left[\frac{p_2}{p_1} \right] = 1, \dots, \left[\frac{p_k^0}{p_1^0} \right] = \left[\frac{p_k}{p_1} \right] = -1.$$

Si ha da qui che non essendo soddisfatte per $b = 1$ le (6), l'equazione $x^2 - Dy^2 = -1$ con $D = p_1 p_2 \cdots p_k p_k^0$ è impossibile.

3. Quando sia da risolvere l'equazione

$$(II) \quad x^2 - 2Dy^2 = -1$$

con D intero positivo dispari, ovvero l'equazione

$$\frac{x+i}{1+i} \frac{x-i}{1-i} = Dy^2$$

si ha subito che D ed y hanno tutti i loro divisori primi reali della forma $4n+1$, ed essendo $\frac{x+i}{1+i}, \frac{x-i}{1-i}$ primi tra loro, con lo stesso ragionamento del numero precedente si prova che dovrà aversi

$$(7) \quad x+i = i^p (1+i) (a+bi) (\alpha-\beta i)^2, \quad D = a^2 + b^2, \quad y = \alpha^2 + \beta^2.$$

Nella (7) supponendo che $a+bi$ e $\alpha-\beta i$ abbiano la forma primaria dovrà porsi $p=0$ oppure $p=1$.

Dalla (7) si ha anche:

$$(a \pm b) (\alpha^2 - \beta^2) - 2(a \mp b) \alpha\beta = 1,$$

e varranno i segni superiori o gli inferiori secondo che sia $p=0$, $p=1$.

Moltiplicando quest'ultima per $a \pm b$ (non perchè dispari) si ha:

$$(8) \quad [(a \pm b) \alpha - (a \mp b) \beta]^2 - 2D\beta^2 = a \pm b,$$

Per $\beta = 0$ si ha $(a \pm b)^2 \alpha^2 = a \pm b$ quindi $a \pm b = 1$ e $\alpha = 1$. Sarà perciò $D = a^2 + (a - 1)^2$ e quando D abbia questa forma la (II) ha la soluzione minima positiva $x = |2a - 1|$, $y = 1$.

Per $\beta \neq 0$ dalla (8) si ha che per la possibilità dell'equazione (II) è necessario che il numero $D = a^2 + b^2$ [$a \equiv 1 \pmod{4}$, b pari] ammetta una decomposizione in somma di due quadrati tale che risulti uno almeno dei due numeri $a + b$, $a - b$ residuo quadratico di tutti i fattori primi di D . (La condizione vale anche per $a \pm b = 1$).

Si ha da qui ad es. che l'equazione $x^2 - 34y^2 = -1$ è impossibile; è infatti $34 = 2(1^2 + 4^2)$ ed anche $\left(\frac{1 \pm 4}{17}\right) = -1$.

Volendo come prima trovare una condizione per i fattori primi di D sottraggiamo dalla (7) la uguaglianza che si deduce da essa cambiando i in $-i$, si ha

$$(1 + i)^2 = i^p (1 + i) (a + bi) (\alpha - \beta i)^2 - \\ - i^p (1 - i) (a - bi) (\alpha + \beta i)^2, \quad p = 0, 1,$$

e da questa si ha che condizione necessaria perchè l'equazione (II) abbia soluzioni è che esista una decomposizione del numero $D = p_1 p_1^o p_2 p_2^o \dots p_k p_k^o$ in fattori primi primari di primo grado, per la quale valgano le relazioni:

$$\left[\frac{i^p (1 + i) p_1 p_2 \dots p_k}{p_h^o} \right] = 1, \text{ con } h = 1, 2, \dots, k \text{ e } p = 0 \text{ oppure } p = 1.$$

Per brevità omettiamo i risultati analoghi per l'equazione (III) i quali si ottengono osservando che essa può scriversi $(x + 2i)(x - 2i) = Dy^2$.

Meccanica. — *Sulla pressoflessione delle murature.* Nota di ANTONIO SIGNORINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA⁽¹⁾.

In una Nota apparsa di recente in questi Rendiconti⁽²⁾ ho iniziato una succinta trattazione di alcune questioni relative alla pressoflessione delle murature.

Nella Nota attuale continuo tale trattazione senza cambiare nè denominazioni nè notazioni: soltanto, le formole della Nota precedente verranno citate contrassegnandole con *.

1. Passando dalla teoria generale della pressoflessione delle murature alla teoria ordinaria — cioè, ponendoci nel caso particolare $p' \equiv \text{cost.} = E$, $t' \equiv 0$ —

(1) Presentata nella seduta del 1° novembre 1925.

(2) A. SIGNORINI, *Un teorema di esistenza ed unicità nella statica dei materiali poco resistenti a trazione*. [Questi « Rend. », vol. II, 1925, p. 401].

l_i viene a coincidere coll'asse neutro ⁽¹⁾ di O_i rispetto all'area P_{i, Ξ_i} [che non differisce da S se l_i non taglia S]: e la semplice infinità di punti O_i si identifica con quella che i tecnici sogliono prendere in esame per ridursi dal caso generale al caso simmetrico. Simultaneamente le equazioni che definiscono ω_i , Ξ_i e l'espressione di M_i assumono la forma semplificata

$$(1) \quad P = \omega_i (f_{0,0} \Xi_i - f_{1,0}), \quad 0 = f_{1,0} \Xi_i - f_{2,0}, \quad M_i = \omega_i (f_{0,1} \Xi_i - f_{1,1})$$

con

$$(2) \quad f_{m,n} = E \int_{P_{i, \Xi_i}} \xi_i^m \eta_i^n dS \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots).$$

Da queste relazioni segue

$$M_i f_{1,0} = \omega_i (f_{0,1} f_{2,0} - f_{1,1} f_{1,0})$$

e corrispondentemente la (11)* dà

$$\Delta_2 \frac{d(\omega_i \Xi_i)}{di} = 2 M_i f_{1,0} = 2 M_i S (\xi_i)_G.$$

D'altra parte per l'attuale Σ_i è $(\sigma_\chi)_0 = -E \omega_i \Xi_i$. Onde basta aver presenti l'andamento della funzione M_i e la circostanza che entro $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ è sempre $(\xi_i)_G > 0$, per concludere che «tra tutte le sollecitazioni Σ_i la «sollecitazione effettiva [cioè Σ_I] è caratterizzata dal render massima la «pressione unitaria in O ».

Se poi, sempre riferendoci alla Σ_i , poniamo

$$L_i = \frac{1}{2} \int_{P_{i, \Xi_i}} \varepsilon_\chi \sigma_\chi dS = \text{lavoro di deformazione},$$

si trova subito in base ad (1)*, (1), (2) che $2 L_i = P \Xi_i \omega_i$. Questo permette di dare all'ultimo enunciato una forma che fa pensare ad un celebre teorema di Menabrea: «tra tutte le sollecitazioni Σ_i la sollecitazione effettiva è caratterizzata dal render *massimo* il lavoro di deformazione».

(1) Conformemente ad una denominazione classica, data in generale un'area piana A ed un punto C del suo piano, chiamiamo «asse neutro di C rispetto ad A » la retta antipolare di C rispetto all'asse limite di A . Nel caso simmetrico l'equazione dell'asse neutro di O rispetto a $P_{0, \delta}$ è semplicemente $x = \text{cost.} = \int_{P_{0, \delta}} x^2 dS : \int_{P_{0, \delta}} x dS$. È inoltre ben noto che se C fosse un cilindro elastico [cioè, se al posto di ε] si avesse $\sigma_\chi = E \varepsilon_\chi$ anche per $\varepsilon_\chi > 0$] l non differirebbe mai dall'asse neutro di O rispetto ad S e varrebbero ancora le (1) pur di sostituire in (2) P_{i, Ξ_i} con S .

2. Introduciamo, per brevità, le notazioni $P_{\delta} = P_{0,\delta}$ ed

$$m_r(\delta) = \int_{P_{\delta}} x^r dS, \quad F_r(\delta) = \delta m_r(\delta) - m_{r+1}(\delta) \quad (r=0, 1, 2, \dots).$$

Ponendoci nel caso simmetrico della teoria ordinaria, la solita convenzione $y_G = 0$, $x_G > 0$ si traduce in $m_1(\beta_0) > 0$ e la determinazione dello stress si identifica [Cfr. (1), (2) ed (1)*] colla risoluzione dell'equazione $F_1(\Xi) = 0$, perchè

$$(3) \quad \omega = \frac{P}{EF_0(\Xi)}, \quad \sigma_x = E\varepsilon_x = -\frac{P(\Xi - x)}{F_0(\Xi)}.$$

Al variare di δ da 0 a $+\infty$ la $m_1(\delta)$ parte dal valore negativo $m_1(0)$ e cresce costantemente ed indefinitamente annullandosi per un certo valore di $\delta = B < \beta_0$: mentre la $F_1(\delta)$ [che ha per derivata $m_1(\delta)$] a partire dal valore $F_1(0) = -m_2(0) < 0$ decresce finchè $\delta < B$, per poi crescere anch'essa costantemente ed indefinitamente. Ciò conferma che l'equazione $F_1(\Xi) = 0$ ha una ed una sola radice positiva. Al tempo stesso viene messo in evidenza che ove sia $F_1(\beta_0) < 0$, cioè $\beta_0 < \frac{m_2(\beta_0)}{m_1(\beta_0)}$, risulta $\Xi > \beta_0$,

$m_r(\Xi) = m_r(\beta_0)$ e infine semplicemente $\Xi = \frac{m_2(\beta_0)}{m_1(\beta_0)}$. È il caso in cui l'asse neutro n_1 di O rispetto ad S non taglia S [Cfr. la nota (3) a pagina precedente] e quindi coincide coll'asse limite l .

3. Sempre restando nel caso simmetrico della teoria ordinaria, riprendiamo in esame l'equazione fondamentale $F_1(\Xi) = 0$ supponendo $F_1(\beta_0) > 0$.

Definiamo la successione $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s, \dots$ mediante la relazione ricorrente

$$(4) \quad \beta_s = \frac{m_2(\beta_{s-1})}{m_1(\beta_{s-1})} \quad (s = 1, 2, \dots):$$

ciò che equivale ⁽²⁾ a considerare la successione $n_1, n_2, \dots, n_s, \dots$ degli assi neutri di O rispetto alle aree $P_{\beta_0} \equiv S, P_{\beta_1}, \dots, P_{\beta_{s-1}}, \dots$. Risulterà

$$(5) \quad \beta_0 > \beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_s > \dots > B.$$

Infatti, essendo

$$m_1(\beta_0) > 0, \quad 0 < \beta_1 = \frac{m_2(\beta_0)}{m_1(\beta_0)} < \beta_0,$$

(1) In questo punto, come spesso nel seguito, interviene in modo essenziale il fatto che α_0 [come qualunque altro valore di α_i] è positivo.

(2) Cfr. la nota alla pag. precedente.

da

$$\beta_1 m_1(\beta_1) = m_2(\beta_1) + \int_{p_{\beta_0} - p_{\beta_1}} (x - \beta_1) x dS$$

si ricava

$$m_1(\beta_1) > 0, \quad 0 < \beta_2 = \frac{m_2(\beta_1)}{m_1(\beta_1)} < \beta_1:$$

e questo basta per convincersi che la (5) può esser completamente dimostrata per induzione.

Evidentemente la (5) implica che $\Xi = \lim_{s \rightarrow \infty} \beta_s$ e può leggersi affermando che « al variare di s da 0 ad ∞ l'asse neutro n_s si approssima costantemente ed indefinitamente all'asse limite ».

4. Riferendoci alle notazioni del numero precedente, poniamo

$$(6) \quad \sigma_s = \frac{P(\beta_s + \alpha_0)}{\beta_s m_0(\beta_{s-1}) - m_1(\beta_{s-1})}:$$

cioè rappresentiamo con σ_s il massimo della pressione unitaria in un cilindro elastico di sezione $P_{\beta_{s-1}}$ sollecitato a pressoflessione dal solito carico P applicato in $O^{(1)}$.

Derivando (4) e (6) rispetto a β_{s-1} si riconosce che da (5) segue

$$\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_s < \dots < \frac{P(\Xi + \alpha_0)}{\Xi m_0(\Xi) - m_1(\Xi)}.$$

Resta così stabilito che — quantunque sia $\beta_1 > \Xi$ — è $\sigma_1 < \frac{P(\Xi + \alpha_0)}{F_0(\Xi)}$: cioè [Cfr. (3)] che la sostituzione della teoria dell'elasticità alla teoria ordinaria delle murature — quantunque allontani l'asse limite dal centro di pressione — fa impiccolire il massimo della pressione unitaria (e quindi è da ritenersi nociva alla stabilità).

Questo teorema [che si trova enunciato con tutto rigore in qualcuno dei più recenti trattati di Scienza delle costruzioni] può considerarsi come un caso particolare delle conclusioni dei numeri seguenti.

5. Metteremo ora in evidenza che le verifiche di stabilità relative alla teoria generale possono essere ricondotte nell'ambito della teoria ordinaria in modo semplice e facendo intervenire soltanto elementi facilmente e sicuramente deducibili dalle prove di resistenza delle murature.

In base alle proprietà ammesse per la p , al variare di ε_x da 0 a $-\infty$ il rapporto $\frac{p[-\varepsilon_x]}{-\varepsilon_x}$ costantemente desce da E_0 ad E_∞ : in partico-

(1) Cfr. la nota a pag. 485.

lare, detto E_k il valore assunto da tale rapporto quando $p[-\varepsilon_\lambda] = k$, finchè $p[-\varepsilon_\lambda] \leq k$, si ha

$$(7) \quad E_k \leq \frac{p[-\varepsilon_\lambda]}{-\varepsilon_\lambda} \leq E_0.$$

Poniamo, nel caso simmetrico e chiamiamo S^* la sezione in cui si trasforma la sezione effettiva quando, senza distruggere la simmetria rispetto ad x , si accorcino nel rapporto $\rho = E_k : E_0$ tutte le corde di S parallele ad y corrispondenti a valori negativi di x [cioè, situate rispetto ad y dalla banda opposta di G]. Inoltre denominiamo problema ausiliare quello che corrisponde all'applicazione della teoria ordinaria alla sezione S^* sollecitata in O dal solito carico P : lasciando naturalmente la denominazione di problema effettivo all'applicazione della teoria generale alla sezione e sollecitazione effettiva.

Sussiste allora il

Teorema di confronto. «Basta che sia soddisfatta la condizione di stabilità nel problema ausiliare perchè lo stesso si verifichi nel problema «effettivo».

6. Nel problema ausiliare - ove si contrassegnino con $*$ quei suoi elementi che differiscono dai loro corrispondenti nel problema effettivo - risulta $m_i^*(\beta_0) > m_i(\beta_0) > 0$ e l'equazione fondamentale si scrive [Cfr. n. 2]

$$(8) \quad 0 = F_i^*(\Xi^*);$$

mentre la condizione di stabilità [Cfr. ζ)] assume la forma

$$(9) \quad k \geq \frac{P(\Xi^* + \alpha_0)}{F_0^*(\Xi^*)}.$$

Invece per il problema effettivo si ha

$$(10) \quad P = F_{0,0}(0, \omega, \Xi) \quad , \quad 0 = F_{1,0}(0, \omega, \Xi)$$

e, come condizione di stabilità [Cfr. ζ)]_g

$$(11) \quad k \geq p[\omega(\Xi + \alpha_0)].$$

Il teorema di confronto può dunque enunciarsi affermando che, se la (9) è soddisfatta dal valore di Ξ^* definito da (8), necessariamente la (11) è soddisfatta dai valori di ω e Ξ definiti dalle (10).

7. Per dimostrare il teorema di confronto procediamo per assurdo, ammettendo che, pur essendo verificata la (9), nel problema effettivo risulti

$$(12) \quad k = p[\omega(\Xi + \alpha_0)]$$

in corrispondenza ad una grandezza del carico minore di quella assegnata: grandezza che seguiranno a rappresentare con P , mantenendo in corrispondenza ad essa tutte le notazioni già introdotte.

Dall'ipotesi (12) segue che per ogni valore di x in $(-\alpha_0, \Xi)$ è [Cfr. (7)]

$$(13) \quad E_0 \cong \frac{p[\omega(\Xi - x)]}{\omega(\Xi - x)} \cong E_k = \frac{k}{\omega(\Xi + \alpha_0)}.$$

In base a questo ed all'essere la t essenzialmente positiva, scritta esplicitamente la (10)₂ si riconosce che da essa discende $0 < F_1^*(\Xi)$, cioè [Cfr. ancora n. 2]

$$(14) \quad \Xi > \Xi^*.$$

8. Posto

$$\psi(\delta) = \frac{\delta(\delta + \alpha_0)}{\int_{P_\delta^*} (\delta - x)^2 dS^*},$$

moltiplichiamo la (10)₁ per Ξ e successivamente sottraiamo da essa membro a membro la (10)₂: otterremo un'equazione che [in base a (13) ed a $t > 0$] dà

$$(15) \quad k < P\psi(\Xi).$$

D'altra parte

$$\psi'(\delta) \left\{ \int_{P_\delta^*} (\delta - x)^2 dS^* \right\}^2 = -2\delta F_1^*(\delta) - \alpha_0 \left\{ \delta^2 m_0^*(\delta) - m_2^*(\delta) \right\},$$

mentre per $\delta > \Xi^*$ non soltanto è

$$0 < F_1^*(\delta) = \delta m_1^*(\delta) - m_2^*(\delta),$$

ma anche

$$[m_2^*(\delta)]^2 < \delta^2 [m_1^*(\delta)]^2 < \delta^2 m_0^*(\delta) m_2^*(\delta).$$

Vuol dire che per $\delta > \Xi^*$ è $\psi'(\delta) < 0$: onde [Cfr. (14) e (15)] $\psi(\Xi) < \psi(\Xi^*)$ e

$$k < P\psi(\Xi^*) = \frac{P\Xi^*(\Xi^* + \alpha_0)}{\Xi^* F_0^*(\Xi^*) - F_1^*(\Xi^*)} = \frac{P(\Xi^* + \alpha_0)}{F_0^*(\Xi^*)},$$

ciò che è in contrasto con (9), c. d. d.

Sismologia. — *Sulla teoria delle Onde Sismiche del Somigliana.* Nota del Dr. ARNALDO BELLUIGI, presentata dal Corrispondente L. PALAZZO.

Nelle sue classiche memorie « Sulla propagazione delle onde sismiche (Lincei, 1917, 1918 vol. XXVI, XXVII) il prof. Somigliana considera il caso che le oscillazioni sismiche (caso più generale di onde piane), si propagino in un suolo piano illimitato e infinitamente profondo. Le componenti del vettore rappresentante la vibrazione sismica (una longitudinale, irrotazionale, condensazionale, primaria, P; due trasversali, distorsionali, trasversali, equivoluminali, secondarie, S) sono funzioni arbitrarie e distinte di argomenti lineari. La longitudinale è l'onda P oppure la P normale o P_n del Mohorovicic, le due trasversali S sono quelle che il Knott chiama, particolarmente, quando sono superficiali, SH e SV. In ogni modo sia le P o le P_n le S o le SH e le SV, tutti questi tipi d'onde sismiche trovano il loro riscontro nelle osservazioni sperimentali o sismografiche. La vibrazione sismica può dare origine però, alle seguenti successioni d'onde:

$$(P, P_n, SH, SV, L) \quad ; \quad (P, P_n, L, SH, SV) \quad ; \quad P_n, P, L, SH, SV) \quad , \\ (P_n, P, SH, SV, L).$$

Ci proponiamo di giustificare tali successioni d'onde, e, particolarmente, l'esistenza di vari tipi di onde L, il carattere di propagazione discontinua delle L, l'anticipo delle L, in qualche caso, rispetto alle S.

Nessun altro modello meccanico, all'infuori di quello del Somigliana, può servire all'intento: il modello meccanico più in uso nei trattati moderni di sismologia, tipo Jeffreys, oltre essere criticabile come mero modello fisico, non perviene che a spiegare le onde di Rayleigh, onde la cui esistenza è facile dimostrare per via analitica (es.: metodo Rayleigh), ma è difficile raffigurare meccanicamente. Il modello meccanico del Somigliana è il seguente: una coppia d'onde piane (una longitudinale, l'altra trasversale), ad angoli d'emergenza θ_a e θ_b tali che le velocità superficiali delle due onde risultino identiche. Poichè per tale coppia d'onde le componenti della tensione elastica relativa a qualsiasi elemento piano della superficie libera debbono essere nulle, si trova una relazione caratteristica tra le due direzioni di propagazione delle onde associate:

$$4 \mu \alpha_1 \alpha_2 \gamma_1 \gamma_2 + (\lambda \alpha_1^2 + (\lambda + 2 \mu) \gamma_1^2) (\gamma_2^2 - \alpha_2^2) = 0 \dots\dots (I)$$

dove:

$$\frac{\gamma_1}{\alpha_1} = \operatorname{tg} \theta_a \text{ e } \theta_a \text{ è l'angolo d'emergenza dell'onda longitudinale,}$$

$$\frac{\gamma_2}{\alpha_2} = \operatorname{tg} \theta_b \text{ e } \theta_b \text{ è l'angolo d'emergenza dell'onda trasversale associata,}$$

λ e μ sono le note costanti di Lamé.

Indicando con ρ la densità del mezzo di propagazione delle onde, poichè le due onde associate formano un treno di onde a velocità costante V , si ha:

$$\frac{\gamma_1}{\alpha_1} = \frac{\rho V^2}{\lambda + 2\mu} - 1 \quad ; \quad \frac{\gamma_2}{\alpha_2} = \frac{\rho V^2}{\mu} - 1 \dots\dots\dots (II)$$

Eliminando nella (I) i rapporti $\frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \frac{\gamma_2}{\alpha_2}$ dati dalle (2), si perviene ad un'equazione in V , equazione che coincide con quella a cui è giunto Lord Rayleigh nella determinazione della velocità di propagazione delle onde lente, equazione riducibile, com'è noto, al terzo grado. Indicando con a e b le costanti del mezzo (a è la velocità di propagazione delle P , b è la velocità di propagazione delle S) $a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$, $b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, si ha per V l'equazione:

$$\left(\frac{V^2}{b^2} - 2\right)^4 - 16 \left(\frac{V^2}{a^2} - 1\right) \left(\frac{V^2}{b^2} - 1\right) = 0 \dots\dots\dots (III)$$

In ciò si riassume la parte essenziale e originale degli studi del Somigliana: la concezione di un modello meccanico che conduce alla formula (III), concezione che ci illumina inoltre sulla genesi, sia pure ipotetica, delle onde superficiali.

Associamenti in coppia, d'onde piane di diverso tipo, soddisfacenti così alle condizioni:

$$\frac{\gamma_1}{\alpha_1} = \frac{\gamma_2}{\alpha_2} = \frac{\rho V^2}{\mu} - 1$$

oppure alle altre:

$$\frac{\gamma_1}{\alpha_1} = \frac{\gamma_2}{\alpha_2} = \frac{\rho V^2}{\lambda + 2\mu} - 1$$

avrebbero dato per risultato un'equazione di ottavo grado in V , simile in tutto alla (III), ma non riducibile, com'è facile intuire o dimostrare, al terzo grado. Cosicchè l'onda associata, che soddisfa all'equazione che potremmo chiamare di Rayleigh, non può essere che trasversale-longitudinale,

ad angoli d'emergenza convenientemente calcolati. Questo risultato positivo della teoria del Somigliana rimane tale, qualunque siano le conseguenze che si possano trarre dalla discussione della (III).

È evidente infatti che, per la speciale impostazione del problema delle onde superficiali qui enunciata, non possiamo attenderci, dalla discussione della (III), conseguenze identiche a quelle ottenute dalla discussione della stessa (III), dal Rayleigh o dal Lamb, o dal Nakano. Il Galitzin, ad esempio, sulle traccie del Rayleigh imponendo all'equazioni differenziali fondamentali dell'elasticità la soluzione:

$$u = Ae^{\sigma} \quad , \quad v = Be^{\sigma} \quad , \quad w = ce^{\sigma} \quad \text{per} \quad \sigma = -qz + i(fx + gy - pt)$$

dove A, B, c, q, f, g, p, sono costanti che si possono determinare, giunge all'equazione per le velocità:

$$\eta^3 + 8\eta^2 + \frac{56}{3}\eta - \frac{32}{3} = 0 \dots\dots\dots (IV)$$

dove $\eta = \frac{\rho}{\mu} V^2$, equazione identica a quella ricavabile dalla (III), ma le tre radici reali e positive della (IV): $\eta_1 = 4$, $\eta_2 = 3.1547$, $\eta_3 = 0.8453$ hanno un valore nell'impostazione galitziniana, ne hanno un altro nell'impostazione del Somigliana. In quella solo la radice η_3 soddisfa al problema, e può condurre a soluzioni reali, mentre le altre due radici η_1 e η_2 non hanno alcun significato fisico; in questa la radice η_3 può condurre a soluzioni reali, per quanto implichi la considerazione *ab initio* di angoli d'emergenza immaginari⁽¹⁾; ma le altre due radici η_1 e η_2 hanno un ben determinato significato fisico. Di qui si rileva subito la maggior generalità della teoria del Somigliana su quella del Galitzin, e, potremmo dire, su tutte le teorie simili finora esistenti. L'onda di Rayleigh così analiticamente si può esprimere col modello Somigliana:

$$u_1 = \frac{1}{2\alpha'_1 i} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\eta_3}} \cos k(x - tb\sqrt{\eta_3})$$

$$w_1 = \frac{i}{2\alpha'_1} \sin k(x - tb\sqrt{\eta_3})$$

$$u_2 = \frac{i}{\alpha'_2} \frac{\sqrt{1 - \eta_3}}{2 - \eta_3} \cos k(x - tb\sqrt{\eta_3})$$

$$w_2 = -\frac{1}{\alpha'_2} \frac{i}{2 - \eta_3} \sin k(x - tb\sqrt{\eta_3})$$

$$(1) \quad \eta_3 < 1 \quad , \quad \operatorname{tg}^2 \theta_a = \frac{b^2}{a^2} \eta_3 - 1 = (-1) \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \eta_3 \right) \\ \operatorname{tg}^2 \theta_b = \eta_3 - 1 = (-1) (1 - \eta_3).$$

dove α'_1 e α'_2 sono costanti immaginarie: $\alpha'_1 = i\alpha_1$, $\alpha'_2 = i\alpha_2$. Si avrà:

$$\frac{1}{2\alpha'_1 i} = -\frac{1}{2\alpha_1} \quad ; \quad \frac{i}{2\alpha'_1} = \frac{1}{2\alpha_1} \quad ; \quad \frac{i}{\alpha'_2} = \frac{1}{\alpha_2} \quad ; \quad -\frac{i}{\alpha'_2} = -\frac{1}{\alpha_2}$$

per cui:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{2\alpha_1} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \eta_3}} \cos k(x - tb\sqrt{\eta_3}) \\ w_1 &= \frac{1}{2\alpha_1} \sin k(x - tb\sqrt{\eta_3}) \\ u_2 &= \frac{1}{\alpha_2} \frac{\sqrt{1 - \eta_3}}{\sqrt{(2 - \eta_3)^2}} \cos k(x - tb\sqrt{\eta_3}) \\ w_2 &= -\frac{1}{\alpha_2} \frac{1}{2 - \eta_3} \sin k(x - tb\sqrt{\eta_3}) \end{aligned} \right\} \dots\dots (V)$$

ovvero:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_1 + u_2 = \left[-\frac{1}{2\alpha_1} (0.7182)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\alpha_2} (0.1160)^{\frac{1}{2}} \right] \cos k(x - tb\sqrt{\eta_3}) \\ w &= w_1 + w_2 = \left(\frac{1}{2\alpha_1} - 0.866 \frac{1}{\alpha_2} \right) \sin k(x - tb\sqrt{\eta_3}) \end{aligned} \right\} (VI)$$

Secondo il Walker:

$$\left. \begin{aligned} u &= 0.4227 \sin k(x - ct) \\ w &= 0.6222 \cos k(x - ct) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (VII)$$

Si possono determinare numericamente α_1 e α_2 tenendo conto delle (VI) e delle (VII): α_1 e α_2 risulteranno, evidentemente, reali.

Tale deduzione delle componenti dell'onda di Rayleigh, che potrebbe sembrare da un punto di vista meccanico alquanto paradossale, (si parte da angoli immaginari e si trovano angoli reali), è analoga a tutte le altre del genere: si parta da piani d'onda immaginari, da onde armoniche, oppure da angoli d'emergenza immaginari. L'immaginario nelle assunzioni ha un significato in quanto mero strumento analitico. Gli angoli d'emergenza delle onde di Rayleigh sono reali, e sono quelli che implicitamente compaiono nelle (VI) o nelle (IV).

La teoria del Somigliana dà inoltre ragione di tipi nuovi (almeno analiticamente) di onde superficiali, caratterizzati sempre da una velocità costante di propagazione.

Tali tipi corrispondono alle radici η_1 e η_2 dell'equazione (IV).

Per $\eta_1 = 4$, $\theta_a = \pm 30^\circ$, $\theta_b = \pm 60^\circ$, $V_1 = 2b$

Per $\eta_2 = 3.1547$, $\theta_a = \pm 12^\circ.47'$, $\theta_b = \pm 55^\circ.44'$, $V_2 = 1.776b$.

È evidente però che la realizzazione delle onde associate è solo possibile nella fase di regime delle vibrazioni sismiche. Anzi è precisamente questo fatto che può spiegare, specie nei casi di η_1 e di η_2 , il loro ritardo rispetto alle P e specialmente rispetto alle S, ritardo che è possibile anche calcolare così: sia x la profondità dell'ipocentro, V_p la vel. delle P, V_s la vel. delle S, V_a la vel. delle onde associate, d la distanza di un osservatorio sismico dall'epicentro o dal punto di emergenza che si prende in esame, x' la distanza residuale che deve percorrere un'onda trasversale per raggiungere, alla superficie del suolo, l'onda longitudinale. L'onda associata, per raggiungere allora il sismografo dell'osservatorio, impiegherà il tempo $\frac{x}{V_p} + \frac{x'}{V_s} + \frac{d}{V_a}$ (tempo minimo dato il percorso). Non è detto però che le condizioni dell'associazione, volute dalla relazione $V_p = V_s$, si verifichino dopo il tempo minimo $\frac{x}{V_p} + \frac{x'}{V_s} + \frac{d}{V_a}$: esse potrebbero verificarsi, ad esempio, dopo il tempo: $n \frac{x}{V_p} + \frac{x'}{V_s} + \frac{d}{V_a}$, dove n è un coefficiente che indica il numero dei percorsi $\frac{x}{V_p}$ necessari perchè l'onda P realizzi la condizione d'emergenza per associarsi con la S.

È chiaro che, in generale, $\frac{x}{V_p} + \frac{x'}{V_s} + \frac{d}{V_a} \neq \frac{x}{V_p} + \frac{d}{V_p}$, anche se $x = x' = 0$, dove $V_a = V_1 = 2b$ oppure $V_a = V_2 = 1.776b$ (b è la velocità delle onde S). Se le condizioni normali della propagazione sismica sono: tempo di propagazione dell'onda associata $= n \frac{x}{V_p} + \frac{x'}{V_s} + \frac{d}{2b}$, e x piuttosto non trascurabile rispetto a d , allora si può avere, come infatti si ha nelle registrazioni sismografiche ordinarie:

$$n \frac{x}{V_p} + \frac{x'}{V_s} + \frac{d}{2b} > \frac{d}{V_p} \quad ; \quad n \frac{x}{V_p} + \frac{x'}{V_p} + \frac{d}{2b} > \frac{d}{V_s} \text{ pur essendo } V_a > V_s.$$

Tali tipi d'onde lente arrivano dunque necessariamente dopo le P, alcune con velocità $2b$, altre con velocità $1.776b$; non necessariamente dopo le S.

Poichè infatti ad una certa distanza dell'epicentro, o per piccole profondità del focolare sismico, può darsi facilmente che sia:

$$\frac{x}{V_p} + \frac{x'}{V_s} + \frac{d}{2b} < \frac{x'}{b} + \frac{d}{b},$$

questo fatto spiegherebbe l'apparente anomalia, confermata spessissimo dal-

l'esperienza, che le onde superficiali arrivano subito dopo le P e *prima delle S* ⁽¹⁾. In generale, quando la distanza epicentrale è notevole rispetto alla profondità del focolare sismico, è facile registrare onde lente, (che non sono necessariamente quelle del Rayleigh), a velocità vibratoria $> V_s$, e a velocità complessiva $< V_s$. Tale riconoscimento sarebbe difficile in altre circostanze perchè, arrivando le onde associate dopo le S, sebbene con vel. maggiore di b epperò con periodo rapido, potrebbero non distinguersi da quest'ultime. Il carattere di arrivo intermittente delle onde superficiali risulta chiaro: infatti le condizioni di interdipendenza tra θ_a e θ_b , affinché si formino le 'onde associate, si verificano nella realtà con discontinuità. Si potrebbe obiettare, a questo punto, che, poichè le P, di carattere rapido, possono smorzarsi in brevissimo tempo, potrebbero allora mancare per determinare l'accoppiamento con le S. Senonchè anche le P smorzate, mercè l'associazione con le S, formando un complesso di energia maggiore che non quella della mere P smorzate, possono essere registrate come onde superficiali. Comunque con la teoria del Somigliana si riesce ad indicare *nuovi tipi di onde superficiali*: treni d'onde associate, treni d'onda che talvolta appaiono nei sismogrammi, e che possono ritardare, in vario modo, rispetto alle P e alle S, pur possedendo una vel. costante di propagazione, maggiore della vel. delle onde S. Le altre teorie delle onde superficiali finora conosciute non riescono a dar ragione di tali treni d'onda, la cui esistenza è confermata indiscutibilmente dai fatti sperimentali.

Chimica-fisica. — *Struttura cristallina degli idrati di cadmio e di nichel.* Nota di G. NATTA ⁽²⁾ presentata dal Socio G. BRUNI ⁽³⁾.

Era nota sinora con certezza la struttura cristallina di pochissimi idrati metallici, malgrado la semplice costituzione della loro molecola e la loro importanza: questo è dovuto alla tendenza che hanno molti di essi a presentarsi sotto forma di polveri o precipitati finissimi finora da molti ritenuti amorfi. Si comprende quindi quanto sia utile per lo studio della loro intima struttura l'analisi röntgenografica con il metodo delle polveri.

Possiamo dividere gli idrati dei metalli bivalenti in due categorie aventi rispettivamente simmetria rombica e romboedrica. Alla prima appartiene l'idrato di zinco e forse quello di cobalto, ⁽⁴⁾ alla seconda gli idrati di man-

(1) VICENTINI, *Osservazioni sismiche* (« Atti della R. Acc. dei Fisiocratici », ser. 4^a, Vol. V, Siena 1894); AGAMENNONE, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », 1909 (2 note); AUGENHEISTER, *Seismische Registrierungen in Göttingen* in « Jahre », 1905.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale del R. Politecnico di Milano.

(3) Presentato nella seduta del 1° novembre 1925.

(4) DE SCHULTEN, « Compt. Rend. », 109, 266.

ganeso, di ferro bivalente, ⁽¹⁾ di magnesio e di calcio ⁽²⁾. Nulla si conosce sulla struttura degli idrati degli altri metalli bivalenti. Mediante i raggi X non risulta che siano stati studiati che gli idrati di magnesio ⁽³⁾, di manganese ⁽⁴⁾ e di calcio ⁽⁵⁾.

Aminoff dall'analisi con il metodo di Laue ⁽⁶⁾ e con quello delle polveri ⁽⁷⁾ della brucite e della pirocroite, conferma i valori delle costanti cristallografiche già note precedentemente e ne stabilisce la struttura atomica disponendo una molecola in una cella ortorombica di 120°. Per l'idrato di magnesio i valori trovati da G. R. Levi e A. Ferrari coincidono con quelli di Aminoff; per l'idrato di calcio G. R. Levi ha trovato una struttura analoga con un rapporto assiale 1.40, identico a quello dell'idrato di manganese. Nel presente lavoro viene esaminata la struttura degli idrati di nichel e di cadmio: del primo la cristallografia non fornisce nessuna indicazione, del secondo tratta soltanto De Schulten ⁽⁸⁾, che ha potuto, in determinate condizioni, ottenerne delle squamette uniassiche esagonali.

Ho fotografato con il metodo di Debye e Scherrer dei preparati cilindrici di 1 mm. di diametro di idrati puri di Kahlbaum, e precisamente l'idrato di nichel con anticatodi di nichel e di rame e l'idrato di cadmio con anticatodi di ferro e di rame, usando tubi Coolidge ad elettroni, alimentati per circa un'ora con tensioni da 30 a 35,000 Volts ed una corrente di 0.010 Amp. I fotogrammi ottenuti con diversi anticatodi si accordano tra loro per le distanze reticolari dei vari piani riflettenti e, tenendo conto delle variazioni dell'angolo di riflessione in funzione della lunghezza d'onda, anche per le intensità delle linee.

Tutte le linee presenti nei quattro fotogrammi si sono potute ordinare a mezzo del diagramma di Hull costruito per reticoli esagonali, ed, oltre al rapporto parametrico c/a dei due idrati studiati, si sono stabiliti gli indici di tutti i piani che hanno dato riflessioni. Per il calcolo del lato a della cella elementare si è applicata la formula:

$$a = d_{hkl} \sqrt{\frac{2}{3} (h^2 + k^2 + hk) \frac{1^2}{(c/a)^2}}$$

dove d_{hkl} sono le distanze reticolari tra i piani di indici $h k l$. Supposta una struttura del tipo della brucite, ho calcolato le intensità delle singole riflessioni colle due formule $I = kS$ e $I = kS^2$. La prima è stata recente-

(1) P. GROTH, « Chemische Crystallographie », 1^o, V, p. 114-118.

(2) G. R. LEVI, « Giorn. Chim. Ind. ed Appl. », 6^o-333 (luglio 1925).

(3) G. R. LEVI e A. FERRARI, « Rend. Lincei », 33^o-5, 100 (1^o sem. 1921).

(4) G. AMINOFF, « Geol. För. Förh. », 41, 407.

(5) Loc. cit.

(6) G. AMINOFF, « Geol. För. Förh. », 41, 534.

(7) G. AMINOFF, « Zeit. für Krist. », 56, 506.

(8) DE SCHULTEN, « Ausz. f. Kryst. », 12, 641; 15, 649.

mente proposta da Ewald, ⁽¹⁾ la seconda è quella data da Debye e generalmente usata. Ho indicato con k l'espressione:

$$\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \cdot \frac{M}{Q \cos \theta/2}$$

dove $\theta/2$ è l'angolo riflesso, M è il numero dei piani cooperanti alla riflessione, ed è per il sistema romboidrico:

$Q = 1,333 (h^2 + k^2 + hk) l^2 a^2 c^2$. Il fattore di struttura è dato da:

$$S = \sum_s N_s e^{2\pi i (hx_s + ky_s + lz_s)}$$

Tali sommatorie sono estese a tutti gli atomi della cella elementare, x, y, z , sono le coordinate di tali atomi e N_s è il numero degli elettroni esterni.

Ho supposto la posizione degli atomi definita dai parametri seguenti:

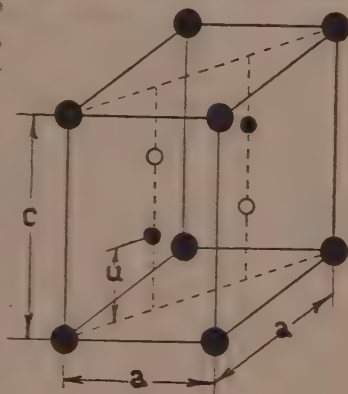
Mg	0	0	0
O	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	u
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-u$

Dato il minimo potere diffusivo degli atomi di idrogeno, essi non sono stati introdotti nel calcolo, ma probabilmente la loro posizione è definita dai parametri: $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, v)$, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, v)$.

Aminoff per la brucite ⁽²⁾ ha stabilito che u ha un valore molto vicino a $\frac{2}{9}$ e non superiore a $\frac{1}{3}$.

In base ai diametri atomici probabili degli ioni Cd e Ni la posizione degli atomi di ossigeno può variare entro limiti abbastanza larghi e non precisabili, non conoscendo il diametro dell'ione idrogeno; ma i parametri $u = \frac{1}{3}$ e $v = \frac{2}{3}$ sono quelli che corrispondono ad una disposizione più regolare degli atomi. Ho calcolato le intensità per $u = \frac{1}{3}$ e per $u = \frac{1}{4}$ (valore molto vicino ai $\frac{2}{9}$ stabilito da Aminoff per l'idrato di magnesio), l'accordo tra le intensità osservate e quelle calcolate è buono.

Una determinazione più precisa di u non è possibile con il metodo delle polveri, e d'altra parte gli idrati studiati non presentano mai dei cristalli di dimensioni sufficienti per essere studiati con i metodi di Laue e del cristallo rotante.



● Ni ● O ○ H

Data la incertezza del parametro u , non è possibile dare una preferenza all'una piuttosto che all'altra delle formule proposte da Ewald e da Debye.

(1) «Physik. Zeit.», 26, (1925), 29.

(2) Loc. cit.

Idrato di Cadmio. - I valori esposti nella tabella si riferiscono ad un fotogramma ottenuto con tubo ad anticatodo di ferro, che emette radiazioni di lunghezza d'onda λ (K_{α}) = 1.934 (media della doppietta) e λ (K_{β}) = 1.754. Nella tabella sono dati per le linee, ordinate secondo gli angoli di riflessione crescenti $\theta/2$, i seni di tali angoli, le distanze reticolari d calcolate per un $c/a = 1.355$, il tipo della radiazione riflessa, gli indici espressi per assi esagonali della faccia corrispondente, il lato a della cella elementare, le intensità osservate e calcolate con le due formule e per i due parametri indicati precedentemente. Sono inserite nella tabella le riflessioni delle faccie (2 0 2 0), (0 0 0 3) e (0 0 0 4) che non sono presenti nel fotogramma. La loro assenza però è di conferma alla nostra struttura, perchè le intensità calcolate delle linee corrispondenti risultano, come si vede nella tabella, debolissime.

TABELLA I. - Cd (OH)₂ - Anticadodo di Fe.

hkil	λ	$\sin\theta/2$	d	a	I oss.	I calcolata per			
						$u = 1/3$		$u = 1/4$	
						kS	kS ²	kS	kS ²
0001	α	0.211	4.58	3.367	d	150	603	181	867
1010	β	0.298	2.940	3.390	dd				
1010	α	0.329	2.935	3.390	m	155	618	155	618
111	β	0.356	2.460	3.370	d				
1011	α	0.388	2.490	3.408	f	284	1553	257	1359
0002	α	0.427	2.261	3.330	dd	29	116	23	73
1012	β	0.477	1.834	3.424	dd				
1120	β	0.508	1.722	3.444	ddd				
1012	α	0.528	1.828	3.417	f	107	846	169	1040
1121	α	0.561	1.722	3.444	mf	71	285	85	485
2020	α	—	1.495	3.450	—	29	115	29	115
0003	α	—	1.566	3.450	—	15	101	8	25
2021	β	0.616	1.421	3.440	ddd				
1013	β	0.640	1.370	3.411	dd				
1122				3.420					
2021	α	0.667	1.427	3.458	mf	72	391	55	340
1013	β	0.697	1.386	3.444	f	109	436	104	479
1122				3.455					
2022	α	0.765	1.263	3.457	mf	64	373	74	412
1231	β	0.793	1.103	3.462	d				
0004	α	—	1.186	3.465	—	10	38	15	98
1113	α	0.832	1.161	3.460	m	93	586	68	329
1230	α	0.850	1.136	3.470	mf	120	656	117	470
1014				3.450					
1231	α	0.875	1.104	3.470	ff	170	924	157	673
2032	α	0.891	1.083	3.462	m	70	279	87	435

Le faccie del tipo $(m \ n \ m + n \ 1)$ e $(n \ m \ n + m \ 1)$ hanno per reticoli romboedrici in generale fattori di struttura diversi, ma, avendo nel nostro caso distanze reticolari eguali, danno luogo ad eguali angoli di riflessione e quindi a linee coincidenti: per brevità non le ho distinte, ma ne ho tenuto conto nel calcolo delle intensità.

L'idrato di cadmio appartiene dunque al sistema romboedrico: una molecola $\text{Cd}(\text{OH})_2$ occupa una cella a base rombica di 120° avente un lato di base $a = 3.47$, limite a cui tendono i valori della tabella; le divergenze, maggiori per le prime linee, sono dovute allo spessore del preparato e sono notevoli causa la sua opacità. Per la stessa ragione è indebolita l'intensità delle prime linee: la correzione, proposta dal Debye, non può essere espressa quantitativamente se non con molta difficoltà e varia da sostanza a sostanza, perchè dipende principalmente dal suo potere assorbente: ma comunque fatta non potrebbe che migliorare i dati della tabella.

Il volume della cella elementare è $a^2 \times c \times \sin 120^\circ = 49 \times 10^{-24} \text{ cm.}^3$ ed essendo il peso di una molecola $146.4 : 0.606 = 241.6 \times 10^{-24} \text{ gr.}$, risulta come peso specifico $241.6 : 49 = 4.92$. Questo valore è un po' superiore al 4.72 determinato da De Schulten.

Itrato di Nichel. — La tabella seguente è stata calcolata sui dati forniti da un fotogramma ottenuto con anticatodo di nichel emettente radiazioni $\lambda(K_\alpha) = 1.656$ e $\lambda(K_\beta) = 1.693$. Le distanze reticolari sono calcolate per il sistema romboedrico e per un $c/a = 1.50$. Tale valore corrisponde ad un caso particolare per il quale le distanze reticolari di numerose faccie e quindi le relative riflessioni coincidono, dando luogo conseguentemente ad un fotogramma con un numero minore di linee. Tali linee si ordinano abbastanza bene anche nel diagramma di Hull per il sistema tetragonale per un rapporto assiale 1.72. Ma ciò è dovuto soltanto ad una pseudo-simmetria: 1.723 è il rapporto tra la diagonale maggiore ed il lato della base del prisma rombico di 120° precedentemente considerato, e gli atomi di nichel disposti in un aggruppamento esagonale semplice con un $c/a = 1.50$, formano dei prismi a base quadrata di lato $2c$ ed altezza 1.723 a : ma l'asse di tali prismi non presenta simmetria quaternaria.

TABELLA II. - $\text{Ni}(\text{OH})_2$ - Anticattodo di nichel.

hkil	λ	$\sin\theta/2$	d	a	I oss.	I calcolata per			
						$u = 1/3$		$u = 1/4$	
						kS	kS ²	kS	kS ²
10 $\bar{1}$ 0	β	0.289	2.582	2.980	d				
10 $\bar{1}$ 0	α	0.319	2.595	2.993	m	107	315	77	154
10 $\bar{1}$ 1	β	0.335	2.229	2.975	d				
0002									
10 $\bar{1}$ 1	α	0.369	2.242	2.990	fff	168	550	186	410
0003									
10 $\bar{1}$ 2	β	0.443	1.685	2.975	dd				
10 $\bar{1}$ 2	α	0.487	1.699	2.998	ff	110	398	98	203
11 $\bar{2}$ 0	α	0.545	1.519	3.039	f	80	341	86	379
0003									
11 $\bar{2}$ 1	α	0.576	1.437	3.030	mf	52	145	37	134
10 $\bar{1}$ 3	α	0.632	1.310	3.030	m	59	186	47	94
20 $\bar{2}$ 0									
20 $\bar{2}$ 1	α	0.653	1.268	3.048	mf	60	166	79	161
11 $\bar{2}$ 2									
0004	α	0.724	1.144	3.050	md	57	215	21	62
20 $\bar{2}$ 2									
11 $\bar{2}$ 3	α	0.768	1.077	3.050	d	36	102	57	153
20 $\bar{2}$ 3	α	0.824	1.005	3.069	md	70	173	30	102
12 $\bar{3}$ 0									
12 $\bar{3}$ 1	α	0.843	0.982	3.070	f	74	259	85	178
12 $\bar{3}$ 2	α	0.896	0.924	3.080	fff	230	1127	194	678
11 $\bar{2}$ 4									
0005									

L'accordo tra le intensità calcolate e quelle osservate è buono. Ogni cella elementare di dimensioni: $a = 3.07$, $c = 4.605$ e $c/a = 1.50$ contiene una molecola $\text{Ni}(\text{OH})_2$. La formula $4\text{Ni}(\text{OH})_2 \cdot \text{H}_2\text{O}$ attribuita da vari autori all'idrato di nichel, contiene una molecola d'acqua che non è di costituzione o almeno tale da alterare il reticolo da me osservato. Il volume della cella è $37.6 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3$, il peso di una molecola $135.3 \cdot 10^{-24} \text{ gr.}$ ed il peso specifico 3.602.

Per verifica non essendo riportato in nessun testo il peso specifico dell'idrato di nichel, lo ho determinato con il metodo del picnometro, adoperando come liquido di peso noto benzolo, e mi è risultato $d = 3.65$.

Conclusione. — Gli idrati di nichel e di cadmio appartengono cristallograficamente al sistema romboedrico. La dimensione della cella è stata verificata mediante il calcolo della densità e la disposizione atomica è stata controllata mediante il calcolo delle intensità, attribuendo diversi valori ai parametri. Ambedue gli idrati studiati hanno struttura analoga agli idrati di magnesio e di manganese.

Nella tabella seguente sono indicate le dimensioni dei reticoli degli idrati dei metalli bivalenti precedentemente conosciuti, in confronto con quelli di nichel e di cadmio.

Metallo	Diametro atomico del metallo-ione	Volume della cella dell'idrato	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>c/a</i>
Ni	2.70	37.6	3.07	4.605	1.50 (Natta)
Mg	2.85	39.8	3.11	4.73	1.52 (Levi e Ferrari)
Mn	2.95	46.5	3.34	4.68	1.40 (Aminoff)
Cd	3.20	49.0	3.47	4.64	1.355 (Natta)
Ca	3.40	52.95	3.52	4.93	1.40 (Levi)

Per l'idrato di cobalto $\text{Co}(\text{OH})_2$ ho trovato un rapporto assiale 1.48 e di questo, come di altri idrati di metalli bivalenti, riferirò in una prossima nota.

Chimica. — *Azione dell'ipofosfito sodico sul cloruro stannico.*
Nota⁽¹⁾ di A. TERNI e C. PADOVANI presentata dal Corrispondente M. G. LEVI.

L'azione riducente che l'acido ipofosforoso esercita sopra le soluzioni dei sali dei metalli pesanti fu studiata, per la prima volta, dal Wurtz⁽²⁾, il quale osservò che i sali rameici vengono ridotti dagli ipofosfiti alcalini a rame metallico, attraverso ad un idruro facilmente decomponibile. Queste ricerche furono riprese da Gibbs e Chauvenet⁽³⁾, e, più avanti, da Cavazzi⁽⁴⁾

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Applicata della R. Scuola d'Ingegneria di Bologna.

(2) Ann. 1846-49.

(3) «Sillim. Americ. Journ.», (II) 44, 210.

(4) «Rend. Acc. di Bologna», 1900.

con intenti puramente analitici. Quest'ultimo riuscì anche a proporre un metodo per la determinazione del rame⁽¹⁾, fondato appunto su tale reazione.

L'acido ipofosforoso, o gli ipofosfiti alcalini, possono reagire colle soluzioni dei sali dei metalli pesanti nei tre modi seguenti:

1° riduzione da sali al massimo solubili a sali al minimo insolubili, come, ad esempio, dai cloruri rameico e mercurico, rispettivamente ai cloruri rameoso e mercurioso. I sali al minimo possono poi, in date condizioni, essere ulteriormente ridotti a metallo libero;

2° riduzione a metallo libero, sia direttamente, come per i sali di bismuto, di antimonio e d'oro, sia passando attraverso a composti intermedi, come l'idruro di rame e l'ipofosfito d'argento, dai quali, per lieve riscaldamento, si separa il metallo;

3° formazione dell'ipofosfito stabile ed insolubile, qualche volta solubile a caldo, come nel caso del piombo.

Del modo di comportarsi dei sali di stagno coll'acido ipofosforoso non si trova alcun accenno nei lavori degli autori citati: come pure nessun accenno all'esistenza di ipofosfiti di stagno si ha nella letteratura relativa a questo elemento.

Abbiamo voluto, perciò, studiare l'azione degli ipofosfiti alcalini sopra il cloruro stannico, pensando che tale studio ci avrebbe condotti a risultati di un certo interesse, tanto nel caso che si fosse prodotta la riduzione del sale stannico, come se avessimo potuto constatare la formazione di un ipofosfito.

Facendo agire l'ipofosfito sodico sopra il cloruro stannico in soluzioni diluite, nessun fenomeno appariscente abbiamo potuto osservare. Operando invece con soluzione concentrata di ipofosfito, e con cloruro stannico puro, o diluito con un ugual volume d'acqua, abbiamo ottenuto immediatamente un abbondante precipitato bianco, voluminoso, il quale, filtrato alla pompa, lavato da prima con alcool diluito e poi con alcool assoluto e con etere, ed asciugato all'aria, si presenta come una polvere bianca, soffice, leggerissima. Sottoposta all'analisi, questa sostanza ha dato dei numeri che potrebbero corrispondere alla formula



e, cioè, ad una sostanza formata dalla unione di una molecola di cloruro stannico con una di ipofosfito stannico e tre di acqua.

gr. 0.1917 di sost. dettero	gr. 0.0840 di SnO_2
gr. 0.4240 » »	» 0.2715 » $\text{Mg}_2\text{P}_2\text{O}_7$
» 0.3000 » »	» 0.2487 » AgCl
» 0.9437 » perdettero	» 0.0722 » H_2O

(1) « Gazz. Ch. It. », XLI, II, 1911.

<i>Trovato</i>	<i>Calcolato per</i> $\text{SnCl}_4 \cdot \text{Sn}(\text{H}_2\text{PO}_2)_4 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$
Sn: 34.53 %	34.30 %
H_2PO_2 : 37.39 %	37.47 %
Cl: 20.51 %	20.46 %
H_2O : 7.71 %	7.77 %

Essa è completamente insolubile nei comuni solventi: si scioglie anche a freddo in acido cloridrico diluito e solamente a caldo in acido solforico. Lavata a lungo con acqua si decompone subendo una specie di idrolisi, e nel filtrato si riscontra la presenza di cloro, stagno ed acido ipofosforoso. È possibile così eliminare completamente il cloro, senza peraltro arrivare ad una sostanza di composizione costante. L'acido nitrico non la scioglie ma la decompone dando acido metastannico. È facilmente solubile nei solfuri alcalini e nella soluzione di ossalato ammonico. Nella potassa si scioglie con viva reazione e notevole effervescenza, svolgendo idrogeno fosforato. Presenta, inoltre, le proprietà riducenti di un ipofosfito, forse un poco meno energiche. Col nitrato d'argento la riduzione è accompagnata da una colorazione rossastra, che non si produce coi comuni ipofosfiti.

La sostanza si disidrata facilmente per riscaldamento. A 100°, però, la disidratazione si arresta quando è stata eliminata esattamente una molecola d'acqua.

Gr. 0.2184 di sost. in stufa a 100° perde gr. 0.0058

trovato 2.65 %

per 1 molecola d'acqua: calcolato 2.60 %

A 140° la disidratazione è completa: la sostanza anidra presenta le stesse proprietà fondamentali di quella idrata, e, lasciata esposta all'aria, tende a riassorbire rapidamente l'acqua perduta.

Innalzando ancora la temperatura, verso 190°, ha luogo una improvvisa decomposizione con abbondante svolgimento di fosfina che si infiamma. Questo fenomeno, comune a tutti gli ipofosfiti, è accompagnato da un caratteristico, vivace arrossamento della massa: il fenomeno ha luogo ugualmente se la sostanza è scaldata fuori del contatto dell'aria, in corrente di idrogeno. I vapori che si svolgono durante questa decomposizione, raccolti in alcali, accusano presenza di cloro, ma non di stagno. Spingendo oltre il riscaldamento, la decomposizione procede, fino a che la colorazione rossa scompare. Dopo calcinazione rimane un residuo bianco a freddo, giallastro a caldo, nel quale fu pure riscontrata la presenza del cloro in quantità sensibile.

Descritta così la sostanza da noi preparata, dovremmo trattare della sua possibile struttura: ma su questo argomento non ci sentiamo in grado, ancora, di avanzare alcuna ipotesi. Ci limiteremo ad osservare, intanto, che,

mentre la sua composizione nonchè il modo di ottenerla, la farebbero apparire un sale doppio formato dall'unione di una molecola di cloruro stannico, una di ipofosfito stannico e tre di acqua, alcune delle sue proprietà non andrebbero d'accordo con una tale costituzione.

In primo luogo, l'arrossamento vistoso ed istantaneo che la sostanza subisce per riscaldamento, in concomitanza colla sua decomposizione non si riscontra in nessun ipofosfito; e non si comprende come la presenza del cloruro stannico possa entrare in un tale fenomeno. In secondo luogo, si differenzia dagli ipofosfiti noti, inquantochè, mentre questi danno colla potassa idrogeno, essa dà fosfina.

Altro fatto, poi, che dobbiamo mettere in evidenza, è che la disidratazione completa della sostanza avviene, come abbiamo già detto, a 140° ; dimodochè si dovrebbe avere, anidro, accanto all'ipofosfito il cloruro stannico, a temperatura già superiore alla sua di ebollizione (113°), ma prima assai che si inizi la decomposizione (190°). E non si vede la ragione per la quale in questo intervallo non si abbia la completa distillazione del cloruro stannico. Mentre, come abbiamo già osservato, i vapori che si svolgono durante la decomposizione non contengono tracce di stagno, il quale resta completamente nel residuo della calcinazione.

Con altre ricerche in corso cerchiamo di portare maggior luce sul prodotto ottenuto, che crediamo di un certo interesse.

Frattanto, crediamo di dover accennare ad altre ricerche indirizzate allo scopo di approfondire il modo di comportarsi al riscaldamento; poichè questo ci ha fatto pensare che potesse formarsi, durante la scomposizione, una sostanza definita, alla quale fosse dovuto l'arrossamento improvviso che la massa subisce.

Interrompendo, infatti, il riscaldamento appena compare la colorazione rossa, e riprendendo la massa con acido cloridrico concentrato, siamo riusciti a separare una sostanza, che, raccolta sul filtro, lavata con alcool assoluto ed asciugata nel vuoto su acido solforico, si presenta come una polvere di color rosso vivo, insolubile nei comuni solventi, e di proprietà riducenti straordinariamente energiche. Precipita subito allo stato metallico l'argento ed il mercurio dai loro sali, e si scioglie con reazione vivissima ed istantanea nell'acqua ossigenata. Nell'acido nitrico si scioglie facilmente, e reagisce anche a freddo cogli alcali passando in soluzione con abbondante sviluppo di fosfina. Bagnata con acido nitrico concentrato si accende con una grande fiammata.

All'analisi ha dato il seguente risultato:

gr. 0.2055 di sostanza dettero gr. 0.6763 di $Mg_2P_2O_7$
 P % 91.63

Questo risultato, assieme alle proprietà della sostanza descritta, ci hanno

fatto pensare potersi trattare di quel sottossido di fosforo del quale molti autori ⁽¹⁾ hanno riferito, attribuendogli la formula P_4O .

Il contenuto in fosforo di questa sostanza è del 88,57%; ammesso che si trattasse realmente del sottossido, la differenza notevole tra la percentuale di fosforo calcolata e quella trovata, potrebbe dipendere da tracce di fosforo rosso che si formano assieme al sottossido, e per il quale non esistono mezzi di purificazione. E, del resto, tutti gli autori ⁽²⁾ che descrivono questa sostanza comunicano dati analitici non più esatti dei nostri.

Non crediamo necessario riportare qui l'estesa bibliografia riguardante questo composto, nè le svariate vie attraverso le quali i diversi autori l'hanno ottenuto. Essendone però stata messa ⁽³⁾ in dubbio l'esistenza, e trattandosi tuttora di una questione discussa, crediamo presenti un certo interesse riprenderne lo studio, nella speranza di poter arrivare ad un risultato definitivo; tanto più che il nostro metodo di preparazione si differenzia da tutti gli altri, sia per la sua maggiore semplicità, sia per il maggior rendimento.

Geologia. — *Sopra una nuova fauna cenomaniana della Palestina.* Nota di NATHAN SHALEM, presentata dal Socio GIOTTO DAINELLI.

Fino dal 1914 la mia attenzione fu ritenuta da una fauna cretacea della Palestina, la quale si presentava non solo nuova per la conoscenza geologica di quella regione, ma anche specialmente interessante per alcune sue particolari caratteristiche. Riservandomi di descrivere singolarmente le numerose specie riconosciute e di indicare la precisa località di ritrovamento ed i rapporti stratigrafici che questo livello fossilifero ha con altri cronologicamente ben determinabili, credo interessante dare fin d'ora notizia preliminare di questa nuova fauna.

Per quanto infatti io abbia confrontato questa fauna con le varie della Creta superiore, non ho potuto riscontrare finora in essa nessuna specie che si possa dire identica ad altre di qualsiasi provenienza. Tutt'al più ve ne sono alcune che presentano una certa analogia con specie di faune indiane, egiziane, o nord-africane in genere, fra le quali sono evidentissime e note le strette affinità durante il periodo neocretaceo. L'assoluta costanza delle piccole dimensioni (astrazione fatta dei pochissimi individui che si possono dire « giganti », ma che superano appena i due centimetri, mentre le dimensioni ordinarie vanno da 3-12 mm.) è veramente caratteristica.

(1) Per la bibliografia: *Gmelin-Kraut's Handbuch*, Bd. I, Abt. 3, p. 76.

(2) *Gmelin-Kraut's Handbuch*, Bd. I, Abt. 3, p. 81.

(3) *Abegg's Handb., d. An. Ch.* Bd., III, Abt. 3, p. 419.

Oltre ai Lamellibranchi ed ai Gasteropodi vi si vedono degli Echini ed anche delle Ammoniti e Corallari di estrema riduzione.

Questo fenomeno di nanismo è evidentemente collegato con condizioni ambientali poco favorevoli; si può forse spiegare con la natura delle acque povere di calce e cariche di sostanze argillose in sospensione, o con l'ipotesi di un ambiente batiale poco adatto alla vita di queste forme neritiche. In ogni caso il fatto sta che questo sedimento merita di essere studiato accuratamente, sia dal punto di vista faunistico come da quello geo-petrografico.

In questa faunula ho notato, fra i Lamellibranchi i generi seguenti:

Avicula, *Ostrea*, *Nucula* div. sp., *Lucina*, *Tellina*, *Corbula* e molti altri raccolti in più recenti visite alle località fossilifere, ed ora in via di determinazione.

Fra i Gasteropodi: *Turbo* div. sp., *Mesalia*, *Turritella* div. sp., *Ceritella*, *Cerithium* div. sp., *Voluta*, *Triton*, *Acera* ed altri.

Vi sono inoltre Cefalopodi, Echini, Corallari, denti di Pesci, alghe, ecc.

Non ostante le affinità neocretacee di queste specie, le quali però sono più che altro dipendenti da affinità di facies, l'età della fauna si rivela per ragioni stratigrafiche indubbiamente cenomaniana: infatti le marne che la contengono soggiacciono a strati che racchiudono forme indiscutibilmente cenomaniane.

Il fossile più abbondante e più caratteristico è una specie di *Corbula* dalla quale ho raccolto alcune centinaia di individui.

È una conchiglietta di 5-6 mm. di altezza, di 8-9 mm. di lunghezza e di 4-5 mm. di spessore. Nelle collezioni paleontologiche egiziane riportate dal Figari, v'è un solo individuo coniaciano di giacimento marnoso simile, avente molte affinità con la nostra. Il prof. Greco che l'ha studiato, lo ritenne come specie nuova e lo battezzò come *Corbula distefanoi*; però a differenza della nostra, oltre al trovarsi in un piano molto più alto, ha minore larghezza, maggiore spessore ed una statura molto più grande.

Inoltre, ho riscontrato delle affinità anche con la *Corbula striatuloides* Forbes, del Maestrichtiano, e colla *Corbula exulans* Stol., della Creta superiore dell'India.

Degna di nota è la grande mutabilità di caratteri individuali di questa *Corbula* palestinese, tanto che molti individui, se non fossero collegati fra di loro da passaggi gradualì, potrebbero senza dubbio indurre a considerarli come specie a sè.

Ciò nonostante, altri individui ancora, mostrando deviazioni costanti dai caratteri morfologici principali della specie tipo, ed essendo uniformemente meno convessi, a regione anteriore meno gonfia, più lunghi, a spessore uniformemente distribuito, rostro rudimentale, ecc., mi hanno costretto a creare una subspecie o varietà accanto alla specie tipo.

Mi sono un po' diffuso nel dar le caratteristiche di questa specie, perchè la ritengo il fossile più caratteristico, oltre che il più abbondante, del giacimento.

Le altre specie, benchè siano rappresentate da una discreta quantità di individui, sono sempre assai meno abbondanti della *Corbula*.

Astrazion fatta di questa ultima, i Lamellibranchi ed i Gasteropodi - i quali sono le due classi predominanti del giacimento - si pareggiano in numero delle specie, ma non degli individui, i quali relativamente prevalgono sempre fra i Gasteropodi.

Il genere *Avicula* è rappresentato da una sola specie minutissima (da 3-4 mm. di dimensioni) e da vari individui.

Il genere *Nucula* (?) invece, è più abbondante, ma più per le specie che per gli individui. Disgraziatamente, date le dimensioni minime dei fossili, e lo stato non perfetto di conservazione, la cerniera non è visibile, e rimanendo in dubbio circa la precisa determinazione del genere, mi sono basato più che altro sulla forma generale, confrontandoli con moltissimi Lamellibranchi della Creta. Una di queste specie ha infatti una certa rassomiglianza colla *Nucula capillata* Coq. (*Études supplémentaires*, p. 132).

Quanto al genere *Lucina*, benchè sia rappresentato da una sola specie, è al pari delle altre molto più abbondante.

Il genere *Tellina* è rappresentato da una specie simile alla *Tellina discites* Stol. (*Cretaceous Rocks S. India. Pelecypoda*, pag. 128, tav. IV, figura 15).

Per quello che riguarda i Gasteropodi, ho da notare, che una delle diverse specie del genere *Turbo*, graziosa conchiglietta di 5 mm. di lunghezza, è meravigliosamente conservata, tanto più che l'opercolino, un po' scavato verso il suo centro, munisce ancora bene la grande e tonda apertura buccale.

Il genere *Turritella* è ricco di specie ed individui. Una di queste un po' lunghetta (circa 2 cm. di lunghezza), è molto affine alla *Turritella* (*Hau-stator*) *ramsis* Greco, della solita raccolta del Figari, spettante al Coniaciano, ma che, più che per la forma, differisce dalla specie palestinese per le sue dimensioni che sono cinque volte maggiori.

I generi *Cerithium* e *Ceritella* sono rappresentati, è vero, da poche specie, ma con discreta quantità di individui.

Infine, quanto al genere *Acera*, c'è da notare, che l'unica specie, rappresentata da una diecina di individui, è affine alla *Acera Thevestensis* Coq. (*Géologie et Paléontologie du sud de Constantine*, tav. V, fig. 9, pag. 189); ridescritta e meglio figurata in seguito dal Pervinchière, il quale fece introdurre nella sinonimia anche la *Akera siliciosa* Whitfield, della Creta superiore della Siria.

I fossili rappresentanti le classi dei Pesci, Echini, Corallari, ecc. appaiono come al solito di minime dimensioni, ed in individui piuttosto rari.

Mineralogia. — *Micascisti a piemontite nelle valli di Lanzo (Alpi Piemontesi)*. Nota preliminare di VIRGINIA GENNARO ⁽¹⁾, presentata dal Socio ARTINI.

Nel 1923 il Prof. Zambonini descriveva, in una Nota preliminare sul nuovo giacimento di minerali mangesiferi scoperto a Ceres (Valle di Lanzo) ⁽²⁾, la rara specie *ardennite*, e prometteva di occuparsi in seguito degli altri minerali che a questa si accompagnano.

Sapendo che il Prof. Zambonini, chiamato ad altra sede, non intendeva più tornare sull'argomento, il Prof. Repossi, succedutogli nella direzione dell'Istituto Mineralogico della R. Università di Torino, affidò a me l'incarico di completare l'esame dell'interessante materiale già raccolto e di procedere possibilmente a radunarne dell'altro. A questo scopo pertanto feci ripetute visite sul posto; e poichè in queste visite e nello svolgimento delle mie ricerche parmi che nuovi fatti non trascurabili si siano messi in evidenza e che il soggetto stesso dell'indagine sia venuto ampliandosi e mutando alquanto carattere, credo di non far cosa inutile esponendo qui sommariamente i risultati più salienti finora conseguiti nel mio studio, riservandone la trattazione definitiva al momento in cui esso sia completo in ogni sua parte.

Nella sua Nota lo Zambonini osserva che l'*ardennite* è sempre strettamente associata alla *piemontite*, la quale si concentra nei filoncelli quarzosi che attraversano i micascisti dei dintorni di Ceres. Ora, io potei constatare che la *piemontite* non si trova soltanto in ragguardevole quantità nelle vene quarzose, ma è inoltre minutamente diffusa nella roccia, di cui diventa un componente caratteristico relativamente abbondante. Infatti, seguendo in direzione i micascisti del Monte di Voragno, sovrastante a Ceres, rinvenni in posto alcuni banchi, che possiedono un colore d'insieme leggermente roseo, evidentissimo nei campioni staccati di fresco, dovuto appunto alla pigmentazione di *piemontite*.

Il Monte di Voragno è formato in gran parte da micascisti, separati dalla zona delle anfiboliti e dei serpentini che si estendono più ad ovest, da una striscia di calcescisti; i banchi della roccia a *piemontite* si incontrano press'a poco nella regione di contatto fra calcescisti e micascisti, e più precisamente nella valletta che dalla frazione di Voragno sale alla cappella di S. Cristina. Sebbene così localizzati, essi non possono sfuggire ad un oc-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Mineralogia della R. Università di Torino.

(2) F. ZAMBONINI, *Ardennite di Ceres, in Val d'Ala*. « Rendic. Acc. Linc. », vol. XXXI, 1° sem. 1922.

chio un po' attento, soprattutto se si ha cura di osservar bene le superfici di scistosità, dove è palese la colorazione rosea.

Oltre la piemontite, gli altri minerali di manganese raccolti, a cui per ora accenno soltanto, sono: la braunite, la spessartina, l'alurgite.

La braunite compare spaccando la roccia, ove si concentra in piccole lenti, di quando in quando ravvolte da sottili strati di muscovite ed ardennite.

La spessartina ora è associata al quarzo e alla piemontite in masse compatte giallo-rosee, ora in distinti ma piccoli cristalloblasti è compresa nella roccia oppure interclusa nei suddetti noduli di braunite.

Alla muscovite del micascisto è frammista, anzi spesso le è sostituita una mica rosea, che presenta i medesimi caratteri dell'alurgite, la mica manganesifera di S. Marcel, descritta da Penfield ⁽¹⁾. Finora non l'ho mai trovata in laminette con forma definita; in aggregati squamosi è irregolarmente sparsa fra i vari componenti della roccia. Di questa ho potuto rilevare diverse particolarità, ma ne parlerò più tardi in una descrizione petrografica minuta e completa.

L'estensione e il ripetersi dei banchi a piemontite di Ceres mi lasciò supporre che la formazione non dovesse essere così limitata, ed allargai di conseguenza le ricerche, restando però sempre nella zona del « gneiss Sesia-Val di Lanzo » a cui appartengono i micascisti del Monte Voragno.

Conoscendo dalle indicazioni di Stelzner e Bergeat ⁽²⁾, Barelli ⁽³⁾, Jervis ⁽⁴⁾ l'esistenza di una concentrazione di braunite al Passo della Forcola, fra Corio e Balangero, mi recai a visitarla; e potei accertare in questa nuova località la presenza anzitutto dell'ardennite e poi della piemontite e degli altri minerali di manganese, già riscontrati a Ceres, in giacitura perfettamente analoga.

Alla Forcola ci si ritrova nella zona dei micascisti, che presso la lente di braunite diventano manifestamente ricchi in piemontite; questa spesso si alterna in straterelli pieghettati e contorti col quarzo e con l'ardennite.

Mancano le piccole lenti di braunite con i granati interclusi, ma i blocchi di braunite compatta portano incrostazioni giallo-brune di spessartina e non sono rari gli aggregati di cristalli avvolti dall'ardennite in individui bacillari intrecciati a guisa di feltro.

L'alurgite è assai scarsa, però in lamine meno piccole che a Ceres.

Al Passo della Forcola ho pure trovato la rodonite, in masserelle rosee già in via di alterazione, che vengono alla luce rompendo i noduli di braunite.

(1) S. L. PENFIELD, *On some minerals from the Manganese Mines of St. Marcel in Piedmont*. « Americ. Journ. of Sc. », Vol. XLVI, New Haven, 1893.

(2) A. W. STELZNER, A. BERGEAT, *Die Erzlagerstätten*. Leipzig, 1904.

(3) V. BARELLI, *Cenni di statistica mineralogica degli Stati di S. M. il Re di Sardegna*, Torino, 1835.

(4) G. JERVIS, *I tesori sotterranei dell'Italia*. Loescher, Torino, 1873.

Se indubbiamente notevoli sono le due località di Val di Lanzo, perchè ricche in minerali di manganese non molto comuni, e soprattutto la seconda, nuova per l'ardennite, mi pare che maggiore interesse esse offrano dal punto di vista petrografico per la diffusione riscontratavi del miscascisto a piemontite, non ancora messo in evidenza nelle Alpi.

Non manca inoltre la probabilità che questa roccia sia anche più largamente sviluppata, sempre nella zona dei « gneiss Sesia-Val di Lanzo », giacchè erratici contenenti piemontite furono raccolti dallo Stella presso Failungo, sulla destra di Val d'Orco ⁽¹⁾, e blocchi con piemontite ed ardennite al Col S. Giovanni, sopra Viù. Siccome la Valle dell'Orco come quella di Viù incidono la medesima striscia di gneiss minuti e micascisti che passa a Ceres ed alla Forcola, quasi con certezza questi blocchi erratici sono da attribuirsi a giacimenti della stessa natura. Così in tale zona verrebbe ad essere confermata la non trascurabile diffusione del miscascisto a silicati manganiferi, che non rappresenta un caso isolato od eccezionale, ma è invece un tipo petrografico ben definito, dovuto ad un processo genetico particolare.

Dalla bibliografia consultata risulta che rocce analoghe a quella qui descritta sono finora note soltanto in poche regioni, e precisamente in India ⁽²⁾, in Giappone ⁽³⁾ e nell'Asia Minore ⁽⁴⁾; data dunque la relativa rarità di tali rocce, che devono alla presenza del manganese in più o meno forti percentuali la loro caratteristica fisionomia, data l'importanza che si annette oggi allo studio della distribuzione geochimica degli elementi, mi sembra utile, dopo aver determinato con ogni possibile esattezza lo sviluppo degli scisti a piemontite nelle Alpi piemontesi, di completarne l'esame sia microscopico che analitico per stabilire i necessari confronti con le rocce manganifere delle località ora citate.

(1) A. STELLA, *Relazione sul rilevamento eseguito nell'anno 1893 nelle Alpi Occidentali (Valli dell'Orco e della Soana)*. « Boll. Comit. Geol. d'Italia », 1894.

(2) L. LEIGH FERMOR, *The Manganese-Ore Deposits of India*. « Mem. of the Geolog. Survey of India ». Calcutta, 1909.

(3) BUNDIJO KOTÔ, *Piemontit in Japan*. « Zeitschr. für Kryst. », XV, 1889.

Id., *Vorkommen von Piemontit*. « Zeitschr. für Kryst. », XVI, 1890.

(4) H. ROSEBUSCH, *Elemente der Gesteinslehre*. Stuttgart, 1923.

Fisiologia. — *Ricerche sulla secrezione spermatica.* — XVII.
Digiuno e attività del testicolo nel colombo ⁽¹⁾. Nota di G. AMANTEA
e G. MARTINO, presentata dal Corresp. S. BAGLIONI.

Nella presente Nota intendiamo riferire un gruppo di recenti osservazioni fisiologiche sul colombo, relative all'azione esercitata dalla privazione più o meno protratta di alimento sull'attività testicolare.

Dello stesso argomento ci risulta che si è occupato finora con metodo fisiologico soltanto E. Poyarkow ⁽²⁾, sperimentando sul cane. Egli riferisce, che due cani furono sottoposti a un digiuno parziale, ricevendo ciascuno per giorno un quarto di libbra (russa) di avena in brodo di carne. Durante tre mesi di tale regime il peso di uno dei cani discese da 46 a 31 libbre, e quello dell'altro da 32 a 21. Rimessi a un adatto regime, ricuperarono in due mesi il peso perduto. Periodicamente fu raccolto il liquido seminale, ricorrendo a stimolazioni meccaniche. Durante il digiuno il volume del liquido si ridusse da 10 cmc. a 1 o 2 gocce; ma nel successivo periodo di ripresa, la quantità eliminata a poco a poco si ristabilì, sebbene più lentamente del peso corporeo. Il numero degli spermatozoi eliminati dai cani discese nel digiuno da un miliardo e mezzo a più centinaia di migliaia, continuando a decrescere anche allorchè i cani passarono all'alimentazione rinforzata, per risalire successivamente, ma con più lentezza che la secrezione prostatica: in uno dei due animali un mese e mezzo dopo il digiuno gli spermatozoi non avevano toccato che i 100 milioni, mentre il secondo non ha eliminato affatto spermatozoi durante un mese e mezzo, e in seguito ne ha emesso solo 2 milioni.

Profonde modificazioni presentarono le proprietà degli spermatozoi: mentre i movimenti prima del digiuno potevano mantenersi e osservarsi durante 2 o 3 giorni, e non si rilevarono alterazioni durante il primo periodo del digiuno stesso, successivamente incominciarono a comparire spermatozoi poco mobili o affatto incapaci di movimenti; in luogo di spermatozoi a coda dritta se ne ebbero a coda più o meno torta, o variamente deformati. Ritornarono di forma normale nella fase di rialimentazione, ma mantenendosi poco vitali ancora mentre l'A. comunicava i risultati ottenuti.

Durante il periodo di inanizione a uno dei cani fu asportato uno dei

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia nella R. Università di Messina, diretto dal prof. G. Amantea; presentata all'Accademia il 24 ottobre 1925.

(2) POYARKOW E., *Influence du jeûne sur le travail des glandes sexuelles du chien*, (*Commun. préliminaire*), « Comptes rendus de la Soc. de Biol. ». (Réunion biol. de S. Pétersburg), année LXV, to. I, p. 141, 1913.

testicoli, in cui l'esame istologico dimostrò che in molti punti i canalicoli non contenevano più se non cellule di Sertoli; in altri si riscontrarono molti spermatociti; in generale esistevano pochi spermatogoni, molti dei quali presentavano segni manifesti di degenerazione. Tali osservazioni concordano con quelle precedenti e analoghe di M. G. Loisel⁽¹⁾.

Ma secondo il Poyarkow non è da attribuire alle cellule di Sertoli, come ritiene il Loisel, ma agli spermatogoni che rimangono intatti, il ristabilirsi della spermatogenesi quando si rimette il cane al regime normale. Il Poyarkow aveva manifestato il proposito di tentare di ottenere mercè il digiuno la scomparsa completa di tutti gli spermatogoni, e per ciò una castrazione da digiuno; ma non sono venuti a nostra conoscenza altri suoi lavori sull'argomento.

In sostanza le sue esperienze — per quanto succintamente riferite nella pubblicazione potuta consultare, e corredate di scarsi cenni relativi alla tecnica della raccolta dello sperma nei cani in esperimento, alla quale noi invece attribuiamo molto valore⁽²⁾ — dimostrano, che un digiuno incompleto ma prolungato fino alla perdita di circa un terzo del peso corporeo può nel cane ridurre fino a un minimo il lavoro delle glandole sessuali accessorie e sessuali, produrre un arresto ben pronunciato nei fenomeni di spermatogenesi, e provocare la comparsa di forme teratologiche di spermatozoi.

Tutte le altre ricerche riflettenti i rapporti tra digiuno e attività del testicolo sono state condotte in genere con metodo istologico. Comunque interessa ricordare particolarmente quelle classiche eseguite sul colombo da V. Grandis⁽³⁾, il quale dimostrò, che basta un digiuno di pochi giorni per alterare in quest'animale la produzione degli spermatozoi: probabilmente nel digiuno cessa la produzione degli elementi che dovranno trasformarsi in nemaspermii, e continuano solo a crescere quelli che erano già in via di sviluppo. La neoformazione cellulare che si osserva dopo il 12° giorno di inanizione, non è più destinata a produrre nuovi spermatozoi. Durante la inanizione gli spermatozoi muoiono nell'interno dei canalicoli seminiferi. Gli elementi che costituiscono il testicolo si decompongono quando la perdita di peso subita oltrepassa il 40 per cento. I componenti del canalicolo spermatico che più risentono gli effetti del digiuno sono, in ordine decrescente, gli spermatozoi, gli elementi dello strato centrale e quelli dello strato medio. Le cellule che si conservano più a lungo hanno il carattere di quelle che tappezzano la parete dei canalicoli spermatici. Quando è molto progredito il

(1) LOISEL M. G., *Influence du jeûne sur la spermatogénèse*. « Comptes rendus de la Soc. de Biol. », année LIII, p. 836, 1901.

(2) AMANTEA G., *Ricerche sulla secrezione spermatica*. Nota I. *La raccolta dello sperma nel cane*. « Rendic. della R. Accad. dei Lincei », vol. XXIII, S. 5ª, 1° sem., p. 369, 1914; e « Arch. ital. di Biol. ».

(3) GRANDIS V., *La spermatogenesi durante l'inanizione*. « Rendic. della R. Accad. dei Lincei », vol. V, 1° sem., p. 689; « Arch. ital. di Biol. », to. XII, p. 215.

processo distruttivo nei testicoli dell'animale vivo compare la colesterina allo stato cristallino. Nell'ultimo stadio della inanizione cessa ogni differenza fra le cellule del testicolo, e le sezioni dei canalicoli hanno l'aspetto delle sezioni fatte nei testicoli di animali giovani.

Noi abbiamo avuto l'opportunità di eseguire su vari colombi una serie di osservazioni con metodo fisiologico, le quali ci sembra che completino le precedenti.

Si poté agevolmente tener conto delle variazioni del bisogno sessuale, desumendolo dal contegno dei maschi in presenza di femmine, nonché dalla maggiore o minore tendenza all'accoppiamento. Ma soprattutto si poterono eseguire ricerche esatte sul comportamento della eliminazione dello sperma, come pure sul numero e sulle proprietà degli spermatozoi, permettendocelo il metodo recentemente descritto e con vantaggio utilizzato da uno di noi ⁽¹⁾.

Fra i colombi esplorati col suddetto metodo (consistente nell'eccitare i maschi offrendo loro una femmina in un particolare atteggiamento, ad ali incrociate, per cui si spingono fino alla copula, ma in condizioni da permettere la raccolta di tutto lo sperma eliminato) ne furono scelti quattro a tendenze sessuali molto accentuate. Furono abituati dapprima, durante un sufficiente periodo a compiere, a intervalli di almeno 24 ore, come si è accennato, la copula, in condizioni determinate e pressochè costanti di tempo e di ambiente. Quindi si incominciò a sottoporli all'esperimento del digiuno, sospendendo loro l'alimento per tempi diversi, ma lasciando loro sempre l'acqua a disposizione. La vitalità degli spermatozoi fu studiata col metodo dei tubi capillari (G. Amantea e K. Krzyskowski ⁽²⁾) diluendo con liquido di Hirokawa. I risultati così ottenuti si possono riassumere come segue:

Basta un digiuno anche relativamente assai breve, talora quello di sole 24 ore, per deprimere nel Colombo sensibilmente il bisogno sessuale: in tal caso o l'animale rifiuta persistentemente le femmine, che gli si offrono, o si eccita fuggacemente senza giungere alla copula, o tutto al più, ma di rado, compie anche questa, generalmente dopo qualche tentativo inefficace.

In uno solo dei nostri animali siamo riusciti a ottenere lo sperma dopo 24 e 48 ore di digiuno: l'eiaculazione fu preceduta da eccitamento di grado sempre minore; la quantità di sperma e il numero degli spermatozoi risultarono pure inferiori al normale; la vitalità degli spermatozoi si rivelò alquanto indebolita.

(1) AMANTEA G., *Ricerche sulla secrezione spermatica*. — XVI. *La raccolta dello sperma e l'eliminazione degli spermatozoi nel Colombo*, « Rendic. della R. Accad. dei Lincei », vol. I, serie 6^a, 1^o sem., fasc. 10, 1925; e « Arch. di Farmac. sper. e Sc. affini », vol. XXXIX, fasc. 11, p. 241, 1925.

(2) AMANTEA G. e K. KRZYSKOWSKI, *Ricerche fisiologiche sugli spermatozoi*, « Rivista di Biologia », vol. III, p. 569, 1921.

Di regola a cominciare dalla terza giornata di digiuno non è stata più possibile la raccolta dello sperma, non mostrandosi i maschi più capaci di eccitamento in presenza delle femmine.

La rialimentazione (a volontà e con alimento misto, costituito da grano, granturco e pane) dopo uno o due giorni di digiuno rievoca prontamente il grado dell'eccitabilità sessuale, da permettere la copula e la raccolta dello sperma, alcune volte già dopo 2 o 3 giorni: la quantità dello sperma come il numero degli spermatozoi risulta allora più o meno inferiore alla norma, e gli spermatozoi si rivelano meno dei normali resistenti. Ma alcuni giorni più tardi si giunge alla ripresa funzionale completa.

La rialimentazione dopo digiuni, che avevano indotto una perdita percentuale del peso corporeo iniziale di circa il 30 per cento, permise di assistere sempre alla medesima completa ripresa, ma questa avvenne tutte le volte in modo lento, e relativamente con grande ritardo dopo il totale ricupero del peso perduto. Ricomparve in un primo tempo gradatamente il bisogno e l'eccitabilità sessuale; ma anche quando questa si presentò di grado normale gli animali non erano ancora capaci di pervenire all'orgasmo eiaculatorio, sicchè si limitavano a ripetuti tentativi inefficaci di copula. Soltanto molti giorni più tardi incominciavano ad eliminare piccole quantità di sperma, contenente uno scarsissimo numero di spermatozoi deboli e poco resistenti. La quantità di sperma, il numero di spermatozoi e la loro stessa resistenza si videro in seguito lentamente ma progressivamente aumentare. Le cose non procedettero diversamente, quando gli animali, anzichè in gabbia, furono lasciati in libertà. In una di tali esperienze, avendo l'animale perduto il 30 % circa del suo peso durante il digiuno, e pur trattandosi di quello che ci aveva allo stato normale rivelato le più spiccate tendenze sessuali, la ricomparsa netta del bisogno sessuale si manifestò dopo circa due settimane dal ricupero del peso perduto, mentre la prima eiaculazione si dovette aspettare ancora per 12 giorni e risultò priva di spermatozoi, i quali furono eliminati solo dopo altri 14 giorni.

Nel loro complesso tali risultati, concordando in generale coi dati raccolti e riferiti dal Poyarkow, valgono a integrare in particolar modo le interessanti conclusioni, cui per altra via V. Grandis era già pervenuto.

Fisiologia. — *Sulle variazioni della resistenza elettrica dei muscoli.* Nota del dott. LUIGI DE CARO, presentata dal Socio F. BOTTAZZI ⁽¹⁾.

I. - SCOPO DELLE RICERCHE.

Si è qui indagata l'azione delle alte temperature, della stimolazione elettrica e di alcune sostanze contratturanti sulla resistenza elettrica del diaframma di gatto. Come agisce la temperatura, si è già visto con precedenti ricerche ⁽²⁾, nelle quali, però, si determinavano, sempre alla stessa temperatura, i valori di resistenza elettrica che presentava il muscolo dopo che su esso aveva agito, per breve tempo, una data temperatura. Nelle presenti ricerche, invece, si è cercato di stabilire l'andamento completo delle variazioni della resistenza in funzione della temperatura, riscaldando il muscolo gradatamente e determinando la resistenza elettrica via via che procedeva il riscaldamento.

II. - METODO DI RICERCA.

Per determinare la resistenza elettrica della membrana diaframmatica si è adoperato un apparecchio, somigliante nelle linee essenziali, a quello precedentemente adoperato e descritto ⁽²⁾, ma opportunamente modificato e perfezionato in maniera da semplificarne l'uso, rendendone più facile il riempimento ed il vuotamento con la soluzione fisiologica e da permettere di mantenere in esso la circolazione continua della soluzione, per tutta la durata dell'esperimento, non che di stimolare, ad intervalli convenienti, il preparato muscolare.

L'apparecchio, rappresentato schematicamente nella fig. 1, è poi riprodotto fotograficamente nella fig. 2, fissato al suo sostegno e connesso, mediante tubi di gomma, con le bocce ripiene del liquido di perfusione. Esso è costituito da due piccoli cilindri cavi di ebanite, *A* e *B*, terminanti, alla estremità per cui combaciano, con un orlo schiacciato, *a* e *b*, e bucherellato, e, all'altra estremità, con un'apertura leggermente conica, nella quale si adatta, a perfetta tenuta, il pezzo (*C, D*) recante l'elettrodo (*E, E'*). Fra i due orli combacianti vien tesa la membrana diaframmatica, e in stato di

(1) Dal Laboratorio di Fisiologia di Napoli. Nota presentata nella seduta del 1° novembre 1925.

(2) F. BOTTAZZI e L. DE CARO, *Sulle variazioni della resistenza elettrica dei muscoli causate da diversi agenti fisici e chimici* «Rend. Acc. Naz. dei Lincei» (6^a), I, (1° sem.), fasc. 10-11, pp. 573 e 635, 1925.

tensione fissata mediante cucitura con filo robustissimo, passante attraverso i buchi degli orli dianzi detti; i quali rimangono, così, anche strettamente

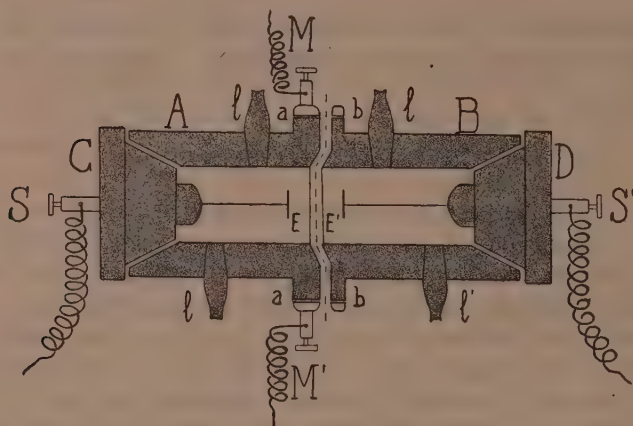


Fig. 1.

accostati l'uno all'altro. Sulla base di uno di questi orli, propriamente sulla faccia concava di quello del cilindro A, sono incastonati due ampi contatti

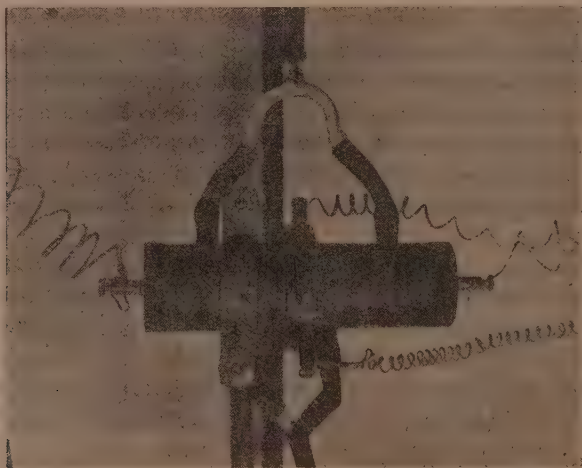


Fig. 2.

di platino, in guisa che aderiscano intimamente al tessuto. A questi fanno capo i serrafili M e M', che, a loro volta, comunicano con un induttorio a slitta del Du Bois-Reymond.

In ciascuno dei due cilindri sono, inoltre, fissati due portatubi l e l' , pure d'ebanite, i quali mettono in comunicazione l'interno dell'apparecchio con l'esterno. A questi portatubi si adattano tubi di gomma, per mezzo dei quali l'apparecchio può essere riempito e vuoto, e vi si può far circolare la soluzione fisiologica, riscaldata alla temperatura voluta, soluzione normale o contenente le sostanze delle quali si vuole indagare l'azione sul muscolo.

Gli elettrodi E ed E' vengono a trovarsi a una distanza costante fra loro, ai due lati della membrana diaframmatica. Essi sono costituiti da due dischi di platino della superficie di circa 1 cm^2 ; sono coperti di nero di platino; si trovano intissi nei due coni di ebanite C e D , che chiudono lateralmente l'apparecchio; e comunicano coi due serrafili S ed S' , per mezzo dei quali possono essere messi in connessione col solito apparecchio di misura della resistenza elettrica (ponte di Wheatstone, cassetta di resistenza, piccolo induttorio).

Per la disposizione descritta, si deve ritenere che, quando il muscolo si contrae (per l'azione degli stimoli elettrici, o sotto l'influenza di agenti fisici o chimici, contratturanti o provocanti rigidità muscolare), esso non può eseguire che contrazioni quasi perfettamente isometriche.

III. — RISULTATI SPERIMENTALI.

I risultati da me ottenuti negli esperimenti finora fatti possono essere brevemente riassunti nel seguente modo:

1. La resistenza elettrica del diaframma di gatto, in soluzione di Ringer o di $\text{NaCl } 9^\circ$, presenta, durante il riscaldamento graduale, prima una diminuzione, poi un rapido aumento, poi, di nuovo, una progressiva e rapida diminuzione. Il valore massimo della resistenza corrisponde, in media, a un aumento del $28-30\%$ del valore della resistenza determinato a 37°C , e coincide, generalmente, colla temperatura di circa 55°C del liquido che bagna il preparato muscolare. La resistenza incomincia ad aumentare alla temperatura di $43^\circ-44^\circ\text{C}$. Dopo i 55°C , la resistenza rapidamente diminuisce (v. fig. 3 e 4: curve a , b).

2. La resistenza elettrica del diaframma di gatto, riscaldata prima a $70^\circ-75^\circ\text{C}$, poi portato alla temperatura dell'ambiente, presenta, durante il successivo graduale riscaldamento, una lenta e graduale diminuzione: comportamento, questo, del tutto identico a quello di una soluzione di $\text{NaCl } 9^\circ$ riscaldata entro i medesimi limiti di temperatura (v. fig. 3: curve a' , c).

3. La resistenza elettrica del diaframma di gatto, lasciato ventiquattro ore in liquido di Ringer alla temperatura dell'ambiente, presenta, durante il graduale riscaldamento, una lenta, progressiva diminuzione del tutto identica a quella che presenta, durante il riscaldamento, lo stesso muscolo, esposto per un certo tempo a una temperatura di $70^\circ-75^\circ\text{C}$ (v. fig. 4: curva c).

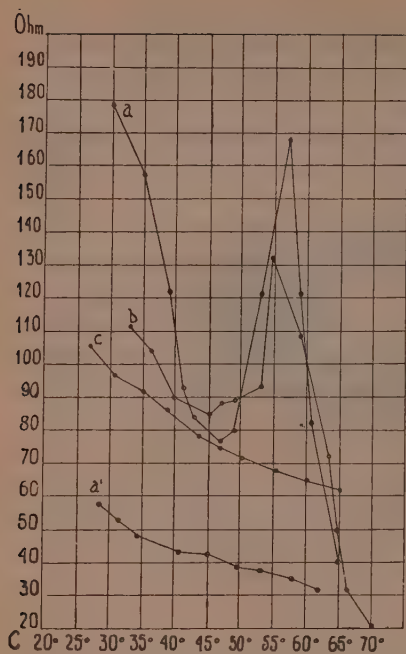


Fig. 3.

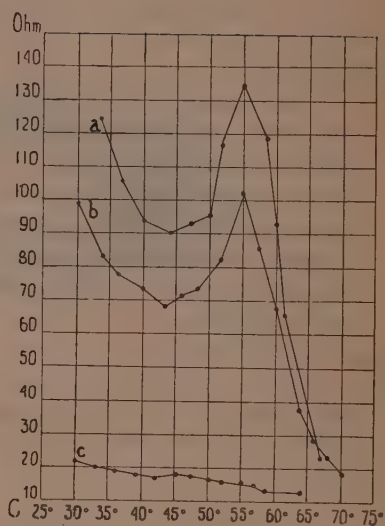


Fig. 4.

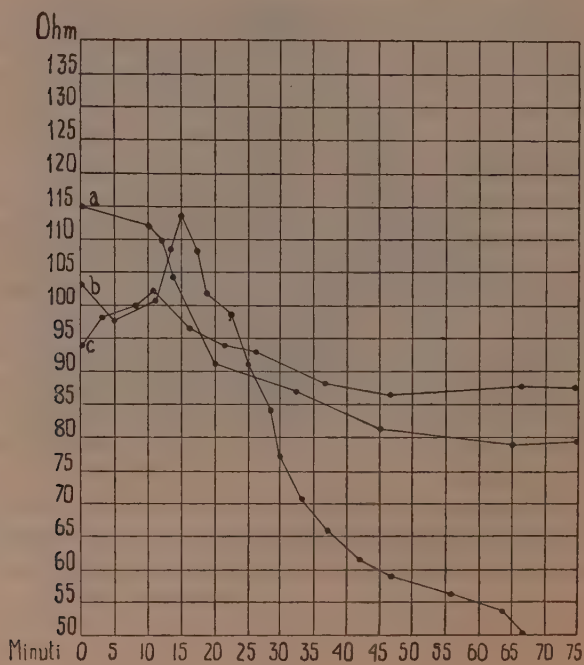


Fig. 5.

4. La resistenza elettrica del diaframma di gatto, sottoposto all'azione del cloroformio (liquido di Ringer saturo di cloroformio) e dell'alcool etilico (soluzione al 5 % di alcool etilico a 96° in liquido di Ringer) a temperatura costante (27° C), presenta un evidente e piuttosto rapido aumento (maggiore nel caso del cloroformio), cui segue, col tempo, una caduta (molto rapida nel caso del cloroformio) come nelle curve di resistenza del muscolo in funzione del tempo (v. fig. 5: curve *a*, *b*, *c*).

Poichè l'aumento di resistenza elettrica del liquido di Ringer, dovuto alla presenza del cloroformio e dell'alcool nella concentrazione indicata, ammonta appena all'1,04 % e 1,06 % rispettivamente, l'aumento di resistenza che presenta il diaframma, per l'aggiunta dell'alcool e del cloro-

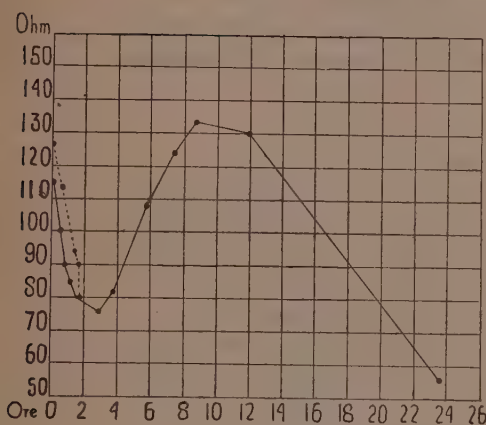


Fig. 6.

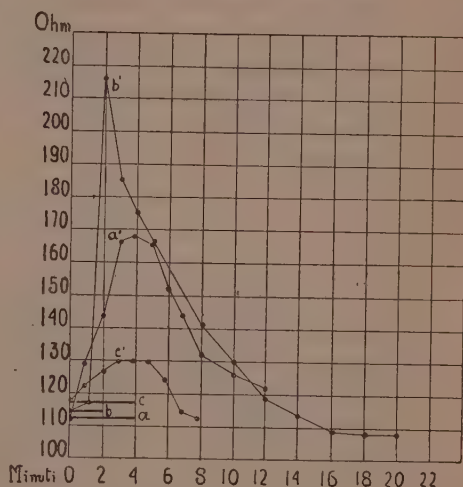


Fig. 7.

formio, va quasi interamente attribuito all'azione che queste sostanze esercitano sul muscolo.

5. La resistenza elettrica del diaframma di gatto, bagnato da liquido di Ringer o soluzione di NaCl 9 ‰, presenta, durante la stimolazione tetanizzante (2 accumulatori; DR = 100 mm.; durata della stimolazione 5''-6'', quanto basta per eseguire la determinazione), un aumento di circa il 6-7 %, in media, sul valore di resistenza dello stesso muscolo in riposo e alla stessa temperatura.

Detto aumento di resistenza si osserva soltanto sul preparato fresco e a temperatura nè troppo alta nè troppo bassa (15°-39° C); due ore dopo che il muscolo è stato separato dal corpo dell'animale (v. fig. 6) o a una temperatura superiore a 43° C, la resistenza elettrica del muscolo, durante la stimolazione, resta invariata.

6. La resistenza elettrica del diaframma di gatto, bagnato da liquido di Ringer, aumenta rapidamente con la durata della stimolazione tetanizzante, fino a raggiungere un massimo, corrispondente a un valore variabile nei singoli esperimenti. Questo massimo dipende dallo stato di freschezza e dallo stato d'integrità fisiologica del muscolo, dopo che questo ha subito tutte le manipolazioni indispensabili per l'allestimento del preparato.

Raggiunto questo massimo, facendo cessare la stimolazione, si osserva che la resistenza elettrica diminuisce e ritorna quasi al valore che il muscolo presentava inizialmente, in condizione di riposo (v. fig. 7).

7. La resistenza elettrica della membrana diaframmatica di gatto presenta, per un raddoppiamento del suo spessore (sovrapposizione di due fette dello stesso diaframma), un aumento del 34,5 % circa, restando invariata la temperatura. Data la disposizione quasi perfettamente isometrica del muscolo, per la quale questo, contraendosi, è ben lontano dal poter mai raggiungere uno spessore doppio, gli aumenti di resistenza osservati non possono essere spiegati come dovuti ad aumento di spessore della membrana muscolare.

LEGGENDA DELLE FIGURE

Fig. — 3. Diaframma di gatto in soluzione NaCl 9 ‰.

a) Muscolo normale. — b) Muscolo normale. — a') Lo stesso muscolo a precedentemente riscaldato fino a 65° C. — c) Soluzione di NaCl 9 ‰.

Fig. 4. — Diaframma di gatto in liquido di Ringer.

a) Muscolo normale. — b) Muscolo normale. — c) Muscolo lasciato precedentemente 24 ore in liquido di Ringer.

Fig. 5.

a) Diaframma di gatto in liquido di Ringer. — b) Diaframma di gatto in liquido di Ringer saturo di cloroformio. — c) Diaframma di gatto in liquido di Ringer più alcool etilico.

Fig. 6. — Diaframma di gatto in liquido di Ringer.

I punti sulla linea tratteggiata corrispondono a valori ottenuti durante la stimolazione tetanica del muscolo. I punti della linea continua corrispondono prima a valori ottenuti durante il riposo e poi durante il periodo di inecitabilità del muscolo.

Fig. 7. — Diaframma di gatto in liquido di Ringer.

Le linee parallele all'ascissa (a, b, c), indicano, rispettivamente per ogni esperimento (a', b', c') la durata della stimolazione tetanica.

G. C.

ERRATA-CORRIGE

Questi « Rendiconti » vol. I, 1925, p. 372, invece di R si legga K; vol. II, p. 250, r. 17, invece di x, y, si legga x, y, z.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 20 dicembre 1925.

V. SCIALOJA, *presidente*

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sulle curve di livello costante degli integrali di Picard.* Nota del Socio Corrisp. FRANCESCO SEVERI.

1. Sopra una curva algebrica di genere $p > 0$ un integrale abeliano di 1ª specie è caratterizzato in modo invariantivo, rispetto alle trasformazioni birazionali, da un gruppo canonico di punti; sopra una superficie algebrica di genere geometrico $p_g > 0$ un integrale doppio di 1ª specie è caratterizzato in modo invariantivo da una curva canonica. Nessuna caratterizzazione, mediante un ente geometrico invariantivo, si conosceva invece fin qui per un integrale semplice di 1ª specie, appartenente ad una superficie $f(x, y, z) = 0$; giacchè i coefficienti dei dx , dy nel differenziale totale soggetto a integrazione, non hanno che un mero significato proiettivo e non invariante per trasformazioni birazionali.

Intraprendendo uno studio approfondito della condizione d'integrabilità per un differenziale totale di 1ª specie appartenente ad f , ho potuto arrivare alla desiderata caratterizzazione invariantiva di un integrale picardiano di 1ª specie.

Il teorema fondamentale da me dimostrato è il seguente: sia $P dx - Q dy$ un differenziale picardiano di 1ª specie appartenente ad una superficie algebrica $f(x, y, z) = 0$. Consideriamo su f le curve integrali dell'equazione differenziale $P dx - Q dy = 0$. Sono curve analitiche trascendenti. Si prova in primo luogo che non esistono punti comuni a queste curve; e resta così escluso che l'integrale $u = \int P dx - Q dy$ possa avere punti d'indeterminazione. In secondo luogo si dimostra che esiste un numero finito di curve integrali

dell'equazione $P dx + Q dy = 0$, che posseggono ciascuna un punto doppio⁽¹⁾. Questo numero è un invariante della superficie, di fronte alle trasformazioni birazionali. E precisamente eguaglia $I + 4$, dove I denota l'invariante di Zeuthen-Segre.

La proprietà è analoga ad una che sussiste per un integrale abeliano di 1ª specie u sopra una curva, $f(x, y) = 0$, di genere $p > 1$. L'equazione $u = \text{cost.}$ definisce su f un'involuzione trascendente γ , i cui punti doppi costituiscono il gruppo canonico individuato da u su f . I $2p - 2$ punti doppi di γ son punti di diramazione della funzione $x(t)$ a infiniti rami, definita dall'equazione $u = t$. In tal senso la loro considerazione si può far risalire a Riemann.

2. La dimostrazione del teorema enunciato viene da me conseguita per due vie che non sono sostanzialmente diverse: una, più analitica, fa esplicitamente capo alla condizione d'integrabilità; l'altra, più geometrica, mette meglio in luce l'aspetto invariante del processo dimostrativo. Accennerò a quest'ultima.

Fissato sulla superficie f un fascio generico H di curve di genere π , consideriamo il fascio Σ delle curve $u = \text{cost.}$ ($P dx + Q dy = 0$). Sopra una generica curva C di H , il fascio Σ stacca un'involuzione trascendente γ , i cui $2\pi - 2$ punti doppi, al variare di C in H , descrivono la curva algebrica D di contatto delle curve dei fasci H , Σ . La curva D passa pei punti base di H e pei punti doppi delle curve di H , Σ .

Supposto che H varii in una rete L generica, considereremo un'altra posizione H_1 di H e la curva di contatto D_1 dei fasci H_1 , Σ .

Le curve D, D_1 segano la jacobiana J della rete L nei gruppi G, G_1 dei punti doppi delle curve di H, H_1 e ulteriormente nello stesso gruppo Q di punti. Di più le D, D_1 incontran la curva C_1 , comune ai due fasci, nello stesso gruppo canonico K_1 di punti.

Fuori dei gruppi Q, K_1 , ad essi comuni, le D, D_1 si segano in Δ punti, che son doppi per le curve di Σ . Si contano allora agevolmente quanti sono questi punti, e si trova $\Delta = I + 4$.

Ognuno P dei punti doppi delle curve $u = \text{cost.}$ è caratterizzato dalla proprietà di appartenere al gruppo canonico individuato da u sopra una qualunque curva algebrica di f , uscente da P .

(1) Che il problema della determinazione di questi punti doppi sia algebrico, è pressochè evidente, perchè le loro coordinate soddisfanno alle equazioni algebriche

$$f = 0, \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Occorre però sceverare, tra le soluzioni di tali equazioni, quelle che non hanno carattere invariante.

Se si pone, come in Picard:

$$u = \int \frac{B dx - A dy}{f'_x} = \int \frac{C dy - B dz}{f'_y} = \int \frac{A dz - C dx}{f'_z},$$

ove $A = 0, B = 0, C = 0$ son superficie d'ordine $m - 2$, aggiunte alla f di ordine m , passanti rispettivamente per le rette all'infinito dei piani $x = \text{cost.}, y = \text{cost.}, z = \text{cost.}$, pei punti di contatto dei piani di questi fasci tangenti ad f , e seganti il piano all'infinito lungo la stessa curva d'ordine $m - 3$, si trova direttamente, mercè la condizione d'integrabilità ed il teorema di esistenza e unicità, che il gruppo dei punti doppi delle curve di livello dell'integrale u , è il gruppo definito dalle equazioni:

$$f = 0, \quad A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0,$$

fuori della linea all'infinito e della linea doppia di f .

3. Il numero dei punti doppi delle curve $u = \text{cost.}$ è espresso mediante un invariante numerico relativo di f ; cioè mediante un carattere che non rimane assolutamente immutato per tutte le trasformazioni birazionali, ma che invece aumenta di un'unità tutte le volte che s'introduce una curva eccezionale (trasformata di un punto semplice), diminuisce di un'unità tutte le volte che una siffatta curva sparisce.

Un breve esame mostra che ciò è ben d'accordo col modo di comportarsi dei punti doppi delle $u = \text{cost.}$ nelle trasformazioni birazionali di f .

4. Quanto precede si è detto nell'ipotesi implicita che il numero dei punti doppi delle curve $u = \text{cost.}$ fosse finito.

Se il numero dei punti doppi delle curve di livello di un integrale semplice di 1^a specie u , appartenente ad una superficie f , è infinito, valgono le proprietà seguenti:

a) O l'integrale u è costante lungo le curve di un fascio irrazionale di genere $\rho > 1$, ed allora i punti doppi delle sue curve di livello son distribuiti lungo $2\rho - 2$ curve del fascio.

b) Oppure u non è costante lungo le curve di un fascio ed allora i punti doppi delle sue curve di livello son distribuiti sopra curve algebriche che fanno parte di una curva canonica di f . Ciascuna di queste curve algebriche è isolata (non suscettibile di variare con continuità) e appartiene ad una curva di livello di u (come componente doppia). In particolare può trattarsi di una curva eccezionale (cfr. col n. 3).

Tutto questo si dimostra tenuta presente, da un lato, la proprietà da me altrove posta in rilievo che una curva algebrica lungo cui sia costante un integrale u , non può che esser isolata o variabile in un fascio irrazionale; e d'altro lato il fatto che la curva di contatto dei fasci $u = \text{cost.}$ $v = \text{cost.}$ corrispondenti a due integrali picardiani di 1^a specie, funzional-

mente indipendenti, è una determinata curva canonica (che annulla il determinante jacobiano di u, v rispetto ad x, y). Di questa curva di contatto fanno parte evidentemente i luoghi di punti doppi per curve $u = \text{cost.}$ o $v = \text{cost.}$

5. A questo punto un'analisi lunga e approfondita che qui non posso per ragioni di spazio neppur riassumere, giacchè in essa occorre distinguere il caso in cui tutti gl'integrali di f son funzioni di uno di essi (la superficie contiene un fascio irrazionale di genere q eguale all'irregolarità), dal caso in cui l'irregolarità di f è $q = 2$, dal caso infine in cui $q \geq 3$, mi conduce al risultato fondamentale:

Un integrale semplice di 1ª specie, u , sopra una superficie, è individuato dai punti doppi delle sue curve di livello, sieno essi in numero di $1 + 4$ od in numero infinito; individuato nel senso che ogni altro integrale avente gli stessi punti doppi differisce da quello per una costante moltiplicativa e per una additiva.

Dirò soltanto che, nei casi più generali, che son quelli in cui le curve $u = \text{cost.}$ posseggono un numero finito di punti doppi ovvero quello in cui ne posseggono infiniti distribuiti lungo curve isolate, che non esauriscano un'intera curva canonica, giuoca in modo essenziale la considerazione della curva di contatto dei fasci $u = \text{cost.}, v_0 = \text{cost.}$, ove v_0 sia un altro integrale distinto da u . Nei punti di questa curva si toccano le curve $u = \text{cost.}, v_0 = \text{cost.}, v_0 + \lambda u = \text{cost.}$, che passano per essi; e ciò qualunque sia il parametro λ . Si prova così che un punto generico di una parte irriducibile Λ_0 di quella curva di contatto, che non sia luogo di punti doppi per curve $u = \text{cost.}, v_0 = \text{cost.}$, è punto doppio per una conveniente curva $v_0 + \lambda_0 u = \text{cost.}$, ove il parametro λ_0 è funzione del punto variabile su Λ_0 .

Ne segue che, al variare di λ , le curve di livello dell'integrale $v_0 + \lambda u = \text{cost.}$, hanno almeno un punto doppio variabile su Λ_0 , senza che Λ_0 sia componente doppia di una di quelle curve di livello; epperò su Λ_0 si ha una serie lineare g^1_2 i cui gruppi son costituiti dai $\delta (\geq 1)$ punti doppi di curve $v + \lambda u = \text{cost.}$, variabili su Λ_0 insieme a λ . Ciò significa che gl'integrali distinti u, v non possono avere gli stessi punti doppi.

Ecco dunque come resta invariantivamente caratterizzato un integrale di Picard della 1ª specie: dall'insieme dei punti doppi delle sue curve di livello, sieno essi in numero finito od infinito.

6. Un'altra questione si presenta. Possono tutti gl'integrali semplici di 1ª specie di f aver le proprie curve di livello con infiniti punti doppi? Si dimostra che:

Eccetto il caso in cui la superficie f , d'irregolarità q , possiede un fascio irrazionale di genere q , in tutti gli altri casi le curve di livello di un generico integrale semplice di 1ª specie di f , hanno un numero finito di punti doppi. Si prova altresì che non può mai esistere alcun punto di f che sia doppio per le curve di livello di ogni integrale della superficie.

7. Inoltre:

Escluso il caso in cui f possiede un fascio Φ di genere q eguale all'irregolarità, nel qual caso le curve luogo di punti doppi degli integrali semplici di 1^a specie di f , costituiscono la serie canonica di Φ ; in tutti gli altri casi la varietà W dei punti doppi delle curve di livello predette, è una varietà razionale ∞^{1-1} di gruppi di $1 - 4$ punti, tra i quali non ve n'è alcuno fisso.

Essa è l'analoga della serie canonica sopra una curva.

8. Nulla si sa della teoria delle serie di gruppi di punti sopra una superficie. Il problema è di definire tali serie in guisa che abbian la più stretta analogia possibile colle serie lineari sopra una curva; e soprattutto in modo che valga il teorema dell'unicità della serie completa, individuata da un gruppo di punti; e che la serie sia collegata a funzioni razionali del punto della superficie.

Penso che i risultati di questo lavoro contribuiranno a richiamar l'attenzione dei geometri su tale importante argomento.

Ed anche in questo intento ho approfondito le proprietà della serie W , la quale è indubbiamente il tipo delle serie di gruppi di punti, che sopra una superficie convien di assumere come analoghe delle serie lineari sopra una curva, giacchè essa presentasi in modo spontaneo e naturale, come analoga della serie canonica sopra una curva.

Una prima osservazione è che la serie razionale W può anche esser lineare⁽¹⁾. Questo accade allorchè ogni integrale di f ha le sue curve di livello con un numero finito di punti doppi, poichè allora W è in corrispondenza birazionale senza eccezione col sistema lineare degli ∞^{1-1} integrali.

Da ciò non consegue senz'altro che W debba aver carattere involutorio. Questo carattere non spetta neppure necessariamente ad una varietà lineare di gruppi di punti sopra una curva: p. es. entro una serie lineare ∞^3 , sopra una curva, vi sono varietà lineari ∞^2 , che non sono serie lineari; quelle che corrispondono a superficie di Veronese. Si prova però, nel fatto, che W ha carattere involutorio.

Una seconda osservazione è che la varietà W può generarsi come il luogo dei gruppi di una g^1_{1-1} razionalmente individuata sopra una curva (canonica) variabile in un sistema lineare ∞^{2-2} , o, come il luogo di un gruppo di punti, razionalmente dato sopra una curva di un sistema lineare ∞^{1-1} .

Le curve (canoniche) di contatto delle curve di livello degli integrali semplici di 1^a specie, considerati a 2 a 2, sono $\infty^{2(1-2)}$: per ogni gruppo

(1) Ho altra volta introdotto il concetto di ordine, in senso invariantivo, di una varietà. È l'ordine minimo della varietà (senza punti multipli) cui la data si può riferire birazionalmente senza eccezioni. Una varietà lineare è, in questo senso, una varietà del 1^o ordine. Si badi però che una varietà del 1^o ordine non è necessariamente lineare in senso proiettivo (cioè una varietà piana). Così p. es. la superficie di VERONESE è una varietà di 1^o ordine in senso invariantivo, ma non in senso proiettivo.

di $I + 4$ punti appartenenti a W , passano ∞^{i-2} di tali curve, costituenti uno S dei sistemi lineari cui allude il precedente teorema.

Sicchè il sistema lineare S possiede $I + 4$ punti base, costituenti, su ciascuna curva Λ del sistema, un gruppo della relativa g_{I+4}^1 . Così sulla g_{I+4}^1 della curva Λ variabile in S resta razionalmente fissato un gruppo. E ciò d'accordo colla razionalità di W .

Giacchè non è detto affatto che il luogo dei gruppi di una serie lineare razionalmente fissata su di una curva mobile in un sistema lineare sopra una superficie, sia sempre una varietà razionale. Occorre (e basta) perciò che su ogni serie si possa fissare razionalmente un gruppo!

La varietà W si ripartisce in $\infty^{2(i-2)}$ serie g_{I+4}^1 ciascuna delle quali è definita come luogo dei gruppi di punti doppi delle curve di livello di un fascio d'integrali. Ebbene è chiaro che *due di queste g_{I+4}^1 non possono avere più di un gruppo comune*. Il che però non esclude che su una generica Λ dal sistema S possano esistere due o più (ma sempre generalmente un numero finito) di quelle g_{I+4}^1 . Le g_{I+4}^1 appartenenti ad una medesima Λ , non hanno alcun gruppo comune.

Altre proprietà di W si ottengono ricorrendo ad una nota rappresentazione iperspaziale già usata da Castelnuovo eppoi da Comessatti e da Rosenblatt. Si ottengono altresì nuove disuguaglianze fra gl'invarianti d'una superficie irregolare.

Ma di ciò in una Memoria più ampia, ove verrà sviluppata con tutti i dettagli la presente Nota, e dove spero di poter esporre i fondamenti di una teoria della serie di gruppi di punti sopra una superficie.

Fisica. — *Potere termoelettrico e coefficiente di Hall.* Nota del Socio O. M. CORBINO.

1. — Sono note le rimarchevoli corrispondenze che presentano i conduttori fra il loro potere termoelettrico e il coefficiente del fenomeno di Hall.

La teoria elettronica prevede tale corrispondenza, anzi la disciplina in modo semplice e preciso, che non trova però esatto riscontro nei fatti sperimentali. Si ha infatti come espressione del potere termoelettrico E di due metalli P e Q :

$$(1) \quad E = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{e} \log \frac{n_Q}{n_P}$$

dove $\frac{\alpha}{e}$ è il noto rapporto eguale in valore assoluto a 4.27×10^{-7} in unità elettrostatiche; n_P ed n_Q denotano le concentrazioni elettriche nei metalli P e Q .

Si ha inoltre per il coefficiente di Hall R

$$(2) \quad R_P = \frac{c}{n_P e} \quad , \quad R_Q = \frac{c}{n_Q e}$$

dove c è il rapporto delle unità elettromagnetica, ed elettrostatica di elettricità, e si suppone che e sia misurato come nella precedente formola in unità elettrostatiche.

Risulta dalle formule precedenti la seguente relazione fra il potere termoelettrico di due metalli e i rispettivi coefficienti di Hall:

$$(3) \quad E_{P,Q} = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{e} \log \frac{R_P}{R_Q} .$$

Questa relazione, come è stato altra volta osservato⁽¹⁾, è lungi dall'essere verificata quantitativamente per metalli diversi. Così il rapporto vero dei coefficienti di Hall per i metalli bismuto e rame, è circa quattro mila volte maggiore di quello calcolabile con la formola precedente, partendo dal potere termoelettrico fra gli stessi metalli. È noto del resto che nei riguardi non solo dell'entità ma anche del segno del fenomeno di Hall, si incontrano difficoltà ben più gravi per la spiegazione di questo fenomeno con la teoria che ammette l'esistenza di una sola specie di elettroni e su cui si fonda la formola (2).

Accantonando queste difficoltà pregiudiziali è parso che una parziale verifica della (3) si possa avere ricorrendo a un unico metallo in due stati diversi anzichè a due diversi metalli. Così è noto che nei campi intensi si modifica il potere termoelettrico di un metallo e per alcuno anche il valore del coefficiente di Hall. Attribuendo questi mutamenti a variazioni nel numero di elettroni che sarebbero prodotte dal campo, si può tentare la verifica della (3) ponendo al posto di $E_{P,Q}$ la variazione che subisce il potere termoelettrico dello stesso metallo tra i valori H e 0 del campo, cioè $E_H - E_0$, e nel secondo membro invece di R_P, R_Q i valori R_H e R_0 che assume R in un campo intenso H e in un campo piccolissimo, quasi nullo.

Tale ricerca è stata compiuta recentemente dal prof. Heaps⁽²⁾, il quale ritiene di aver verificata la formola

$$(4) \quad E_H - E_0 = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{e} \log \frac{R_0}{R_H}$$

per il fatto che il diagramma che lega $E_H - E_0$ e $\log R_H$ ha nel caso del bismuto un andamento lineare decrescente.

(1) CORBINO, « Rend. Lincei », vol. XXIX, 2° sem., p. 282, 1920.

(2) HEAPS, « Phil. Mag. », vol. 50, p. 1001, 1925.

Io avevo invece affermato, a proposito di alcune ricerche analoghe del prof. La Rosa, che siccome dal segno di $E_H - E_o$ (aumento del potere termoelettrico fra bismuto e rame per effetto del campo) si deduce che il numero di elettroni liberi nel bismuto *decresce* col campo, si dovrebbe verificare, in base alla (2) un aumento della costante di Hall al crescere del campo, ciò che come è noto è contrario all'esperienza.

Il prof. Heaps conferma che il potere termoelettrico bismuto-rame aumenta col campo e che il coefficiente di Hall del bismuto decresce col campo medesimo, ma ritiene verificata qualitativamente la (4).

La contraddizione è patente fra le due affermazioni; essa pare a me che sia dovuta a una svista del prof. Heaps nella applicazione della formola (4).

Si osservi infatti che il potere termoelettrico del rame rispetto al bismuto si suole assumere come positivo, nel senso che la corrente termoelettrica va dal bismuto al rame attraverso alla saldatura calda. Volendo tener conto esatto del segno, la formola (1) va scritta così:

$$E_{P,Q} = V_Q - V_P = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{e} \log \frac{n_P}{n_Q}$$

purchè però si tenga presente che e , carica dell'elettrone, è *negativo*. E perciò tra bismuto e rame si avrà

$$E_{Bi,Cu} = V_{Cu} - V_{Bi} = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{e} \log \frac{n_{Bi}}{n_{Cu}} > 0$$

ciò significa anche che una corrente che vada dal rame al bismuto riscalda, per effetto Peltier, la saldatura.

Ne risulta

$$n_{Cu} > n_{Bi}.$$

È la grandezza $V_{Cu} - V_{Bi}$, positiva, che aumenta al crescere del campo magnetico nel quale è immersa la coppia.

Posto perciò

$$E_{Bi,Cu} = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{e} \log \frac{n'_{Bi}}{n_{Cu}}$$

dove $E'_{Bi,Cu}$ e n'_{Bi} rappresentano i valori di $E_{Bi,Cu}$ e di n_{Bi} nel campo H , l'esperienza dice che è

$$E'_{Bi,Cu} - E_{Bi,Cu} = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{e} \log \frac{n'_{Bi}}{n_{Bi}} > 0$$

cioè che n_{Bi} diminuisce col campo.

Pertanto la formola (3), nella quale al rapporto $\frac{n'_{Bi}}{n_{Bi}}$ è sostituito il rapporto inverso $\frac{R_o}{R_H}$, va interpretata tenendo presente che e è implicitamente negativo. Ne risulta che dovrebbe essere

$$R_o < R_H$$

ciò che è contrario all'esperienza.

Pertanto la verifica tentata dal prof. Heaps avrebbe dovuto condurre per il bismuto a una relazione lineare fra $E_H - E_o$ e $\log R_H$, ma in senso crescente e non, come nella figura della sua Memoria, a un diagramma rettilineo *discendente*. E perciò, ben più che la forte divergenza quantitativa già segnalata dal prof. Heaps circa il valore del coefficiente angolare della retta diagramma, si ha una vera contraddizione qualitativa fra l'esperienza e la teoria; e cioè mentre il potere termoelettrico e il coefficiente di Hall dovrebbero mutare nello stesso senso, in realtà l'uno cresce e l'altro diminuisce al crescere del campo.

Una contraddizione qualitativa analoga si può trovare, in base alle esperienze del prof. Heaps, per la grafite. Solo l'antimonio sfugge alla contraddizione, ma proprio per questo metallo si ha la più grave difficoltà nel segno positivo del coefficiente di Hall, che è inconciliabile con la formola (2) della teoria elettronica nella sua forma più semplice.

2. — Non ricorrendo ai fenomeni galvanomagnetici, un confronto fra la teoria elettronica e l'esperienza fu fatto dal prof. La Rosa nei riguardi dell'azione che il campo magnetico esercita sulla conducibilità elettrica e sul potere termoelettrico dello stesso metallo (bismuto).

Come ho notato nella nota sopra riferita la verifica quantitativa della previsione teorica quale fu trovata dal La Rosa non è persuasiva. Si hanno infatti per la variazione del numero di elettroni col campo e per la variazione di conducibilità due curve ad andamento del tutto diverso.

Il La Rosa⁽¹⁾ ha tentato di eliminare la discordanza assumendo per il potere termoelettrico un valore diverso da quello che io avevo adottato (77 microvolt per grado). E infatti assumendo il valore 130 μV trovato dal Lownds per una lamina cristallina di bismuto e nel senso parallelo all'asse la discordanza sparisce.

Non sarà inutile rilevare che assumere come potere termoelettrico del bismuto fuso il massimo dei valori trovati per una lamina cristallina nel senso dell'asse è per lo meno arbitrario. Tutte le determinazioni finora eseguite per il bismuto fuso danno risultati che non differiscono molto fra loro, e tutte inferiori al valore di 77 microvolt, che, io scelsi appunto

(1) LA ROSA, « Rend. Linc. », vol. 30, 2° sem., p. 57, 1921.

perchè il più sfavorevole alla mia tesi. Tale valore è anche il valore medio, all'incirca, tra quelli trovati da Perrot parallelamente e perpendicolarmente all'asse. Ritengo pertanto di non aver nulla da mutare alle conclusioni del mio precedente lavoro.

Fisica. — *Nuovo metodo di studio sui risultati delle esperienze.*
Nota del Socio MICHELE CANTONE.

Nell'esame dei risultati di una ricerca sperimentale, non sempre si segue l'indirizzo più adatto a mettere in luce lo svolgersi delle proprietà dei corpi che prendono parte al fenomeno in esame, poichè lo sperimentatore si appaga se riesce a trovare una relazione analitica che serva ad individuare la legge del fenomeno con buona approssimazione e di fornire in conseguenza particolari parametri, o se i risultati ottenuti gli consentono di rappresentare la legge del fenomeno mediante diagrammi, i quali in alcuni casi possono essere automaticamente registrati con opportune disposizioni sperimentali. Il primo metodo fu seguito su larga scala dai Fisici nella seconda metà del secolo scorso sulle orme dei poderosi lavori del Regnault ed aveva lo scopo di apprestare elementi caratteristici delle varie sostanze nella ipotesi implicita che fosse sempre possibile operare su materiali tipici; il secondo, più recente, fu adottato prima a preferenza dai Fisici inglesi ed è venuto generalizzandosi ai nostri giorni perchè permette un esame generale dei caratteri dei fenomeni o delle proprietà di determinati corpi, anche nei casi in cui una rappresentazione analitica presenta gravi difficoltà per la natura complicata, e talvolta discontinua, della legge che si vuol mettere in evidenza, come, ad esempio, accade nelle indagini sui processi ciclici.

I due metodi, dal punto di vista di una rappresentazione fedele, sono entrambi difettosi, giacchè d'ordinario la ricerca di una relazione analitica porta a forzare lo schema formale scelto ad adattarsi ai risultati dell'esperienza a furia d'introdurre nuovi coefficienti, secondo l'uso non ancora abbandonato da alcuni Fisici e da non pochi Tecnici, quando non capiti la fortuna d'imbattersi in una legge effettivamente semplice; e d'altro canto una pura rappresentazione geometrica non è scevra dalle incertezze derivanti dal tracciamento di una curva che debba passare per determinati punti, non ben precisati per giunta a causa degli errori inevitabili da cui sono affetti i risultati sperimentali, e dà luogo altresì in alcune applicazioni ad apprezzamenti di poco rilievo ove non si abbiano spiccati caratteri per individuare, sia pure qualitativamente, la legge del fenomeno.

Senza dubbio un sistema di rappresentazione basato sul tracciamento dei diagrammi, per dedurre le tabelle numeriche in cui ad uguali intervalli della variabile si avrebbero i successivi valori della funzione, è sempre

affetto dalle incertezze dianzi cennate, ma se si procede alla rappresentazione delle differenze di questi successivi valori, i nuovi diagrammi, qualora non presentino particolari modalità che appaiano inerenti alla natura del fenomeno, possono servire assai bene a togliere le piccole incertezze da attribuirsi alle imperiezioni del disegno ed agli errori casuali, onde può procedersi, sulla guida del nuovo diagramma ad un ritocco del primitivo e nello stesso tempo, anche direttamente, al lavoro di revisione della tabella, che meglio di qualunque rappresentazione sintetica, e con assai maggiore prontezza, giova in pratica ad ottenere per interpolazione valori sicuri.

Di quale vantaggio sia stato l'uso dei diagrammi corrispondenti alle derivate ho potuto accertare in occasione di esperienze compiute nel laboratorio da me diretto. Basterà che mi riferisca alle ricerche eseguite dal prof. del Regno ⁽¹⁾ e dalla signorina De Negri ⁽²⁾ sulle variazioni di resistenza del nichel nello stato ricotto e nelle varietà incrudite al variare della temperatura, essendosi ottenuti diagrammi primitivi con accenno ad una modificazione dell'andamento della curva rappresentatrice della variazione totale di resistenza in funzione della temperatura in un intervallo termico compreso fra 300° e 400°, dove le varie curve presentano un flesso, mentre i rapporti incrementali avutisi per siffatta funzione diedero in modo netto, per tutte le varietà di nichel, un andamento continuo fino a 360° e da questo punto una discesa rapida per l'ultima parte della curva, in guisa da prodursi un salto brusco nelle proprietà dei vari campioni in un *punto di Curie* indipendente dalle condizioni di struttura determinate dai vari processi di incrudimento del nichel.

Ma più interessante ancora fu il caso occorso in una ricerca della signorina Pagliarulo ⁽³⁾ cui era stato affidato il compito di studiare la *dispersione rotatoria* delle due varietà di asparagina: essendosi trovato un massimo del potere rotatorio in corrispondenza alla lunghezza d'onda di circa 5300 U. Å. tanto per la destrogira che per la levogira, e per le tre concentrazioni adoperate dei due isomeri, fui indotto a pensare che il fatto potesse dipendere dall'esistenza di un particolare vibratore nell'anzidetta regione spettrale; se non che, esaminata la dispersione ordinaria, con uno spettrometro che consentiva per il valore dell'indice l'approssimazione di una unità nella quinta cifra decimale, per tutte le soluzioni adoperate nel precedente studio, tranne un'apparente lieve convergenza delle linee figurative degl'indici di rifrazione riferite alle lunghezze d'onda dalla parte dei valori più piccoli di λ , non si riscontrava indizio del flesso che in modo più o meno accentuato caratterizza l'esistenza di una banda di assorbimento; sicchè in verità venne fatta la ricerca di una qualche anomalia col metodo della

(1) « Rend. Acc. dei Lincei », febbraio 1925, p. 179.

(2) « Nuovo Cimento », luglio-agosto-settembre 1925, p. .

(3) Il lavoro sarà pubblicato quanto prima nel « Nuovo Cimento ».

derivata con poca speranza di riuscire. Tuttavia il risultato dell'esame pose in piena luce l'esistenza di un ripiano in tutte le curve rappresentatrici del *gradiente* dell'indice rispetto alla lunghezza d'onda, ad eccezione della curva relativa all'acqua, e con questo di più che il ripiano si presentava per lo stesso campo di lunghezza d'onda sul quale sensibilmente capitava il massimo del potere rotatorio di tutte le soluzioni studiate, vale a dire nel campo spettrale in cui la derivata dell'indice deve annullarsi. Ed è questo un richiamo degno di nota anche per la circostanza che l'annullarsi della derivata fornisce un criterio più sicuro per l'accertamento del valore della variabile cui corrisponde il massimo quando la curva rappresentatrice non sia simmetrica rispetto all'ordinata massima, in quanto non si riesce a trovare con pari facilità il punto più elevato di una linea, in ispecie se la curvatura è piccola nella regione in esame, laddove ad individuare il punto d'incontro della linea rappresentatrice della derivata coll'asse delle ascisse concorrono i punti segnati a destra e a sinistra di quello d'incontro.

Naturalmente quanto sopra si è messo in rilievo suppone che si abbia una rappresentazione fedele della legge che si vuole studiare, e quindi che non solo la massima cura sia posta nell'eseguire le esperienze, ma che i dati da servire di guida nel tracciamento delle curve vengano dedotti dalle medie di misure fatte in condizioni del tutto indipendenti; e nei casi anzidetti si è avuta la fortuna di usufruire di ottimi elementi forniti da abili sperimentatori, anche nei casi i risultati numerici erano compresi entro limiti assai ristretti.

Solo quando si disponga di dati sicuri si potrà comprendere l'importanza del metodo su cui richiamo l'attenzione degli sperimentatori o di coloro che ai grafici ricorrono per la rappresentazione di leggi di carattere statistico, perchè, come avanti ho mostrato, si hanno talvolta nell'andamento di una curva accidentalità che non si manifestano all'occhio dell'osservatore e che potrebbero in alcuni casi avere notevole importanza, o si ha da fare con una visibile variazione nell'andamento, ma non si sa precisare il valore della variabile per cui si passa da uno ad altro regime. A tali manchevolezze suppliscono le curve rappresentatrici dei gradienti delle grandezze fisiche, poichè i valori delle derivate sono in istretta connessione con proprietà attuali dei corpi nelle singole fasi del processo che si considera, mentre i valori della grandezza in esame racchiudono spesso, per ogni punto del campo di variazione la storia del precedente processo e quindi acquistano il carattere di enti subordinati ad una legge ereditaria.

Ciò si desume dagli studi delle grandezze elettromagnetiche (quali la induzione elettrostatica, o la magnetica, o la resistenza elettrica, o il potere termoelettrico), o delle grandezze calorimetriche, o delle dilatazioni termiche, o dell'indice di rifrazione, o delle deformazioni elastiche, vale a dire delle grandezze che compaiono in tutti i rami della fisica; donde la necessità di un lavoro di revisione di studi già compiuti e che potrebbero racchiudere fatti nuovi o non bene accertati nei loro caratteri essenziali.

Per citare un esempio di modalità non prima esplorate voglio accennare alle curve tanto caratteristiche dei processi ciclici di magnetizzazione per i quali si hanno le note curve ad un cappio figurative dei fenomeni di isteresi magnetica e quelle a due cappi a forma di ali che compaiono nello studio dei processi magnetoelastici di torsione: ebbene, se si prova a tracciare le curve rappresentatrici della derivata dell'intensità magnetica in funzione delle forze magnetizzanti si ritrovano le curve a due cappi del secondo tipo di fenomeni, ed in ciò probabilmente si ha una manifestazione del nesso esistente fra i processi elastici ed i magnetici.

Non faccio qui che citare uno schema di relazioni che potrebbero stabilirsi se con giusto criterio si applicassero le nuove vedute sull'esame dei risultati di una ricerca; senza per altro avere la pretesa d'indicare per ora determinati legami fra i due ordini di fatti, ma credo che non sia superfluo l'accenno datone perchè non è escluso si abbiano risultati importanti anche in quest'ordine di considerazioni e si estenda la cerchia delle applicazioni del calcolo differenziale allo studio delle grandezze fisiche.

Biologia. — *La 1^a Coniugazione accessoria tra Gameti impuri in « Cryptochilum echini » Maupas.* Nota del Socio Corrispondente
ACHILLE RUSSO.

In una Nota, pubblicata in questi « Rendiconti » ⁽¹⁾, ho trattato dei *Gametogeni impuri* e delle divisioni, che essi compiono per formare *Gameti impuri*. Tali forme, che rimangono fuori del *ciclo principale* del nostro Ciliato, e che sono destinate a formare un *ciclo accessorio*, si distinguono dalle forme pure, perchè in esse il micronucleo ha origine dal micronucleo globuliforme del Gamete puro originario, mentre il macronucleo deriva dal micronucleo virgoliforme ⁽²⁾.

Come esposi nella prima delle Note avanti citate, i *Gametogeni impuri* compiono due divisioni, con modalità tutt'affatto diverse per i processi divisori, che si avverano nei micronuclei. Nel micronucleo dell'individuo, segnato con A¹, la divisione avviene con processo mitotico e fra i due micronuclei derivati si costituisce un *filamento siderofilo*, che, in seguito, viene riassorbito, mentre, nel micronucleo dell'individuo indicato con B¹, la divisione si compie per amitosi, senza formazione di filamento interposto.

(1) Russo A., *I Gametogeni impuri, i Gameti impuri e le Coniugazioni accessorie in « Cryptochilum echini » Maupas.* « Rendic. R. Accad. Nazion. dei Lincei », vol. I, ser. 6^a, 1^o sem. 1925.

(2) Russo A., *Sulla diversa costituzione dei due Gameti puri in « Cryptochilum echini » Maupas, risultante dall'analisi delle successioni nucleari, e sulla prevalenza del micronucleo globuliforme*, ibidem, vol. XXXIII, ser. 5^a, 2^o sem. 1924.

I *Gameti impuri*, formatisi con la 1^a divisione dei Gametogeni, hanno il micronucleo rotondeggiante, e possono fra loro coniugare, dando luogo alla 1^a *Coniugazione accessoria*, o pure possono dividersi e dar luogo ad altri *Gameti impuri*, che si distinguono dai primi per avere il micronucleo allungato, piriforme o spiniforme. Tali *Gameti impuri* possono anche coniugarsi, formando la 2^a *Coniugazione accessoria*.

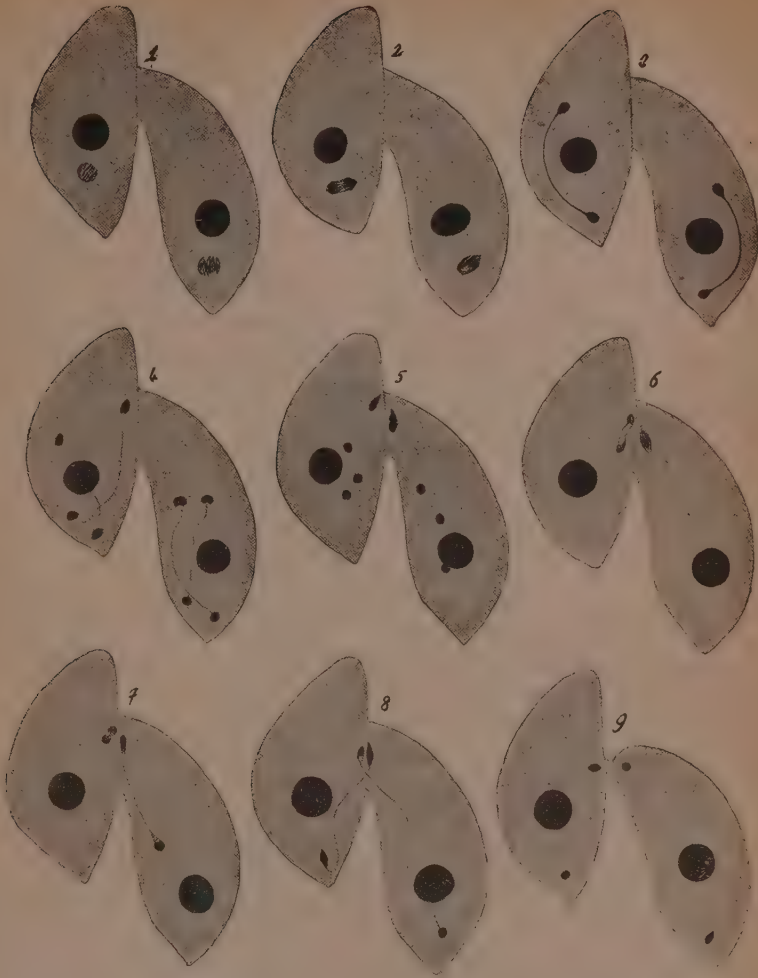
In questa Nota tratto i particolari processi nucleari, che si avverano durante la 1^a *Coniugazione accessoria*, rimandando ad altra Nota le modalità, con le quali dai *Gameti impuri* si ricostituiscono nuovi *Gameti puri*.

I due *Gameti impuri*, che si accoppiano per formare la 1^a *Coniugazione accessoria*, hanno il micronucleo globuliforme, situato nella regione posteriore, vicino il macronucleo. Come si è rilevato nella Nota già citata, il micronucleo in ciascun Gamete ha una diversa costituzione per la diversa quantità di sostanza nucleare, in esso contenuta. Difatti, mentre nel *Gamete impuro*, che deriva dal *Gametogene impuro* A¹, il micronucleo è $\frac{1}{16}$, in quello che deriva dal *Gametogene* B¹, è $\frac{1}{32}$ del micronucleo dei *Gameti puri*, dai quali provengono. In entrambi i *Gameti impuri* il macronucleo ha lo stesso valore, essendo $\frac{1}{8}$ del micronucleo originario. In base a tali constatazioni di fatto, può affermarsi che anche nei *Gameti impuri*, che compiono la 1^a *Coniugazione accessoria*, l'apparato nucleare si può riferire alla formola $N = \frac{n}{2}$, essendo l'uno la metà dell'altro.

Le prime fasi di questa coniugazione accessoria in *Cryptochilum echini* non sono diverse da quelle osservate dalla maggioranza dei ricercatori in altre specie di Ciliati; solo la fase finale ne è diversa, perchè, dopo lo scambio dei *nuclei migratori*, non si ha *cariogamia* con il *nucleo stazionario*.

Ciascun micronucleo, nei due *Gameti impuri* coniugati, compie una prima divisione con processo mitotico ordinario; la cromatina, da prima granulare, si conforma in un filo ravvolto su sè stesso, che poi si divide in frammenti. Questi ben presto si portano ai due poli del nucleo, dando origine ad una figura di *diaster*, in cui la cromatina, distinta prima in granelli o in esili filamenti, successivamente si presenta compatta. Ai due estremi della figura nucleare, che a poco a poco diventa molto allungata, si osservano due globi di sostanza fortemente colorata in nero, nei preparati ottenuti con l'Ematossilina ferrica, riuniti da un filamento sottile, anche colorato in nero; più o meno lungo, secondo lo stato più o meno avanzato della divisione (figg. 1, 2 e 3).

I due primi nuclei così formati, resi indipendenti per riassorbimento del filo mediano, compiono ognuno per proprio conto, in ciascun Gamete, una seconda mitosi, con identico processo, per cui nel corpo cellulare di ciascun Gamete, dopo qualche tempo, si osservano quattro nuclei, ognuno dei quali è circondato da un vacuolo, riuniti due a due da un esile filamento. Le due coppie di nuclei sono disposte lungo l'asse maggiore di



Stadii della 1ª Coniugazione accessoria fra Gameti impuri

1. Il micronucleo inizia la 1ª mitosi e conforma la sua cromatina in fili.
2. Distribuzione della cromatina ai poli del fuso acromatico.
3. I nuclei figli, dopo la 1ª divisione.
4. Stadio finale della 2ª divisione. Le due coppie di nuclei in ciascun Gamete si dispongono lungo l'asse maggiore.
5. I nuclei anteriori (superstiti) si sono situati nel punto d'unione dei Gameti. Gli altri nuclei si raccolgono vicino il Macronucleo.
- 6-7. I nuclei superstiti si dividono con celerità diversa.
8. Migrazione e scambio dei nuclei.
9. I due coniuganti, dopo lo scambio dei nuclei migranti, stanno per separarsi per passare allo stato di exconiuganti.

ciascun Gamete e sono quasi parallele fra loro, di modo che due nuclei sono in avanti del macronucleo, in corrispondenza del punto in cui i due Gameti sono uniti, e due sono indietro (fig. 4).

Le due mitosi, avanti descritte, si compiono contemporaneamente nell'uno e nell'altro Gamete, a differenza di quanto si avvera nei nuclei, durante la *Coniugazione vera* o *principale*, in cui, come si è detto in altra Nota ⁽¹⁾, le divisioni del micronucleo virgoliforme sono in arretrato rispetto a quelle del micronucleo globuliforme.

Nella coniugazione accessoria, in stadio successivo a quello avanti descritto, i fili che uniscono le coppie di nuclei, vengono riassorbiti, per modo che i nuclei stessi si presentano irregolarmente sparsi dentro il protoplasma. Due di essi però, uno in ciascun Gamete, propriamente quelli che erano vicino il tratto protoplasmatico di unione, che si possono chiamare *nuclei superstiti* e che sono gli anteriori in ciascuna delle due coppie, permangono nella loro posizione primitiva, dove compiono una *terza mitosi*. Gli altri nuclei, cioè tre per ciascun Gamete, si raccolgono vicino al macronucleo e ben presto scompaiono (fig. 5).

I due nuclei superstiti, posti, come si è detto, nel punto di unione dei Gameti, si situano l'uno di fronte all'altro per compiere la terza mitosi (fig. 6). Il processo divisorio in uno di tali nuclei si svolge più celere che nell'altro, di modo che, in un determinato momento, mentre uno di essi è completamente diviso ed ha assunto la forma finale molto allungata, l'altro è in fase di *diaster* ed è molto corto (fig. 7).

Anche nei nuclei superstiti, che compiono la terza mitosi, la cromatina da principio si mostra compatta, ma ben presto si differenzia in granuli, che si dispongono lungo i fili acromatici, che formano la figura del fuso.

In un primo momento tali granuli si dispongono all'equatore del fuso, ma poi si portano ai poli, dove si condensano per formare i nuclei figli, che hanno struttura compatta. Come si è detto, uno dei due nuclei superstiti si divide più celermente dell'altro; difatti, come si vede nelle figure qui annesse, mentre uno di essi, in un primo momento, è allo stadio di *piastra equatoriale*, l'altro è a quello di *diaster* (fig. 6), e successivamente, mentre questo si è molto allungato, per cui i due nuclei derivati sono lontani fra loro ed uniti da un lungo filamento, l'altro è molto raccorciato ed ancora allo stato di *diaster* (fig. 7). È da notare che la migrazione dei nuclei figli, derivati da questa mitosi, non si avvera, se il nucleo, che si divide con ritardo, non abbia anche esso raggiunto la fase finale.

La diversa celerità del processo divisorio di tali nuclei dipende, a mio giudizio, dalla loro differente origine. La stessa differenza è stata, infatti, rilevata nei micronuclei originari dei *Gameti puri*, durante la *Coniugazione*

(1) Cfr. Nota 2, avanti citata.

vera, nella quale si è osservato che il micronucleo globuliforme, che contiene maggiore quantità di sostanza nucleare, si divide più rapidamente del micronucleo virgoliforme, che ne contiene meno. È da ritenere che, anche nella 1^a *Coniugazione eccessoria*, il nucleo, che si divide più celermente, derivi da quello del *Gametogene impuro* A¹, che forma *Gameti impuri* con la sostanza del micronucleo ridotta ad $\frac{1}{16}$, mentre il nucleo, che compie la divisione in ritardo, derivi da quello del *Gametogene impuro* B¹, che forma *Gameti impuri* con micronucleo, avente la sostanza nucleare ridotta ad $\frac{1}{32}$.

Dopo che in ciascun Gamete, con la terza mitosi del micronucleo superstite, si sono costituiti due nuovi nuclei, essi si circondano di un vacuolo e rimangono uniti tra loro da un esile e lungo filamento, che si mette solo in evidenza con le sopracolorazioni all'*Ematossilina ferrica*. Uno di tali nuclei, in ciascun gamete, è posto anteriormente, nel tratto protoplasmatico, in cui essi sono accoppiati, l'altro nell'estremo posteriore, dietro il micronucleo.

In un primo momento, i due nuclei anteriori si situano l'uno di fronte all'altro (fig. 8), quasi a contatto fra loro, ma in seguito ciascuno di essi oltrepassa il setto divisorio comune dei due gameti per portarsi nell'individuo gametico opposto. Di tale scambievole passaggio furono seguiti tutti gli stadi, avendo osservato che da principio uno dei due nuclei s'insinua sotto l'altro, che rimane immobile, di modo che i due vacuoli, di cui sono circondati, in un momento determinato, ne formano uno solo. In seguito però, anche il nucleo rimasto immobile, si spinge verso il gamete opposto, talchè i fili, che uniscono le due coppie di nuclei, s'incrociano nel tratto protoplasmatico, dove i due gameti sono fra loro accoppiati.

Quando lo scambio dei nuclei migratori è avvenuto, il filamento connettivo è riassorbito dal protoplasma ed i due gameti si separano per passare allo stato di *exconiuganti* (fig. 9). Questi nuovi individui hanno anteriormente il *nucleo migrato*, che già apparteneva all'altro gamete, e posteriormente il nucleo proprio o *stazionario*. Successivamente questo si atrofizza, per cui nell'*exconiugante*, quando esso da poco si è reso indipendente, permane solo il nucleo anteriore, che, per qualche tempo, conserva la sua posizione primitiva. Solo tale nucleo, per successive divisioni, compie le ulteriori trasformazioni, che conducono alla formazione di *Gametogeni puri* e quindi di nuovi *Gameti puri*, come sarà esposto in altra Nota.

Da quanto sopra fu esposto, come chiaramente appare dalle figure inserite, risulta che la 1^a *Coniugazione accessoria* si compie mediante tre divisioni successive dei micronuclei dei due gameti impuri e che essa non ha altro ufficio che di sostituire in ciascun gamete un nucleo, diversamente costituito da quello proprio.

Quale sia il significato biologico di tale sostituzione, per quale intimo processo i gameti, che sono passati allo stato di *exconiuganti*, solo così

possono proseguire il loro ulteriore sviluppo, non è facile per ora potere rilevare (2).

Voglio in ultimo fare presente ancora una volta che nella *Coniugazione accessoria*, ora descritta, diversamente da quanto fu osservato nella maggioranza dei Ciliati, non si ha *cariogamia*. Il Dogiel (2), che in una recente Memoria ha tenuto presente la mia Nota del 1914, pur confermando alcuni risultati in essa esposti, non si accorda su tale punto; per cui debbo ritenere egli non abbia seguito il ciclo biologico, a dir vero assai complicato, di *Cryptochilum*. La documentazione che in tale forma di coniugazione il



Stadio finale della 1ª Coniugazione accessoria, in cui si osservano i *nuclei stazionarii*, posti all'estremo posteriore, poco colorati, mentre i nuclei migranti, posti nella regione anteriore, si dividono. Si osservi specialmente il nucleo migrante a destra in mitosi; quello di sinistra è fortemente colorato e non mostra ancora alcuna struttura. Zeiss oc. 4* comp. tubo alz. 18, piano tavolo. obb. 0.2 mm.

(1) La 1ª Coniugazione accessoria può avverarsi anche fra Gameti impuri, di cui uno ha due Macronuclei, l'altro uno soltanto. In questi casi, che sono rari ad osservarsi nei preparati, l'individuo con due Macronuclei è da ritenere che sia il *Gametogene impuro*, che funziona da Gamete, prima di dividersi. Di questa particolare coniugazione furono osservati vari stadi, specialmente quello iniziale, in cui i due micronuclei si dividono per mitosi e quello finale, in cui i due Gameti, dopo avere fornito il nucleo migrante, stanno per allontanarsi fra loro e passare ciascuno allo stato di *exconiugante*.

(2) «Archiv für Protistenkunde», Bd. 50. 1925.

nucleo migrante non si fonde con il *nucleo stazionario*, ma che esso solo prosegue il suo sviluppo ulteriore, per la formazione dell'apparato nucleare di *Gametogeni puri* e quindi di nuovi *Gameti puri*, si ha nello stadio finale, che qui riproduco. In questo stadio i due coniuganti non si sono ancora separati tra loro e già ciascun *nucleo migrante* inizia per proprio conto il processo di scissione, mentre il *nucleo stazionario*, posto all'estremo posteriore del *Cryptochilum*, è appena colorato e mostra evidenti i segni dell'atrofia. Tutto ciò non avverrebbe, ove questi due nuclei dovessero fondersi in ciascun coniugante, prima di passare allo stato di exconiuganti.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Intorno ad una proprietà dei determinanti simmetrici del 6° ordine.* Nota di BENIAMINO SEGRE, presentata dal Corrisp. GINO FANO.

1. H. W. RICHMOND in una breve Nota ⁽¹⁾, stabilisce la seguente bella proposizione:

Se in un determinante simmetrico del 6° ordine non nullo i 6 elementi principali sono tutti nulli, ed i 5 minori complementari di 5 di questi elementi pure si annullano, anche il minore complementare del rimanente elemento deve annullarsi.

La via che l'ottimo geometra segue per stabilire questa proposizione, non si può estendere al caso di determinanti simmetrici d'ordine qualunque ⁽²⁾. Però si verifica subito che *un'analogia proposizione vale per determinanti del 2° e del 4° ordine* ⁽³⁾.

Si potrebbe quindi presumere che *un'analogia proposizione valga per determinanti simmetrici di altri ordini.*

Orbene farò vedere che *ciò non è vero, escluso forse tutt'al più il caso di determinanti simmetrici dell'8° ordine.*

2. Consideriamo un determinante simmetrico del 5° ordine avente nulli tutti i termini principali:

$$(I) \quad A = |a_{ik}|; \quad a_{ik} = a_{ki}, \quad a_{ii} = 0 \quad (i, k = 1, \dots, 5).$$

(1) H. W. RICHMOND, *On property of a double-six of line, and its meaning in hyper-geometry*, «Proceed. Cambridge Phil. Soc.», t. XIV, 1908, p. 475.

(2) Essa è basata su considerazioni geometriche nello spazio a 5 dimensioni. A tal proposito l'A. dice: «I have not succeeded in finding any extension or analogue of the above theorem to a geometry of other than five dimensions; it is remarkable if the theorem belongs to space of five dimensions and to no other».

(3) Un determinante simmetrico del 1° o del 3° ordine per cui valgano ipotesi analoghe alle suddette è necessariamente nullo.

Il minore complementare di a_{55} vale:

$$A_{55} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} = a_{12}^2 a_{34}^2 + a_{13}^2 a_{42}^2 + a_{14}^2 a_{23}^2 - \\ - 2 a_{12} a_{34} a_{13} a_{42} - 2 a_{13} a_{42} a_{14} a_{23} - 2 a_{14} a_{23} a_{12} a_{34}.$$

Posto:

$$(2) \quad a_{ik} = \beta_{ik}^2$$

la precedente relazione si può scrivere:

$$(3) \quad A_{55} = (\beta_{12} \beta_{34} + \beta_{13} \beta_{42} + \beta_{14} \beta_{23}) (\beta_{12} \beta_{34} - \beta_{13} \beta_{42} - \beta_{14} \beta_{23}) \cdot \\ \cdot (-\beta_{12} \beta_{34} + \beta_{13} \beta_{42} - \beta_{14} \beta_{23}) (-\beta_{12} \beta_{34} - \beta_{13} \beta_{42} + \beta_{14} \beta_{23}).$$

Analoghe espressioni varranno per i minori complementari degli altri 4 termini principali. Pertanto affinchè tali minori si annullino basterà che sia:

$$(4) \quad \begin{cases} \beta_{34} \beta_{25} + \beta_{24} \beta_{35} + \beta_{23} \beta_{45} = 0 \\ \beta_{34} \beta_{15} + \beta_{14} \beta_{35} + \beta_{13} \beta_{45} = 0 \\ \beta_{24} \beta_{15} + \beta_{14} \beta_{25} + \beta_{12} \beta_{45} = 0 \\ \beta_{23} \beta_{15} + \beta_{13} \beta_{25} + \beta_{12} \beta_{35} = 0 \end{cases}$$

Queste sono 4 equazioni lineari omogenee nelle 4 quantità $\beta_{15}, \beta_{25}, \beta_{35}, \beta_{45}$; affinchè coesistano per valori non tutti nulli di dette variabili, basterà che si annulli il determinante dei coefficienti: sviluppando tale determinante, ed applicando un'identità di cui già ci siamo valse sopra, tale condizione si riduce alla:

$$(5) \quad \sqrt{\beta_{12} \beta_{34}} \pm \sqrt{\beta_{13} \beta_{42}} \pm \sqrt{\beta_{14} \beta_{23}} = 0.$$

Se questa è verificata, le (4) forniscono a meno di un fattore inessenziale:

$$(6) \quad \begin{cases} \beta_{15} = \pm \sqrt{\beta_{12} \beta_{13} \beta_{14}} \\ \beta_{25} = \pm \sqrt{\beta_{21} \beta_{23} \beta_{24}} \\ \beta_{35} = \pm \sqrt{\beta_{31} \beta_{32} \beta_{34}} \\ \beta_{45} = \pm \sqrt{\beta_{41} \beta_{42} \beta_{43}} \end{cases}$$

Si ha pertanto, tenendo presenti le (2), (3), (6):

Solo che valga la (5) il determinante simmetrico:

$$(7) \quad A = \begin{vmatrix} 0 & \beta_{12}^2 & \beta_{13}^2 & \beta_{14}^2 & \beta_{12} \beta_{13} \beta_{14} \\ \beta_{21}^2 & 0 & \beta_{23}^2 & \beta_{24}^2 & \beta_{21} \beta_{23} \beta_{24} \\ \beta_{31}^2 & \beta_{32}^2 & 0 & \beta_{34}^2 & \beta_{31} \beta_{32} \beta_{34} \\ \beta_{41}^2 & \beta_{42}^2 & \beta_{43}^2 & 0 & \beta_{41} \beta_{42} \beta_{43} \\ \beta_{12} \beta_{13} \beta_{14} & \beta_{21} \beta_{23} \beta_{24} & \beta_{31} \beta_{32} \beta_{34} & \beta_{41} \beta_{42} \beta_{43} & 0 \end{vmatrix}$$

ha nulli tutti i termini principali e tutti i loro minori complementari, tranne A_{55} , che è generalmente diverso da zero. Il suddetto determinante (7) in generale è esso pure diverso da zero, come risulta dal seguente esempio numerico:

$$(8) \quad \begin{vmatrix} 0 & 16 & 1 & 1 & 4 \\ 16 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2^9$$

3. Dai precedenti sviluppi si vede che si può benissimo avere un determinante del 5° ordine simmetrico e non nullo, avente uguali a zero i suoi 5 elementi principali ed i 5 minori complementari a questi relativi (1). Ciò si verifica ad esempio per il determinante:

$$(9) \quad \begin{vmatrix} 0 & \epsilon_1 & \epsilon_2 & 1 & 1 \\ \epsilon_1 & 0 & 1 & 1 & \epsilon_2 \\ \epsilon_2 & 1 & 0 & 1 & \epsilon_1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \epsilon_2 & \epsilon_1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2^5$$

in cui ϵ_1, ϵ_2 sono le due radici complesse cubiche dell'unità positiva.

(1) Un determinante siffatto si può pensare come il discriminante di una quadrica non degenera di S_4 . La piramide fondamentale delle coordinate è in pari tempo inscritta e circoscritta alla quadrica: i punti di contatto delle 5 faccie determinano una nuova piramide inscritta nella quadrica, la quale è circoscritta alla medesima nei vertici della piramide prima considerata.

Pensando i punti della quadrica come rette di un complesso lineare di S_3 , si ha facilmente che:

Ogni complesso lineare di rette di S_3 si può, ed in ∞ modi, individuare mediante 5 rette, tali che 4 qualunque di queste abbiano **una sola** retta (non due!) incidente a tutte e 4. Le

4. Consideriamo il determinante simmetrico del 10° ordine che ha per minore principale del 5° ordine il determinante (8), per minore complementare di questo il determinante (9), e che ha nulli tutti i termini che non figurano in questi due determinanti.

Un tale determinante è certo diverso da zero (vale il prodotto dei due determinanti non nulli (8), (9)); esso ha nulli tutti i 10 termini principali, e (per quanto precede) i minori complementari di 9 di questi; però il rimanente ha un minore complementare diverso da zero.

6. Facciamo la seguente osservazione. Un determinante I_m d'ordine pari $2m$, avente uguali a zero tutti i termini, tranne quelli della diagonale secondaria, i quali p. es. siano tutti uguali ad 1, è un determinante simmetrico, non nullo, avente uguali a zero tutti i termini principali e tutti i minori complementari a questi relativi.

Svolgendo considerazioni analoghe a quelle tenute al numero precedente, sostituendo solo I_m al determinante (9), si vengono a costruire dei determinanti simmetrici di ordine $5 + 2m$, non nulli, aventi uguali a zero tutti i $5 + 2m$ termini principali, ed i minori complementari di $4 + 2m$ di questi; però il rimanente ha un minore complementare diverso da zero.

Similmente, utilizzando però invece del determinante del 5° ordine (8), il determinante del 10° ordine costruito al n. 4, si vengono ad avere dei determinanti simmetrici d'ordine $10 + 2m$, che godono di proprietà analoghe a quelle dei suddetti di ordine $5 + 2m$.

Con ciò l'affermazione fatta al n. 1 è completamente provata.

Matematica. — Ancora sulla convergenza delle serie di funzioni ortogonali. Nota di CARLO SEVERINI, presentata dal Corrispondente GINO LORIA. ⁽¹⁾

3. Si considerino ⁽²⁾ i primi indici, in numero di $P_1 + 1$ dei gruppi (13):

$$p^\lambda - 1, p^\lambda + p - 1, \dots, p^\lambda + v p - 1, \dots, p^\lambda + P_1 p - 1,$$

e si distribuiscano, come sopra, in gruppi, ciascuno dei quali abbia come primo indice l'ultimo indice del gruppo precedente, e contenga, eccettuato l'ultimo, $p + 1$ indici. Si hanno così, posto:

$$(24) \quad P_1 = P_2 p + \lambda,$$

5 rette che così si hanno, incidenti ciascuna a 4 delle prime 5, appartengono al complesso; 4 qualunque di quelle 5 rette hanno ancora una sola retta incidente a tutte 4: e questa è di nuovo una delle 5 rette prime considerate.

Le configurazioni che qui sono solo accennate, saranno studiate in un lavoro di prossima pubblicazione.

(1) Presentata nella seduta del 5 agosto 1925.

(2) Cfr. Nota in questi « Rendiconti », vol. II, fasc. II, p. 470.

che è quanto dire per la (16):

$$(25) \quad P_2 = \binom{\lambda}{1} p^{\lambda-1} + \binom{\lambda}{2} p^{\lambda-2} + \dots + \binom{\lambda}{\lambda-3} p + \binom{\lambda}{\lambda-2},$$

i seguenti gruppi:

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{ll} p^\lambda - 1, p^\lambda + p - 1, p^\lambda + 2p - 1, \dots, p^\lambda + p^2 - 1; & H_0^{(2)}, \\ p^\lambda + p^2 - 1, p^\lambda + p^2 + p - 1, p^\lambda + p^2 + 2p - 1, \dots, p^\lambda + 2p^2 - 1; & H_1^{(2)}, \\ \dots \dots \dots; & \dots, \\ p^\lambda + v p^2 - 1, p^\lambda + v p^2 + p - 1, p^\lambda + v p^2 + 2p - 1, \dots, p^\lambda + (v+1)p^2 - 1; & H_v^{(2)}, \\ \dots \dots \dots; & \dots, \\ p^\lambda + (P_2 - 1)p^2 - 1, p^\lambda + (P_2 - 1)p^2 + p - 1, p^\lambda + & \\ + (P_2 - 1)p^2 + 2p - 1, \dots, p^\lambda + P_2 p^2 - 1; & H_{P_2-1}^{(2)}, \\ p^\lambda + P_2 p^2 - 1, p^\lambda + P_2 p^2 + p - 1, p^\lambda + & \\ + P_2 p^2 + 2p - 1, \dots, p^\lambda + P_2 p^2 + \lambda p - 1; & H_{P_2}^{(2)}. \end{array} \right.$$

Procedendo come dianzi per i gruppi (18), si trova:

$$\int_a^b \sum_{i=1}^p q \left[S_{p^\lambda + v p^2 - 1}(x) - S_{p^\lambda + v p^2 + q p - 1}(x) \right]^2 dx = p^{\frac{p^\lambda + v p^2 + p - 1}{p^\lambda + v p^2}} \sum_n C_n^2 +$$

$$+ (p-1) \sum_n^{\frac{p^\lambda + v p^2 + 2p - 1}{p^\lambda + v p^2 + p}} C_n^2 + \dots + \sum_n^{\frac{p^\lambda + (v+1)p^2 - 1}{p^\lambda + v p^2 + p(p-1)}} C_n^2$$

(v = 0, 1, 2, ..., P₂ - 1),

e quindi:

$$(27) \quad \int_a^b \sum_{i=1}^p q \left[S_{p^\lambda + v p^2 - 1}(x) - S_{p^\lambda + v p^2 + q p - 1}(x) \right]^2 dx \equiv p^{\frac{p^\lambda + (v+1)p^2 - 1}{p^\lambda + v p^2}} \sum_n C_n^2$$

(v = 0, 1, 2, ..., P₂ - 1).

Inoltre si ha:

$$\int_a^b \sum_{i=1}^{\lambda} q \left[S_{p^\lambda + P_2 p^2 - 1}(x) - S_{p^\lambda + P_2 p^2 + q p - 1}(x) \right]^2 dx = \lambda^{\frac{p^\lambda + P_2 p^2 + p - 1}{p^\lambda + P_2 p^2}} \sum_n C_n^2 +$$

$$+ (\lambda - 1) \sum_n^{\frac{p^\lambda + P_2 p^2 + 2p - 1}{p^\lambda + P_2 p^2 + p}} C_n^2 + \dots + \sum_n^{\frac{p^\lambda + P_2 p^2 + \lambda p - 1}{p^\lambda + P_2 p^2 + (\lambda-1)p}} C_n^2$$

e quindi:

$$\int_a^b \sum_{q=1}^{\lambda} \left[S_{p^{\lambda} + P_2 p^2 - 1}(x) - S_{p^{\lambda} + P_2 p^2 + q p - 1}(x) \right]^2 dx \leq \lambda \sum_{p^{\lambda} + P_2 p^2}^{p^{\lambda} + P_2 p^2 + \lambda p - 1} C_n^2$$

ed a maggior ragione:

$$(28) \int_a^b \sum_{q=1}^{\lambda} \left[S_{p^{\lambda} + P_2 p^2 - 1}(x) - S_{p^{\lambda} + P_2 p^2 + q p - 1}(x) \right]^2 dx \leq p \sum_{p^{\lambda} + P_2 p^2}^{(p+1)^{\lambda} - 1} C_n^2,$$

giacchè, avendo posto che sia $p \geq p_1$, segue dalla (7):

$$p \geq \lambda,$$

e di più, per la (17) e la (24), risulta:

$$(29) \quad p^{\lambda} + P_2 p^2 + \lambda p - 1 = (p+1)^{\lambda} - 2 < (p+1)^{\lambda} - 1.$$

Come sopra, si ricava dalla (27) che in un insieme di punti di (a, b) , la cui misura è maggiore od uguale a:

$$b - a - \frac{p^{\lambda} + (v+1)p^2 - 1}{\delta^2} \sum_{p^{\lambda} + v p^2}^n C_n^2 \quad (v = 0, 1, 2, \dots, P_2 - 1),$$

si deve avere:

$$(30) \quad \left| S_{p^{\lambda} + v p^2 - 1}(x) - S_{p^{\lambda} + v p^2 + q p - 1}(x) \right| \leq \delta \quad \left(\begin{matrix} v = 0, 1, 2, \dots, P_2 - 1 \\ q = 1, 2, \dots, p \end{matrix} \right).$$

Analogamente si ricava dalla (28) che in un insieme di punti di (a, b) , la cui misura è maggiore od uguale a:

$$b - a - \frac{p}{\delta^2} \sum_{p^{\lambda} + P_2 p^2}^{(p+1)^{\lambda} - 1} C_n^2,$$

deve essere:

$$(31) \quad \left| S_{p^{\lambda} + P_2 p^2 - 1}(x) - S_{p^{\lambda} + P_2 p^2 + q p - 1}(x) \right| \leq \delta \quad (q = 1, 2, \dots, \lambda).$$

Dalla (30) e dalla (31) segue in fine che in un insieme G_2 di punti di (a, b) , la cui misura è maggiore od uguale a:

$$b - a - \frac{p}{\delta^2} \sum_{p^{\lambda}}^{(p+1)^{\lambda} - 1} C_n^2,$$

si ha:

$$(32) \quad \left| S_{q^{(1)}}(x) - S_{q^{(2)}}(x) \right| \leq \delta \quad \left(q^{(1)} = p^\lambda - 1, p^\lambda + p - 1, \dots, p^\lambda + P_1 p - 1 \right),$$

ove $q^{(2)}$ rappresenta il primo indice del gruppo:

$$H_v^{(2)} \quad (v = 0, 1, 2, \dots, P_2)$$

al quale appartiene $q^{(1)}$.

Si considerino nuovamente i primi indici, in numero di $P_2 + 1$, dei gruppi (26), e si distribuiscano in gruppi, ciascuno dei quali abbia come primo indice l'ultimo indice del gruppo precedente, e contenga, tranne l'ultimo, $p + 1$ indici.

Posto:

$$(33) \quad P_2 = P_1 p + \binom{\lambda}{\lambda - 2},$$

cioè:

$$(34) \quad P_2 = \binom{\lambda}{1} p^{\lambda-4} + \binom{\lambda}{2} p^{\lambda-5} + \dots + \binom{\lambda}{\lambda-4} p + \binom{\lambda}{\lambda-3},$$

sarà $P_2 + 1$ il numero di questi nuovi gruppi:

$$(35) \quad H_v^{(3)} \quad (v = 0, 1, 2, \dots, P_3),$$

dalla considerazione dei quali si trae che in un insieme di punti di (a, b) , la cui misura è maggiore od uguale a:

$$b - a - \frac{p}{\delta^2} \frac{p^{\lambda + (v+1)p^3 - 1}}{\sum_{p^\lambda + v p^3}^n} C_n^2,$$

risulta:

$$(36) \quad \left| S_{p^\lambda + v p^3 - 1}(x) - S_{p^\lambda + v p^3 + q p^2 - 1}(x) \right| \leq \delta \quad \left(\begin{array}{l} v = 0, 1, 2, \dots, P_3 - 1 \\ q = 1, 2, 3, \dots, p \end{array} \right),$$

ed in un insieme di punti di (a, b) , la cui misura è maggiore od uguale a:

$$b - a - \frac{p}{\delta^2} \frac{(p+1)^{\lambda-1}}{\sum_{p^\lambda + P_3 p^3}^n} C_n^2$$

si ha:

$$(37) \quad \left| S_{p^\lambda + P_3 p^3 - 1}(x) - S_{p^\lambda + P_3 p^3 + q p^2 - 1}(x) \right| \leq \delta \quad \left(q = 1, 2, \dots, \binom{\lambda}{\lambda - 2} \right).$$

Il gruppo $H_{P_3}^{(3)}$ è infatti costituito dagli indici:

$$p^\lambda + P_3 p^3 - 1, p^\lambda + P_3 p^3 + p^2 - 1, \dots, p^\lambda + P_3 p^3 + \binom{\lambda}{\lambda-2} p^2 - 1,$$

ed a causa della (29) e della (33) risulta:

$$p^\lambda + P_3 p^3 + \binom{\lambda}{\lambda-2} p^2 - 1 < (p+1)^\lambda - 1.$$

Dalla (36) e dalla (37) segue infine che, in un insieme G_3 di punti di (a, b) , la cui misura è maggiore od uguale a:

$$b - a - \frac{p}{\delta^2} \sum_{p^\lambda}^{(p+1)^{\lambda-1}} C_n,$$

si deve avere:

$$(38) \quad \left| S_{q^{(2)}}(x) - S_{q^{(3)}}(x) \right| \equiv \delta \quad \left(q^{(2)} = p^\lambda - 1, p^\lambda + p^2 - 1, \dots, p^\lambda + P_3 p^3 - 1 \right),$$

ove $q^{(3)}$ rappresenta il primo indice del gruppo:

$$(35) \quad H_v^{(3)} \quad (v = 0, 1, 2, \dots, P_3)$$

al quale appartiene $q^{(2)}$.

Così continuando si perviene alla considerazione degli indici:

$$p^\lambda - 1, p^\lambda + p^{\lambda-2} - 1, p^\lambda + 2p^{\lambda-2} - 1, \dots, p^\lambda + P_{\lambda-2} p^{\lambda-2} - 1,$$

ove:

$$(39) \quad P_{\lambda-2} = \binom{\lambda}{1} p + \binom{\lambda}{2};$$

si ripartiscono questi indici, nel solito modo, in $P_{\lambda-1} + 1$ gruppi:

$$(40) \quad H_v^{(\lambda-1)} \quad (v = 0, 1, 2, \dots, P_{\lambda-1})$$

essendo:

$$(41) \quad P_{\lambda-2} = P_{\lambda-1} \cdot p + \binom{\lambda}{2},$$

e quindi:

$$P_{\lambda-1} = \lambda.$$

Come sopra si trova che in un insieme $G_{\lambda-1}$ di punti di (a, b) , la cui misura è maggiore od uguale a:

$$b - a - \frac{p}{\delta^2} \sum_{p^\lambda}^{(p+1)^{\lambda-1}} C_n^2,$$

risulta:

$$(42) \quad \left| S_{q(\lambda-2)}(x) - S_{q(\lambda-1)}(x) \right| \equiv \delta$$

$$\left(q^{(\lambda-2)} = p^\lambda - 1, p^\lambda + p^{\lambda-2} - 1, \dots, p^\lambda + P_{\lambda-2} p^{\lambda-2} - 1 \right),$$

ove $q^{(\lambda-1)}$ rappresenta il primo indice del gruppo:

$$(40) \quad H_v^{(\lambda-1)} \quad (v = 0, 1, 2, \dots, P_{\lambda-1}),$$

al quale appartiene $q^{(\lambda-2)}$.

In fine si considerino i primi indici di questi ultimi gruppi (40):

$$p^\lambda - 1, p^\lambda + p^{\lambda-1} - 1, p^\lambda + 2p^{\lambda-1} - 1, \dots, p^\lambda + P_{\lambda-1} p^{\lambda-1} - 1.$$

Si ha:

$$\int_a^b \sum_i^{\lambda} q \left[S_{p^{\lambda-1}}(x) - S_{p^\lambda + q p^{\lambda-1} - 1}(x) \right]^2 dx \equiv p \sum_{p^\lambda}^{(p+1)^{\lambda-1}} C_n^2,$$

e se ne deduce ancora che in un insieme G_λ di punti di (a, b) , la cui misura è maggiore od uguale a:

$$b - a - \frac{p}{\delta^2} \sum_{p^\lambda}^{(p+1)^{\lambda-1}} C_n^2,$$

si deve avere:

$$(43) \quad \left| S_{q(\lambda-1)}(x) - S_{q(\lambda)}(x) \right| \equiv \delta$$

$$\left(q^{(\lambda-1)} = p^\lambda - 1, p^\lambda + p^{\lambda-1} - 1, \dots, p^\lambda + P_{\lambda-1} p^{\lambda-1} - 1 \right),$$

ove:

$$(44) \quad q^{(\lambda)} = p^\lambda - 1.$$

Poichè la misura di ciascuno degl'insiemi:

$$(45) \quad G_i \quad (i = 1, 2, \dots, \lambda)$$

è maggiore od uguale a:

$$b - a - \frac{p}{\delta^2} \sum_{p^\lambda}^{(p+1)^\lambda - 1} C_n^2,$$

indicando con K_p il prodotto degli insiemi (45), si trova:

$$m K_p \equiv b - a - \frac{\lambda p}{\delta^2} \sum_{p^\lambda}^{(p+1)^\lambda - 1} C_n^2.$$

Per tutti i punti dell'insieme K_p , a causa delle (23), (32), (38), ..., (42), (43), (44), risulta:

$$\left| S_q(x) - S_{p^\lambda - 1}(x) \right| \equiv \lambda \delta \quad \left(p^\lambda - 1 \equiv q \equiv (p+1)^\lambda - 1 \right).$$

Teoria dei numeri. — *Ancora sulle equazioni indeterminate delle unità di norma negativa nei corpi quadratici reali. Il caso $D = 2p$ con p primo.* Nota di GIOVANNI SANSONE presentata dal Socio L. BIANCHI.

1. Vogliamo studiare l'equazione

$$x^2 - 2py^2 = -1$$

con p primo positivo. Si è già detto in una Nota precedente⁽¹⁾ che il numero p deve avere la forma $4n + 1$ e per esaminare questo caso premettiamo il teorema:

Delle tre equazioni

$$(1)_1 \quad \alpha^2 - 2p\beta^2 = -1, \quad (1)_2 \quad p\alpha^2 - 2\beta^2 = -1, \\ (1)_3 \quad 2\alpha^2 - p\beta^2 = -1,$$

con p primo della forma $4n + 1$ ne è possibile una e una soltanto.

Dirichlet⁽²⁾ ha dimostrato che ne è possibile sempre una, ci sembra opportuno far vedere che di esse ne è possibile una soltanto. Sia possibile l'equazione

$$(1)_1 \quad \alpha^2 - 2p\beta^2 = -1$$

(1) Pubblicata in questi «Rendiconti», vol. II, fasc. 11, (1925), p. 479.

(2) Cfr. L. DIRICHLET'S WERKE, I B, p. 226.

e ne sia α, β la soluzione minima positiva. Per la soluzione minima positiva dell'equazione $T^2 - 2pU^2 = 1$ si avrà: $T + U\sqrt{2p} = (\alpha + \beta\sqrt{2p})^2$ cioè:

$$(2) \quad T = \alpha^2 + 2p\beta^2 = 4p\beta^2 - 1, \quad U = 2\alpha\beta.$$

Sia possibile anche una o l'altra delle equazioni $(1)_2, (1)_3$ e ne sia X, Y una soluzione positiva, sia cioè:

$$(3) \quad 2X^2 - pY^2 = 1, \quad (3)' \quad 2X^2 - pY^2 = -1.$$

Si ponga secondochè vale la (3) o la (3)'

$$(4) \quad \alpha' = 4X^2 - 1 = 2pY^2 + 1, \quad \beta' = 2XY; \\ (4)' \quad \alpha' = 2pY^2 - 1 = 4X^2 + 1, \quad \beta' = 2XY,$$

si avrà rispettivamente:

$$\alpha' + 1 = 4X^2, \quad \alpha' - 1 = 2pY^2; \quad \alpha' + 1 = 2pY^2, \quad \alpha' - 1 = 4X^2$$

da cui $\alpha'^2 - 1 = 2p(2XY)^2$ od anche $\alpha'^2 - 2p\beta'^2 = 1$. Sarà quindi $\alpha' + \beta'\sqrt{2p}$ una potenza della soluzione minima $T + U\sqrt{2p}$ dell'equazione $T^2 - 2pU^2 = 1$, cioè esisterà un esponente intero positivo λ per il quale si ha:

$$(T + U\sqrt{2p})^\lambda = \alpha' + \beta'\sqrt{2p}$$

cioè per le (2) e le (3) e (3)'

$$(5) \quad (4p\beta^2 - 1 + 2\alpha\beta\sqrt{2p})^\lambda = 2pY^2 \pm 1 + 2XY\sqrt{2p}$$

col segno + o — nel secondo membro secondochè vale la (3) o la (3)',

Uguagliando le parti razionali dei due membri della (5) dovrà aversi:

$$(4p\beta^2 - 1)^\lambda + \binom{\lambda}{2} (4p\beta^2 - 1)^{\lambda-2} (2\alpha\beta)^2 2p + \dots = 2pY^2 \pm 1,$$

e raccogliendo nel primo membro il fattore $4p$ dovrà sussistere una relazione della forma

$$4pl + (-1)^\lambda = 2pY^2 \pm 1.$$

Da questa considerata rispetto al modulo p segue che secondo che vale nel secondo membro il segno + o il segno — deve essere λ pari o dispari, ed è in ogni caso $4pl = 2pY^2$, $2l = Y^2$ che è impossibile essendo Y per le (3) e (3)' dispari.

Proviamo infine che sono incompatibili le $(1)_2$ e $(1)_3$. Infatti dalle due relazioni

$$p\alpha^2 - 2\beta^2 = -1 \quad , \quad 2\beta'^2 - p\alpha'^2 = -1$$

segue anche

$$(p\alpha\alpha' + 2\beta\beta')^2 - 2p(\alpha\beta' + \alpha'\beta)^2 = -1$$

cioè -1 è rappresentabile anche con la forma principale $(1, 0, -2p)$, ma si è ora dimostrato che è impossibile rappresentare -1 con la forma principale $(1, 0, -2p)$ e una delle due forme $(p, 0, -2)$; $(2, 0, -p)$ ⁽¹⁾.

Corollario. L'equazione $x^2 - 2py^2 = -1$ con p primo della forma $8n + 5$ ha sempre soluzioni. (Dirichlet) ⁽²⁾.

In questa ipotesi è infatti $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$ ed essendo allora impossibili le due equazioni $px^2 - 2y^2 = \pm 1$, dovrà essere possibile l'altra equazione $x^2 - 2py^2 = -1$.

2. Esaminiamo l'equazione

$$(6) \quad x^2 - 2py^2 = -1$$

nel caso che il numero primo p abbia la forma $p = 8n + 1$.

Sia la (6) possibile, è x dispari, e posto $x = 2k + 1$ (k positivo) si ha:

$$(7) \quad 2k^2 + 2k + 1 = py^2.$$

Da questa si ha poi

$$2k(k+1) \equiv -1 \pmod{p}$$

ed elevando ambo i membri all'esponente $\frac{p-1}{4}$ = $2n$ si ha:

$$(8) \quad \frac{p-1}{2^{\frac{p-1}{4}}} \frac{p-1}{k^{\frac{p-1}{4}}} (k+1)^{\frac{p-1}{4}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Si ha pure dalla (7) $k^2 + (k+1)^2 = py^2$, quindi

$$(k+1)^2 \equiv -k^2 \pmod{p}$$

(1) Il nostro ragionamento vale anche se p non è primo; in generale delle tre equazioni

$$x^2 - 2Dy^2 = -1 \quad , \quad Dx^2 - 2y^2 = -1 \quad , \quad 2x^2 - Dy^2 = -1$$

con D positivo dispari ne è possibile al più una sola.

(2) Cfr. DIRICHLET, loc. cit., p. 226.

ed elevando ambo i membri all'esponente $\frac{p-1}{8} = n$ si ha:

$$(k+1)^{\frac{p-1}{4}} \equiv (-1)^n k^{\frac{p-1}{4}} \pmod{p}$$

e la (8) diventa:

$$(9) \quad 2^{\frac{p-1}{4}} k^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^n \pmod{p}.$$

È poi per la (7)

$$py^2 \equiv 1 \pmod{k}$$

perciò $\left(\frac{p}{k}\right) = 1$, ed essendo $p \equiv 1 \pmod{8}$, per il teorema di reciprocità si ha $\left(\frac{k}{p}\right) = -1$, cioè

$$k^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$$

e la (9) diventa

$$2^{\frac{p-1}{4}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{8}} \pmod{p}.$$

Resta così dimostrato il teorema: *Condizione necessaria perchè l'equazione $x^2 - 2py^2 = -1$, con p primo, $p = 8n + 1$, abbia soluzioni, è che sia*

$$(10) \quad 2^{\frac{p-1}{4}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{8}} \pmod{p}.$$

Distinguiamo ora i due casi n dispari, n pari, cioè i due casi in cui p abbia la forma $16m + 9$ o la forma $16m + 1$.

Per $p = 16m + 9$ la (10) diventa $2^{\frac{p-1}{4}} \equiv -1 \pmod{p}$. Questa condizione da noi trovata come necessaria fu trovata da Dirichlet⁽¹⁾ sufficiente.

Si ha perciò il teorema: *Condizione necessaria e sufficiente perchè sia possibile l'equazione $x^2 - 2py^2 = -1$, quando il numero primo positivo p abbia la forma $16m + 9$, è che si abbia $2^{\frac{p-1}{4}} \equiv -1 \pmod{p}$.*

Quando sia $p = 16m + 1$, la (10) diventa

$$(11) \quad 2^{\frac{p-1}{4}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

(1) Cfr. DIRICHLET, loc. cit., pp. 226-227.

Scomponendo p in somma di due quadrati può porsi $p = (1 + 4\alpha)^2 + 4\beta^2$, ed avendosi $p \equiv 1 \pmod{16}$ deve essere $\beta = 2B_1$ e conseguentemente $\alpha = 2A$ (B_1 e A interi). Il numero p ha perciò la forma

$$(12) \quad p = (1 + 8A)^2 + (4B_1)^2.$$

D'altra parte indicando con π uno dei fattori primi primari di π , ($\pi = 1 + 8A + 4B_1i$), osservando che $\frac{p-1}{4}$ è multiplo di 4 e tenuto conto della (11) si ha:

$$\frac{p-1}{2^2} = (1+i)^{\frac{p-1}{2}} (=i)^{\frac{p-1}{4}} = (1+i)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{(1+8A+4B_1)^2-1}{8}} \equiv 1 \pmod{\pi} \quad (1)$$

dovrà essere perciò $(1 + 8A + 4B_1)^2 - 1 \equiv 0 \pmod{16}$ e perciò $B_1 = 2B$ e la (23) diventa

$$(13) \quad p = (1 + 8A)^2 + (8B)^2.$$

Si ha perciò il teorema: *Condizione necessaria perchè sia possibile l'equazione $x^2 - 2py^2 = -1$ con p primo della forma $16m + 1$, è che il numero p abbia la forma*

$$p = (1 + 8A)^2 + (8B)^2.$$

Ad es. avendosi $17 = 1^2 + 4^2$ l'equazione $x^2 - 34y^2 = -1$ è impossibile.

Altra volta poi eseguiremo l'esame del caso $p = 16m + 1$, ma avvertiamo che è facile provare con esempi che ancora qui bisogna distinguere i due casi $p = 32h + 1$, $p = 32h + 17$ (2).

6. Vogliamo terminare questa Nota con un teorema sul numero negativo $-k^2$ di minor valore assoluto rappresentabile con la forma quadratica (principale) $(1, 0, -D)$ con D dispari, positivo, privo di fattori quadrati e di fattori primi della forma $4n + 3$.

Teorema. Se D è un numero positivo dispari privo di fattori quadrati e di fattori primi della forma $4n + 3$, e se $-k^2$, con k intero, è il numero negativo di più piccolo valore assoluto rappresentabile con la forma $(1, 0, -D)$,

(1) Per il simbolo $\left(\frac{1+i}{p}\right)$ cfr. L. BIANCHI, loc. cit. (8). *Lezioni sulla Teoria dei Numeri Algebrici*, p. 94.

(2) Si verifica che per $p < 500$ tutte le volte che l'equazione $x^2 - 2py^2 = -1$ è possibile, deve essere nella (13) $A + B \equiv 0 \pmod{2}$, e sembra che per i numeri primi di Gauss ($p = 2^{2^n+1}$), eccettuato il caso $n = 2$, questa equazione sia impossibile.

ed è $|k| > 1$, qualunque eventuale divisore l^2 di k^2 diverso dall'unità non è rappresentabile propriamente con la forma $(1, 0, -D)$, a meno che non sia $l = 2$.

Poichè D può rappresentarsi come somma di due quadrati $[D = a^2 + b^2]$ esistono dei numeri interi $-l^2$ rappresentabili propriamente con la forma $(1, 0, -D)$. $[a^2 - D \cdot 1^2 = -b^2]$. Sia allora $-k^2$ il numero intero negativo di più piccolo valore assoluto per il quale si abbia $X^2 - DY^2 = -k^2$; saranno X, Y, D primi con k e supponiamo sia $k > 1$. Vogliamo provare che se l^2 è un eventuale divisore di k^2 diverso dall'unità, l'equazione $x^2 - Dy^2 = l^2$ non è possibile in numeri interi x, y primi tra loro ⁽¹⁾ che per $k = |l| = 2$.

Si abbia

$$(14) \quad X^2 - DY^2 = -k^2, \quad x^2 - Dy^2 = l^2,$$

e siano x e y primi tra loro. Si ha intanto che l è primo con x, y, D .

Dalle (14) moltiplicando si ha:

$$(15) \quad (Xx \mp DYy)^2 - D(Xy \mp Yx)^2 = -k^2 l^2.$$

Avendosi

$$X^2 \equiv DY^2, \quad x^2 \equiv Dy^2 \pmod{l^2},$$

è anche

$$(Xx - DYy)(Xx + DYy) \equiv 0 \pmod{l^2}.$$

Ne segue che l^2 si può decomporre nel prodotto di due convenienti fattori m ed n positivo per i quali si ha:

$$(16) \quad Xx \equiv DYy \pmod{m}; \quad Xx \equiv -DYy \pmod{n}, \quad l^2 = mn.$$

Da queste moltiplicando per x e tenuto conto della seconda delle (14) si ha:

$$Xx^2 \equiv DXy^2 \equiv DYxy \pmod{m}; \quad DXy^2 \equiv -DYxy \pmod{n}$$

ed anche essendo Dy primo con l e perciò con m e con n :

$$Xy \equiv Yx \pmod{m}; \quad Xy \equiv -Yx \pmod{n},$$

e dalle (15) si hanno perciò le due equazioni in numeri interi:

$$\begin{aligned} \left(\frac{Xx - DYy}{m} \right)^2 - D \left(\frac{Xy - Yx}{m} \right)^2 &= -\frac{k^2 l^2}{m^2}, \\ \left(\frac{Xx + DYy}{n} \right)^2 - D \left(\frac{Xx + Yy}{n} \right)^2 &= -\frac{k^2 l^2}{n^2}; \end{aligned}$$

(1) L'equazione è evidentemente possibile con numeri interi x, y multipli di l .

si avrà allora $\frac{kl}{m} \cong k$; $\frac{kl}{n} \cong k$ e avendosi anche $l^2 = mn$ sarà $|l| = m = n$; le (16) diventano:

$$Xx \equiv DYy \pmod{l}, \quad Xx \equiv -DYy \pmod{l}.$$

Da questo sommando si ha $2Xx \equiv 0 \pmod{l}$, ed avendosi l primo con X (perchè l è divisore di k) e con x è $|l| = 2$, c. v. d.

Ne segue, facendo $l = k$ il corollario: Se D soddisfa alle condizioni enunciate nel teorema, e l'equazione $X^2 - DY^2 = -1$ è impossibile e $-k^2$ con k intero, è il numero di minor valore assoluto per il quale si verifica l'equazione $X^2 - DY^2 = -k^2$, supposto che l'equazione $x^2 - Dy^2 = k^2$ sia possibile con numeri interi x e y primi tra loro, è $k = 2$; si ha cioè:

$$X^2 - DY^2 = -4.$$

Fisica. — *Sulla dipendenza della velocità della luce dal movimento della sorgente*⁽¹⁾. Nota del dott. G. WATAGHIN, presentata dal Socio Corrisp. A. POCHETTINO.

1. — Nel presente lavoro è brevemente esposta una ricerca sperimentale diretta a stabilire la validità o meno dell'ipotesi balistica. L'esperienza consiste nella verifica della legge di riflessione nel caso di una sorgente in moto (raggi canale) e di uno specchio in quiete (moto e quiete relativi all'osservatore).

Secondo la teoria della relatività, come anche secondo la teoria ondulatoria di Fresnel (etere fisso) il movimento della sorgente non dovrebbe per nulla influire sulle leggi della riflessione; mentre nell'ipotesi di Ritz si prevede un effetto del secondo ordine in $\beta = \frac{u}{c}$ (ove u è la velocità della sorgente, c la velocità della luce), e precisamente si prevede che la differenza $\epsilon = i - r$ fra gli angoli di incidenza e di riflessione è generalmente diversa da zero ed è dell'ordine di β^2 .

L'esperienza ha dato per ora esito negativo, cioè ha confermato la validità della legge $i = r$, sebbene una differenza $i - r$ dieci volte minore di quella teoricamente prevista avrebbe potuto ancora esser rivelata.

Per valutare giustamente questo risultato occorre tener presente la difficoltà principale connessa con le esperienze di questo genere, che ha già fatto fallire tutti i tentativi di ottenere una prova sperimentale decisiva pro o contro l'ipotesi di Ritz. Essa consta nella necessità di ideare un'esperienza,

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisica d. R. Scuola d'Ingegneria di Torino.

in cui si possa fare a meno di introdurre oltre all'ipotesi di Ritz altre ipotesi più o meno discutibili.

Per ora soltanto la nota argomentazione di de Sitter⁽¹⁾, contraria all'ipotesi di Ritz, soddisfaceva a questa condizione. Ma essa è stata giustamente criticata dal La Rosa, il quale ha saputo anche portare dei forti argomenti in favore dell'ipotesi balistica⁽²⁾. Invece in tutte le esperienze di laboratorio, come per es. quelle di Tolman, di Majorana, e di Stark⁽³⁾, il cammino ottico dei raggi comprende delle riflessioni e delle rifrazioni, e quindi la loro interpretazione richiede una teoria balistica, sia della riflessione, sia della rifrazione.

Ma una tale teoria a sua volta non può essere fatta senza ulteriori ipotesi. Così, se si ammette per es. la validità dei principî di Huyghens e di Fermat, si deve ancora prefissare: 1° per la riflessione, la forma delle superficie d'onda elementari, che si generano sullo specchio, oppure la velocità della luce riflessa; 2° per la rifrazione la forma della superficie d'onda oppure la velocità nel mezzo rifrangente. Ed è facile vedere, che con opportuna scelta di queste ipotesi, si può spiegare l'esito *negativo* di tutte le esperienze dirette a scoprire un effetto del *primo ordine*. Infatti, se si fanno per es. le ipotesi proposte da Poli⁽⁴⁾, esse danno per un qualsiasi cammino ottico risultati coincidenti nel primo ordine con quelli ottenuti nell'ordinaria teoria ondulatoria, e quindi anche con quelli, che si avrebbero secondo la teoria della relatività, come lo dimostra Poli stesso. Da qui la insufficienza di tutti i tentativi finora fatti di risolvere il problema per via sperimentale⁽⁵⁾.

Si traggono da quanto precede i seguenti criteri euristici:

1. La risoluzione sperimentale del problema va ricercata fra gli effetti del secondo ordine;

2. L'esperienza da fare deve essere scelta fra le più semplici, per modo che l'interpretazione del risultato implichi il minore numero possibile delle ipotesi;

3. Si deve poter giustificare la scelta di ciascuna delle ipotesi ulteriormente introdotte, e escludere la possibilità di sostituirle con delle altre.

(1) «Phys. Zeitschr.», 14, 1913, pp. 429, 1267.

(2) «Nuovo Cim.», n. S., I, 1924, p. 49, II, 1925, p. 159; «ZS. f. Phys.», 34, 1925, p. 698. Anche il ragionamento di La Rosa non ricorre che all'ipotesi di Ritz.

(3) TOLMAN, «Phys. Rev.», 31, 1910, p. 26; MAJORANA, «R. A. Lincei», 26, 1917, pp. 118, 155; 27, 1918, p. 402; STARK, «Ann. d. Phys.», 77, 1925, p. 16.

(4) «A. Acc. Torino», LV, 1919, p. 377. Si noti, che le formole del Poli concernono solo i termini del 1° ordine.

(5) Infatti, essi tutti erano diretti a scoprire un effetto del 1° ordine. Del resto l'insufficienza di questi tentativi è stata già rilevata da altri autori, V. MICHAIUX, «C. R.» 1919, p. 507, POLI, loc. cit.

2. - L'esame delle ipotesi necessarie per spiegare dal punto di vista della teoria di Ritz la riflessione su uno specchio fermo della luce emessa da una sorgente in moto, ci mostrerà che questo fenomeno soddisfa ai requisiti voluti.

Una teoria balistica della riflessione manca ancora. Le ipotesi finora proposte per la velocità della luce riflessa si riducono a tre (per brevità limitiamoci a considerare il caso di incidenza normale e del movimento \vec{u} in direzione del raggio incidente). Essendo in questo caso $c + u$ la velocità della luce incidente relativa allo specchio, la velocità della luce riflessa è ⁽¹⁾:

$c + u$ secondo J. J. Thomson e Stewart

c secondo Tolman

$c - u$ secondo Ritz

Le prime due ipotesi sono contraddette dalle esperienze sull'effetto Doppler (Fabry e Buisson, Majorana), come fecero vedere Majorana e Michaux (loc. cit.). Resta da considerare solo la terza ⁽²⁾. Essa è anche l'unica conforme alle due idee fondamentali della teoria di Ritz:

1. I fenomeni ottici sono invarianti rispetto a una traslazione uniforme di tutto il sistema;

2. Nel caso di sorgente in quiete rispetto all'osservatore, le formole della teoria balistica devono ridursi a quelle della teoria ondulatoria di Fresnel-Lorentz relative alla sorgente in quiete rispetto all'etere ⁽³⁾.

* Infatti se lo specchio si muove verso la sorgente fissa nell'etere, le velocità della luce incidente e riflessa relative allo specchio sono secondo l'ipotesi eterea ovviamente $c + u$ e $c - u$ rispettivamente.

Questo comportamento durante la riflessione è anche conforme alle esperienze finora eseguite sugli specchi in moto. Noi perciò cercheremo di costruire una teoria balistica della riflessione in base alle seguenti tre ipotesi:

IPOTESI A. - La velocità della luce \vec{v} nel vuoto, misurata in un sistema « inerziale » è somma vettoriale della velocità della sorgente \vec{u} e della velocità, costante \vec{c} della luce rispetto alla sorgente (ipotesi di Ritz)

(1) STEWART, « Phys. Rev. », 32, 1911, p. 418; TOLMAN, loc. cit.

(2) La possibilità di introdurre qualche altra ipotesi sarà discussa in seguito.

(3) È da notarsi la coincidenza della formola (2) da me ottenuta con quella ricavata dal Valle in una recente Nota (« N. Cim. », n. S., II, 1925, p. 171), che è senz'altro applicabile al caso di una sorgente ferma rispetto all'etere e di uno specchio in moto insieme all'osservatore. Questa coincidenza dimostra, che la teoria qui svolta è effettivamente conforme alle idee di Ritz.

(1)

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{c}$$

$$\text{mod } \vec{c} = c = \text{cost.}$$

e quindi il modulo v di questa velocità è:

$$(1') \quad v = c \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \alpha} + u \cos \alpha$$

ove α è l'angolo tra \vec{u} e \vec{v} .

IPOTESI B. — *Il cammino ottico dei raggi (traiettorie dell'energia radiante) soddisfa anche nel caso di sorgenti in moto al principio di Fermat.*

Quest'ipotesi può essere sostituita con l'ipotesi della validità del principio di Huyghens. Infatti i due principî si equivalgono, potendosi dedurre il principio di Fermat da quello di Huyghens⁽¹⁾, e avendo essi ugual campo di applicazione. Del resto si può verificare, che anche nel caso considerato essi conducono al medesimo risultato.

IPOTESI C. — *La velocità della luce riflessa è ancora data dalla formula (1).*

Il Poli propone (loc. cit.) di ammettere la validità della (1) nel vuoto in tutti i casi, anche dopo un numero qualsiasi di rifrazioni e riflessioni.

In base a queste tre ipotesi si può costruire una teoria della riflessione. Noi ci limitiamo a considerare soltanto il caso, in cui la direzione del movimento della sorgente (\vec{u}) è contenuta nel piano di incidenza.

Sia φ (fig. 1) l'angolo, che la direzione del movimento della sorgente forma con la direzione positiva della normale interna allo specchio, computato da 0 fino a 2π positivamente nel senso, in cui bisogna ruotare la direzione positiva della normale per sovrapporla col prolungamento del raggio incidente mediante una rotazione di un angolo non maggiore di $\frac{\pi}{2}$.

Comunque sia diretta la \vec{u} avremo per il raggio incidente in tutti i casi:

$$\alpha = \pm (\varphi - i)$$

e per il raggio riflesso:

$$\alpha = \pm [\pi - (\varphi + r)].$$

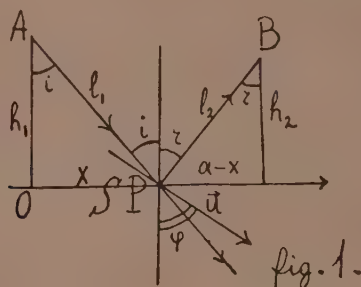
(1) Vedi H. LORENTZ, *The Theorie of Electron*.

Se ne deducono le seguenti espressioni per i moduli delle velocità della luce incidente e riflessa:

$$v_1 = c \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 (\varphi - i)} + u \cos (\varphi - i)$$

$$v_2 = c \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 (\varphi + r)} - u \cos (\varphi + r).$$

Applichiamo il principio di Fermat al cammino ottico APB (fig. 1), in cui il punto A corrisponde alla posizione della sorgente all'istante di emissione, P è il punto di incidenza sullo specchio S e B corrisponde



all'occhio dell'osservatore. Seguendo il solito procedimento, introduciamo come parametro ausiliario la ascissa x del punto P. Si perviene allora alla seguente espressione per il tempo t impiegato a percorrere il cammino APB:

$$t = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2} = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{c \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 (\varphi - i)} + u \cos (\varphi - i)} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}}{c \sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 (\varphi + r)} - u \cos (\varphi + r)}$$

ove il significato dei simboli si deduce facilmente dalla fig. 1.

Ponendo $\frac{dt}{dx} = 0$, trasformando e sviluppando in serie le espressioni ottenute, si arriva alla seguente formola esatta a meno dei termini dell'ordine superiore al secondo:

$$(2) \quad e = i - r = -\beta^2 \sin 2\varphi \cos^2 i.$$

Sarebbe facile dedurre la stessa espressione approssimata (2), sostituendo all'ipotesi B il principio di Huyghens e alla ipotesi C l'ipotesi

equivalente, che le superficie d'onda elementari, che prendono origine sullo specchio, sono simili e similmente disposte rispetto alla superficie d'onda incidente.

Naturalmente altre ipotesi potrebbero condurre a risultati diversi; è dunque necessario esaminare, se è possibile modificare almeno una delle ipotesi sopra applicate, senza urtare contro qualche difficoltà grave.

Ora l'ipotesi A non è evidentemente soggetta a modificazioni, perchè è precisamente la validità di questa ipotesi, che viene discussa.

Si potrebbe negare la validità dei principi di Fermat e di Huyghens, ma allora si dovrebbe rinunciare all'ottica ondulatoria, il che sembra poco plausibile e connesso con ovvie difficoltà. Anche se si volesse mettersi sul punto di vista estremo dell'ipotesi dei *quanti di luce*, ciò significherebbe allo stato attuale di questa teoria non semplificare, ma evitare la risoluzione del problema.

Resta da vedere, se è possibile modificare l'ipotesi C. Lasciamo da parte la considerazione, che altre ipotesi non andrebbero d'accordo con le vedute di Ritz, a cui sopra accennammo. L'essenziale è, che le ipotesi di Tolman e di Stewart sono nettamente contraddette dall'esperienza. Ogni altra ipotesi sopra la velocità della luce riflessa, se vuole andar d'accordo con le misure dell'effetto Doppler, deve ammettere per v_2 un valore, che differisce da quello dato dall'ipotesi C solo per termini del 2° ordine. Ora una tale correzione dei termini in β^2 nella (1') da introdursi soltanto per il raggio riflesso sembra del tutto ingiustificata e artificiosa. Del resto essa condurrebbe in generale ancora ad un effetto del 2° ordine. Ma ciò che più importa è, che una simile modificazione dell'ipotesi C toglierebbe alla teoria balistica uno dei suoi pregi più importanti: la spiegazione naturale dell'esperienza di Michelson. Ritz ammetteva, che nell'esperienze di Michelson la velocità della luce rispetto all'osservatore e a tutti gli apparecchi restava uguale a c prima o dopo le riflessioni e rifrazioni, perchè anche la sorgente era trascinata nel moto comune, e quindi era in quiete rispetto al sistema. Tolman e Stewart ammettono invece, che siccome anche lo specchio e l'immagine speculare della sorgente si muovono con la stessa velocità, anch'essi possono essere considerati come sorgenti della luce riflessa, che in conformità alla (1) determinano la v_2 , senza che venga a meno la spiegazione di Ritz.

Ma se per la luce riflessa si modificano i termini del 2° ordine della (1), l'esito dell'esperienza di Michelson non si comprende più, e occorre escogitare una spiegazione *ad hoc*, che, se anche sarà trovata, probabilmente non sarà semplice. Infatti, basta ricordare, che tale modificazione sarebbe in contraddizione col principio dell'invarianza rispetto a una traslazione uniforme.

Riassumendo, *ritengo esclusa una modificazione dell'ipotesi C*, finchè si resta nell'ordine di idee di Ritz.

Certo è, che si potrebbe immaginare una teoria balistica della riflessione, pensando ai quanti di luce e alle analogie con l'urto elastico, per cui la velocità della luce riflessa sarebbe uguale a quella della luce incidente e le leggi sulla riflessione sarebbero rispettate; si potrebbe allora supporre, che non valendo l'ottica ondulatoria, anche le misure di Majorana della lunghezza d'onda coll'interferometro non provano nulla di contrario all'ipotesi di Stewart.

Chi volesse esaminare questo caso, non avrebbe che da misurare la velocità della luce emessa dai raggi canale con il metodo di Foucault. L'effetto sarebbe del 1° ordine, e una variazione di velocità dell'ordine di β sarebbe facilmente rilevabile⁽¹⁾.

Ad ogni modo finchè si resta nel campo dell'ottica ondulatoria e si ammette la validità dei principi di Fermat e di Huyghens, l'assenza dell'effetto espresso dalla formula (2) appare come una prova decisamente contraria alla teoria di Ritz. Resta da esaminare, se il dispositivo sperimentale da me adottato dà garanzie, che un tale effetto nell'esperienza eseguita doveva esser rivelato.

3. — Come sorgente in moto utilizzai i raggi canale, e più precisamente mi servii di una fenditura larga 0.3 mm., praticata nel catodo di alluminio (diametro 4 cm.). Il tubo a idrogeno era azionato con un rocchetto, e la differenza di potenziale applicata, valutata con una scintilla equivalente, era dell'ordine di 30 KV. È noto, che in queste condizioni la velocità massima degli atomi di idrogeno è dell'ordine di $2 \cdot 10^8 \frac{\text{cm.}}{\text{sec.}}$; il

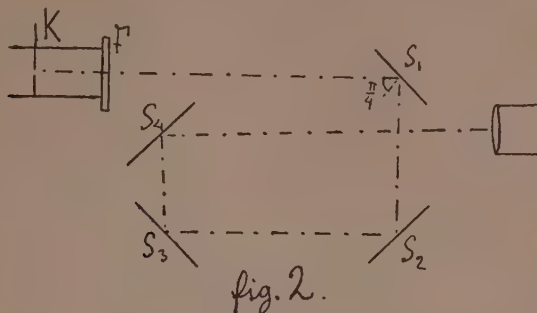
valore corrispondente di β è $\frac{1}{150}$.

La disposizione degli apparecchi è indicata in fig. 2. Di fronte al catodo K (dalla parte posteriore) una finestra F di quarzo fuso (lastra a faccie piane e parallele) permetteva di fare le osservazioni in direzione del movimento delle sorgenti. La luce, emessa in prossimità della fenditura, veniva raccolta dopo una o più riflessioni da un cannocchiale messo a fuoco sulla fenditura. L'ingrandimento angolare del cannocchiale era 80, cosicchè un angolo inferiore a 1" poteva essere risolto. Le riflessioni multiple servivano per aumentare l'effetto.

Dato che secondo la teoria soprasvolta la direzione della luce emessa da atomi in moto dopo la riflessione è diversa da quella della luce proveniente da atomi in quiete, si poteva prevedere o una formazione di una seconda immagine della fenditura, analoga a quella che si osserva nell'effetto

(1) L'idea di fare questa misura, servendomi dei raggi canale era la prima che mi è venuta in mente. Solo nella discussione comune col prof. Perucca è scaturita la necessità di studiar prima a fondo il fenomeno di riflessione, donde prese origine il presente lavoro.

Doppler, oppure almeno uno slargamento o una slavatatura di uno dei bordi dell'immagine data da atomi in quiete. Per calcolare la grandezza dell'effetto ci riferiamo alla formola (2); con un angolo di incidenza di 45° si ha per la prima riflessione: $\varphi = i = 45^\circ$ e quindi $r - i = \frac{1}{2} \beta^2 = 4.6''$. Per le



quattro riflessioni indicate e scelte in modo tale, che i singoli effetti si sommino, l'effetto è (come sarebbe facile a verificare) quattro volte maggiore cioè:

$$r - i = 18''.4.$$

Nemmeno una traccia di un simile effetto si è potuta osservare, mentre una ventesima parte di quest'angolo potrebbe ancora esser vista.

Non si è visto neanche uno spostamento (eventuale) rispetto ai fili del reticolo dell'oculare.

Se anche si volesse ammettere, che a causa dell'eccitazione irregolare con rocchetto quei raggi canale, che danno una sensibile quantità di luce, si muovessero con velocità due volte minore della precedente, e si ponesse

$\beta = \frac{1}{300}$, l'angolo corrispondente a quattro riflessioni risulterebbe ancora di $4.6''$, e una tale deviazione sarebbe stata ancora facilmente rivelata.

Si potrebbe giustamente obiettare a questo semplice dispositivo, che esso contiene due elementi, che costituiscono un'incognita e richiedono delle ricerche particolari: la finestra di quarzo e il cannocchiale. Si potrebbe supporre, che per es. nell'attraversare la lastra il raggio incidente perde le caratteristiche dovute al movimento della sorgente, il che spiegherebbe l'esito negativo della prova. Ma un tale cambiamento di velocità da $c + u$ a c sarebbe accompagnato in virtù del principio di Fermat da una deviazione del raggio emergente di un angolo del primo ordine in β . Nulla di simile ho potuto osservare.

Più complicato è il problema della formazione dell'immagine nel cannocchiale. Per risolvere la questione sarebbe indispensabile una teoria balistica

della rifrazione. Di tali teorie se ne possono costruire parecchie, ma manca finora uno studio sperimentale di esse.

Sembra però difficile ammettere, che i due cammini ottici, dovuti alle sorgenti in moto e in quiete, debbano avere, proprio nel caso dei sistemi diottrici, estremi comuni; cioè dare sempre immagini coincidenti, mentre questi cammini differiscono in generale per dei termini del secondo ordine.

In conclusione posso dire, che questa prima esperienza eseguita coi mezzi limitati, che avevo a mia disposizione, costituirebbe una prova sfavorevole alla teoria balistica.

Ma dato che, da un lato, non mi è stato possibile studiare, per es. ricorrendo all'effetto Doppler, le velocità effettivamente raggiunte dai raggi canale nel mio tubo e la corrispondente distribuzione dell'intensità di luce, emessa da essi, nello spettro delle velocità, e dall'altro, non ho potuto fare a meno del cannocchiale per separare i due raggi riflessi, mi riservo di rifare l'esperienza con mezzi più larghi, eliminando in primo luogo i due inconvenienti sopra accennati (l'ultimo con l'uso di uno specchio concavo) e di comunicare ulteriormente i risultati definitivi.

Ringrazio il prof. Perucca per i mezzi del suo laboratorio messi a mia disposizione, per il continuo interesse e per le osservazioni critiche fatte a questo mio lavoro.

Mineralogia. — *Sui cristallini di zolfo che accompagnano l'anglesite e la galena di Monteponi.* — Nota di E. BILLOWS presentata dal Socio F. MILLOSEVICH ⁽¹⁾.

È noto che della forma cristallina dello zolfo, che in cristallini accompagna l'anglesite e la galena di Monteponi, si sono già occupati il Busz ⁽²⁾ e il Quercigh ⁽³⁾.

Indipendentemente da quest'ultimo Autore, io stesso pubblicai simultaneamente un mio contributo facente parte di una prima serie di studi cristallografici di minerali sardi ⁽⁴⁾.

Mi si è ultimamente presentata una buona occasione di completare lo studio dell'interessante argomento, avendo ricevuto in dono dal sig. G. Pintus, impiegato della Società di Monteponi, un bel pezzo di galena con diverse geodine rivestite da cristalli di anglesite, e da pochi bei cristallini di zolfo. Il campione è oggi piuttosto raro e perciò ho creduto opportuno accrescere di nuovi elementi il mio precedente lavoro sullo zolfo di Monteponi.

Sottoposi, dunque, a nuove e accurate misure i tre cristallini precedentemente studiati allo scopo di meglio confrontarli con quelli del nuovo campione.

Nel primo campione in una cavità geodica contenente anglesite in cristalli osservai una dozzina circa di bei cristallini di zolfo di colore giallo caratteristico, a lucentezza resinosa, della grossezza variabile da 1 mm. a $\frac{1}{2}$ mm. circa.

Salvi quattro, tutti gli altri sono insieme raggruppati. Essi sono impiantati prevalentemente per la base (001) (non pochi lo sono lungo [001]) su cristallini bellissimi equidimensionali di anglesite, i quali alla loro volta formano una bella geodina di circa 50 individui, di cui uno è grosso 2 cm. Su questi sono impiantati in due punti opposti due cristalli di zolfo. Un cristallo è poi impiantato direttamente sulla galena, la quale all'orlo della cavità è parzialmente alterata in minio rossastro pulverulento.

I cristallini da me scelti per le misure sono ad abito tipico, tozzo e bipiramidato, come è effigiato, conforme al vero, nelle tre prime figure.

Il nuovo campione mostra sette geodi di varia grandezza ripiene di bei cristalli di anglesite.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Cagliari.

(2) K. BUSZ, « Zeitschr. f. Kryst. », 15, 619.

(3) E. QUERCIGH, *Ancora sullo zolfo che accompagna alcune galene sarde*, « Rend. R. Acc. Lincei » Cl. Scienze, vol. 32° (5), 2° sem. 1923.

(4) E. BILLOWS, *Studi cristallografici di minerali sardi*, (serie 1ª) « Acc. Veneto-trentino-istriana », Padova, vol. 14°, 1923.

In una delle geodi, la più grande, osservai pochissimi cristallini di zolfo tozzi, piccolissimi, grossi da $\frac{1}{3}$ di mm. a 1 mm. ca., impiantati per lo più per la base, in parte direttamente sulla galena ed in parte sull'anglesite.

I cristallini sono più brillanti di quelli del campione precedentemente studiato e ne ho staccati quattro per sottoporli ad accurata misura.

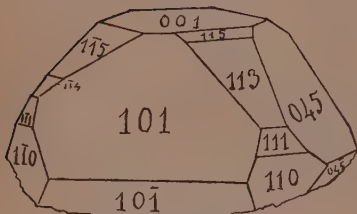


Fig. 1.

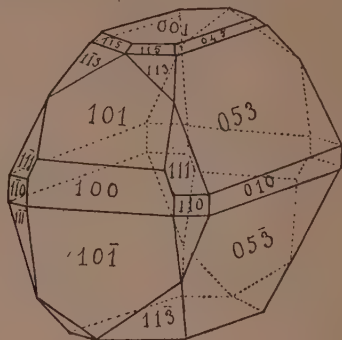


Fig. 2.

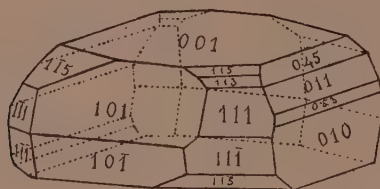


Fig. 3.

Dò qui l'effigie del più grosso di essi, presso a poco come si presenta alla vista, ma convenientemente integrata e regolarizzata.

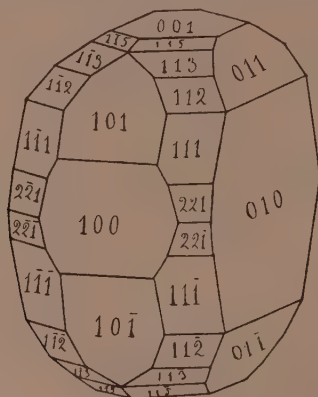


Fig. 4.

Le facce generalmente sono buone per misure angolari attendibili. Migliori ancora sono le misure sui cristalli del secondo campione.

Le forme semplici di tutti i sette cristalli studiati sono le seguenti 18:

{100}	{011}	{031}	{111}	{115}
{010}	{101}	{045}*	{112}	{221}
{001}	{10.0.61}*	{053}*	{113}	
{110}	{021}*	{0.92.1}*	{114}	

Le cinque asteriscate, di cui due sono forme vicinali, sono forme nuove per la specie e risultano da misurazioni angolari sufficientemente attendibili.

A {045}, e tanto meno a {053}, non si può assolutamente sostituire {011}, che è più in armonia con la legge di complicazione, date le marcate differenze nei valori angolari corrispondenti.

Non mi soffermo, per brevità, a descrivere l'aspetto fisico delle singole facce, che è, ripeto, generalmente buono, dando immagini alquanto chiare, sufficienti per buone misure. Generalmente, mi spiego, le immagini sono a contorno non ben netto, ma permettono una collimazione discretamente buona.

Espongo la tabella complessiva delle misure e dei calcoli:

Angoli	n	Misurati		Calcolati	Δ
		limiti	medie		
(100) . (110)	5	38°. 44' — 39°. 10'	38°. 54'	39°. 6'	— 12'
(001) . (101)	14	66. 39 — 67. 16	66. 52	66. 52	—
(001) . (10. 0. 61)	1	—	68. 57	69. 0	— 3
(001) . (045)	8	56. 21 — 56. 47	56. 33	56. 42 $\frac{1}{2}$	— 9 $\frac{1}{2}$
(001) . (011)	10	62. 9 — 62. 31	62. 20	62. 17	+ 3
(001) . (011)	1	—	106. 5	107. 8	— 13
(001) . (115)	17	30. 11 — 31. 29	31. 3	31. 6 $\frac{1}{2}$	— 3 $\frac{1}{2}$
(001) . (113)	19	44. 32 — 45. 23	45. 9	45. 10	— 1
(001) . (114)	2	37. 8 — 37. 20	37. 14	37. 2	+ 12
(001) . (112)	9	56. 15 — 56. 33	56. 23	56. 28	— 5
(001) . (111)	19	71. 38 — 71. 46	71. 42	71. 40	+ 2
(001) . (221)	5	80. 24 — 80. 41	80. 30	80. 35 $\frac{1}{2}$	— 5 $\frac{1}{2}$
(010) . (111)	3	53. 11 — 53. 31	53. 20	53. 13	+ 7
(010) . (112)	1	—	33. 28	33. 32	— 4
(010) . (113)	1	—	63. 32	63. 25 $\frac{1}{2}$	+ 6 $\frac{1}{2}$
(010) . (221)	1	—	71. 47	71. 52	— 5
(010) . (110)	1	—	50. 15	50. 54	— 21
(010) . (021)	2	14. 41 — 15. 1	14. 51	14. 43	+ 8
(010) . (031)	2	10. 9 — 10. 23	10. 16	10. 5	+ 11
(010) . (053)	3	17. 38 — 17. 49	17. 44	17. 30	+ 14
(010) . (0. 92. 1)	1	—	1. 11	1. 11	—
(011) . (045)	1	—	5. 46	5. 34 $\frac{1}{2}$	+ 11 $\frac{1}{2}$
(011) . (053)	1	—	10. 17	10. 13	+ 5
(011) . (111)	6	47. 44 — 48. 16	47. 55	47. 26	+ 29
(011) . (112)	1	—	43. 39	43. 44 $\frac{1}{2}$	— 5 $\frac{1}{2}$
(011) . (113)	4	22. 0 — 22. 15	22. 7 $\frac{1}{2}$	22. 2	+ 5 $\frac{1}{2}$
(011) . (221)	1	—	51. 3	51. 10	— 7
(110) . (010)	4	50. 31 — 50. 52	50. 40	50. 54	— 14
(110) . (111)	20	18. 1 — 18. 31	18. 21	18. 20	+ 1
(110) . (112)	2	33. 17 — 33. 43	33. 30	33. 32	— 2
(110) . (221)	5	9. 9 — 6. 30	9. 18	9. 24 $\frac{1}{2}$	— 6 $\frac{1}{2}$
(101) . (111)	10	36. 41 — 36. 58	36. 47	36. 47	—

Angoli	n	Misurati		Calcolati	Δ
		limiti	medie		
(101) . (113)	9	53°. 9' — 53°. 20'	53°. 17'	53°. 15'	+ 2'
(101) . (115)	8	44. 51 — 45. 15	45. 3	45. 10 $\frac{1}{2}$	— 7 $\frac{1}{2}$
(111) . (113)	12	26. 30 — 26. 41	26. 34	26. 30	+ 4
(111) . (112)	1	—	15. 0	15. 4	— 4
(111) . (115)	3	40. 39 — 40. 51	40. 44	40. 33	+ 11
(111) . (117)	1	—	36. 36	36. 40 $\frac{1}{2}$	— 4 $\frac{1}{2}$
(111) . (031)	1	—	49. 16	49. 53 $\frac{1}{2}$	— 37 $\frac{1}{2}$
(112) . (113)	1	—	11. 27	11. 17 $\frac{1}{2}$	+ 9 $\frac{1}{2}$
(113) . (115)	3	14. 9 — 14. 21	14. 13	14. 3	+ 10
(113) . (045)	1	—	40. 23	40. 27	— 4
(113) . (114)	1	—	8. 17	8. 8	+ 11
(113) . (113)	1	—	66. 36	66. 45 $\frac{1}{2}$	— 9 $\frac{1}{2}$
(045) . (053)	1	—	15. 46	15. 48	— 2

I valori calcolati lo sono con le costanti di Kokscharow, approssimate a meno di $\frac{1}{10.000}$.

Come ha fatto il prof. Quercigh, non ho creduto conveniente calcolare nuove costanti per questa località, perchè le misure, come si è detto, non sono assolutamente precise.

Le costanti approssimate a meno di $\frac{1}{10.000}$ di Kokscharow sono in rapporto:

$$a : b : c = 0.8131 : 1 : 1.9034.$$

Come si vede dalla tabella, c'è sufficiente accordo fra osservazione e teoria.

Come Busz e Quercigh, anch'io ho constatato povertà di forme nello zolfo di Montepioni, e la scarsità grande, non assenza assoluta, dei pinacoidi {100} e {010} e in aggiunta ho trovato, come forme nuove della specie, rigorosamente constatate, in armonia con la legge di complicazione, i prismi paralleli a [100] : {021}, {045}, {053} e la bipiramide, nuova per la località, {221}.

Genetica. — *Ermafroditismo parziale e partenocarpia in «Phoenix dactylifera L.»*. Nota del dott. HELIOS SCAETTA presentata dal Socio Corrisp. F. CAVARA.

Fin dal 1922 mi venne fatto di osservare nel palmeto di Bengasi (Cirenaica) fenomeni abbastanza strani negli organi riproduttori di alcune Palme da dattero; da un lato individui maschili che producevano fiori ermafroditi; dall'altro lato piante femminili che, regolarmente impollinate, portavano grappoli con datteri apirenici. I soggetti che tali fenomeni di anomalia florale presentavano, furono oggetto di costante osservazione per quattro anni consecutivi, e potei rilevare che essi si riproducevano sempre nelle medesime forme, o con parziali modificazioni che si avveravano in seguito ad influenze d'ordine climatico.

Ermafroditismo. — Era presentato da due piante maschili di *Phoenix dactylifera* della razza «Becrèri», i soli in tutto il palmeto bengasino che offrissero tale anomalia che gli stessi coltivatori arabi del luogo avevano già osservata per diversi anni, poichè erano usi a servirsi dei fiori maschili per fecondare buon numero di piante femminili, essendo il polline della razza Becrèri molto apprezzato perchè possiede la facoltà di conservare a lungo il potere germinativo. I primi grappoli, quando la fioritura si annunzia precoce, escono dalla corona fogliare alla fine di gennaio o nei primi di febbraio. Dopo un intervallo di circa 20 giorni compaiono le infiorescenze di seconda produzione sovrapposte alle prime. Se esse dopo l'uscita dalla spata e ad antesi compiuta, anzichè essere tagliate e adoperate per la impollinazione, sono lasciate sulla pianta, non tardano a manifestarsi i prodromi della metamorfosi florale che porta alla formazione di ovari differenzianti, in breve, in frutticini. È da notare intanto che se vengono lasciate sulla pianta le infiorescenze di prima formazione, tale fenomeno non si verifica: da ciò la convinzione negli Arabi che il polline dei primi grappoli sia il migliore, mentre quello di seconda produzione, ritenuto meno vigoroso, viene somministrato a palme di fioritura tardiva ritenute meno esigenti. Osservati al momento dell'antesi i fiori dei grappoli lasciati sulla pianta, per rendere possibile l'ermafroditismo, si presentano perfettamente normali con calice, corolla e 6 stami ad antere con polline ben costituito. Trascorsi 30-40 giorni, si rende visibile l'ingrossamento dei tre ovari i quali, a differenza di quelli dei regimi normali, si sviluppano in egual modo dando, cioè, tre frutticini in luogo di uno solo, per aborto di due ovari, o due, come in qualche varietà (Tabùni); talora anche, per anomalia, si hanno nella razza

Becréri, ermafrodita, persino quattro ovari accresciuti in frutticini (fig. 1 e 2). Questi, in ogni caso, non presentano semi, ma se l'annata decorre favorevole, senza sbalzi di temperatura che disturbino il loro sviluppo, possono



Fig. 1 - Rametto di grappolo di *Phoenix dactylifera* var. Becréri a fiori ermafroditi dopo 40 giorni dall'antesi.



Fig. 2. - Grappolo di frutti apirenici di *Phoenix dactylifera* var. Becréri.

raggiungere la maturazione completa in un periodo di 4 mesi, e nei casi più favorevoli passare allo stato di ultramaturazione e divenire atti al consumo. Nel primo stadio di maturazione fisiologica hanno un colore giallo

chiaro con tendenza al verde nella parte basale; superficie liscia, non pruinosa; polpa spessa, croccante, di sapore dolciastro, astringente, con assenza di aromi particolari. Ma nel secondo stadio, la colorazione si fa giallo-ambra carica, la polpa diviene quasi trasparente, con sapore dolce accentuato e abbastanza gradevole. La superficie si fa rugosa con solchi longitudinali; la buccia perde la primitiva aderenza e si stacca sotto lieve pressione. Questi frutti apirenici sono molto più piccoli dei datteri normali; hanno forma allungata concavo-convessa con tre linee di emergenza sì che, in sezione trasversale, si presentano grossolanamente triangolari.

Questa anomala fruttificazione in soggetti maschili della var. Becrèri di *Phoenix dactylifera*, può essere molto disturbata dall'azione dei venti e particolarmente dello « Scherghi », così chiamato dagli Arabi il vento fresco-asciutto di N. E. il quale determina un'intensa cascola di frutticini, venendosi ad alterare la funzione traspiratoria, effetto questo che si verifica, del resto, anche nelle piante normali nel periodo dell'invasatura dei datteri, i quali vengono a cadere.

Allo stato dei fatti, intanto, è ben difficile spiegare l'origine o la causa del fenomeno dell'ermafroditismo parziale nei due individui della razza Becrèri. Esso si presenta, al certo, come una mutazione dovuta a qualche disturbo d'ordine fisiologico e probabilmente all'influenza di ormoni sulle cellule germinali. Tale induzione verrebbe suffragata da un fatto analogo, riferitomi da coltivatori arabi, avveratosi su altra palma maschile attribuita alla razza Tabùni la quale, siccome produceva scarsamente per avere il tronco minato da insetti, fu sottoposta alla circolare incisione per estrarne la linfa ossia il « laghbi ». Dopo tre anni dalla incisione, il cono gemmario produsse infiorescenze che diedero frutti apirenici con le qualità organolettiche dei datteri normali.

In questo caso è più agevole riferirsi a disturbi funzionali della pianta indotti dall'azione parassitaria di animali, susseguita dall'incisione del cono gemmario (operazione questa che se condotta senza le volute cautele può cagionare anche la morte de' soggetti), per spiegare come sotto l'influenza di sostanze eccitatrici si sia potuto provocare l'anomalia nell'apparato sessuale.

Per quanto concerne la stabilità del fenomeno, che già da più anni si manifesta nella razza Becrèri, e per poter accertare se trattasi di una mutazione costante od occasionale, si renderebbero necessari esperimenti di allevamenti di individui ottenuti con seme prodotto dalla fecondazione di soggetti femminili normali con polline di mutanti ad ermafroditismo parziale. La prova richiede, come è ovvio pensare, molti anni ed osservazioni metodiche⁽¹⁾.

(1) Fenomeni analoghi, ma non identici a quelli sopradescritti, riferisce O. BECCARI in *Malesia*, III, p. 358. Il dott. Henriquez aveva osservato che una pianta femminile di *Phoenix dactylifera* dell'Orto botanico di Coimbra dava ogni anno infiorescenze maschili. È lo stesso Beccari osservò nell'Erbario di Kew esemplari di palma da dattero di Molta (India), i quali insieme a fiori femminili presentavano fiori maschili, che differivano alquanto dai normali.

Partenocarpia. - Questo fenomeno è molto più noto del precedente ed è frequentissimo in tutti i palmeti della costa libica, e recentemente osser-

vato anche dal prof. De Cillis nelle Oasi costiere della Tripolitania (*Fenicigrafia Libica*, in « Boll. d'Inform. Econ. Minist. Colonie », 1923); fenomeno che ha richiamato da lungo tempo l'osservazione di botanici ed agrari per altre piante (Gaertner 1778, Filippo Re 1808, Kirchner 1900, Noll 1902, Cavara 1913, Longo 1915, ecc.).

La partenocarpia, o formazione di frutti apirenici, più genuina, più frequente si ha nelle palme femminili che per trascuranza non sono state impollinate o per condizioni atmosferiche sfavorevoli al naturale trasporto di polline funzionalmente efficace; ovvero anche per polline eventualmente alterato nella sua facoltà germinativa. In questi casi, pur non verificandosi la fecondazione, si assiste ad una graduale formazione di frutticini apirenici che si accrescono e, se non intervengono condizioni climatiche sfavorevoli, maturano regolarmente, raggiungendo dimensioni di un terzo maggiori di quelle dei frutti partenocarpici delle palme Becrèri sopra descritti.

Ma casi di partenocarpia che hanno in particolar modo richiamata la mia attenzione, mi furono offerti da due soggetti ritenuti ibridi e denominati dagli Arabi rispettivamente: « Nuà Hammuri » e « Nuà Safra »; « Nuà » ha il significato generico di seme, e si attribuisce a tutte quelle palme da datteri la cui origine è da seme e non da moltiplicazione agamica (per pol-



Fig. 3. - Grappolo di frutti apirenici di Ibrido refrattario all'impollinazione.

a) frutto con nocciolo.

loni). Ho notato che questi due ibridi, per quanto venissero regolarmente impollinati con polline di soggetti giovani e vigorosi, e con tutte le cautele per assicurarsi che esso non potesse venir disperso, non restavano fecondati, ma davano anch'essi frutti apirenici che giungevano ogni anno a regolare maturazione. Solo quest'anno (quarto di osservazione) ho potuto rilevare che non tutti i frutti di un grappolo erano partenocarpici, ma qua e là qualcuno presentavasi fornito di seme (fig. 3 a); il che denota non solo la efficacia del polline impiegato, ma che la partenocarpi non era generale.

La forma di questi frutti apirenici è la stessa di quella notata per la pianta a fiori ermafroditi, ma sono un poco più grandi, e con la caratteristica inserzione a tre, anzichè ad uno come nei casi normali; essi per altro non raggiungono l'ultramaturazione e la polpa ha sapore dolce gradevole ma leggermente tannico, i caratteri organolettici, però, sono in genere gli stessi dei datteri normali.

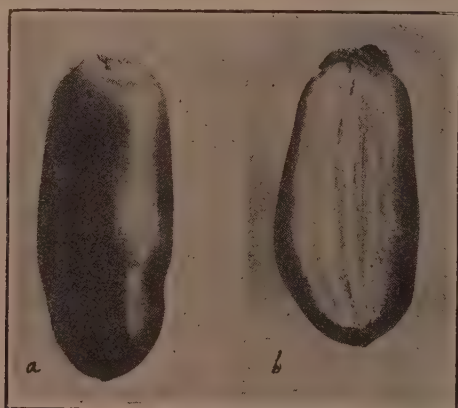


Fig. 4. — Frutti (datteri) partenocarpici di « Meccania Anvia » in grandezza naturale
a) intero, b) sezionato.

Un altro caso ho potuto osservare in una località presso Bengasi, di una palma di razza « Meccania Amra » (Meccano rosso) la quale, regolarmente impollinata, produceva del pari frutti partenocarpici e di grandezza normale. In molti di essi mancava l'inserzione a tre sul ramo, talora a due e più spesso ad uno. Molto probabilmente era avvenuto un diradamento del grappolo per azione del vento o di altre cause non precisabili, onde, aumentati gli spazi tra i frutti, questi avevano assunto una forma diritta, propria dei datteri con nocciolo, e solo in alcuni era accennata la caratteristica forma concavo-convessa dei frutti apirenici. Presentavano questi frutti, oltre le dimensioni eguali dei datteri normali (fig. 4), polpa compatta o solo vacuolata nella zona interna, rimasta priva di seme, e raggiungevano la

completa maturazione con caratteri organolettici quasi identici a quelli dei datteri normali della stessa varietà.

La causa determinante i citati casi di partenocarpia in palme regolarmente impollinate sfugge ad una prima indagine. Non credo possa attribuirsi a particolarità di condizioni dell'ambiente (terreno, grado di mineralizzazione delle acque del sottosuolo, fattori climatici) perchè a pochi metri di distanza delle palme da me individuate, altre ve ne erano sia di razze accertate, sia di ibridi vegetanti in condizioni identiche e impollinate con lo stesso polline, che producevano datteri normali. Il ripetersi del fenomeno, per più anni consecutivi, come è stato da me osservato per i due ibridi « Nuà Hammuri » e « Nuà Safra » autorizza a ritenere che essi abbiano acquisita e fissata l'attitudine a produrre frutti partenocarpici. Se mediante la moltiplicazione agamica (per polloni) dai due ibridi si otterranno soggetti presentanti la stessa attitudine alla partenocarpia, si avrà la dimostrazione della stabilità del carattere acquisito. Come conseguenza pratica del fatto osservato, se occorrerà di riscontrarlo in varietà o razze di oasi interne ove la produzione de' datteri è veramente pregiata, l'ottenerli apirenici in nulla inferiori a quelli di origine sessuata, costituirebbe un risultato economico e commerciale di notevole importanza.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente VOLTERRA pronuncia le seguenti parole:

Una gravissima sciagura ha colpito l'Accademia. Il nostro antico, amato Presidente, il prof. Francesco D'Ovidio, ci ha abbandonati per sempre il 24 novembre scorso.

Non sta certamente a me di rievocare dinanzi a voi l'opera di questo valoroso scienziato ed insigne scrittore. Altri Soci aventi speciale competenza parleranno di lui ed io spero che in una prossima solenne seduta, a tale scopo convocata, la sua multiforme figura di critico, di filologo, di letterato verrà lumeggiata dai suoi colleghi ed amici, mentre ne verrà illustrata l'azione nobile ed efficace di maestro e di educatore.

Tengo solo oggi a ricordare i sentimenti di viva e profonda gratitudine che noi tutti abbiamo verso la sua memoria per quanto egli fece a vantaggio del nostro Istituto.

Il D'Ovidio succedette nel 1904 al Blaserna come Vice-presidente ed egli tenne questa carica per dodici anni. Nel 1916 veniva eletto una prima volta Presidente e poi riconfermato, finchè per disposizione statutaria dovette abbandonare l'alta direzione dell'Accademia.

Quelle preziose doti di mente e di animo che gli valsero durante tutta la vita, la stima e l'affetto di quanti lo conobbero, egli le esplicò nell'esercizio dell'ufficio commessogli dal nostro Sodalizio.

E difatti nei momenti difficili egli spiegò rara energia; nelle situazioni delicate ebbe somma prudenza; in ogni occasione mostrò quella equità e quella benevolenza che gli cattivarono l'animo di tutti; Francesco D'Ovidio, mentre gelosamente conservava le antiche tradizioni, aveva chiara visione delle moderne tendenze del grande Istituto che egli presiedeva, onde con acutezza d'ingegno ne intuiva i nuovi bisogni e con fermezza di carattere ne secondava la costante evoluzione.

E quanti ardui ostacoli e difficili circostanze dovette affrontare il D'Ovidio nei critici anni durante i quali tenne la Presidenza!

Si pensi alle relazioni internazionali nel periodo della guerra e dell'immediato dopo guerra. Si pensi poi alla gravissima situazione finanziaria nella quale si trovò l'Accademia alcuni anni or sono, quando la mancanza dei mezzi necessari paralizzava ogni iniziativa e faceva temere che la sua vita scientifica non potesse continuare come nel passato.

Fu merito grande del D'Ovidio se la crisi venne felicemente superata e se i Lincei poterono riprendere la loro feconda attività nel campo degli studi.

Questi ricordi resteranno indelebilmente impressi nell'animo di noi tutti che abbiamo seguito giorno per giorno l'opera sua e abbiamo diviso le sue ansie, i suoi timori, le sue speranze; ma questi ricordi tramanderemo a coloro che verranno dopo di noi, affinchè il nome del D'Ovidio abbia un posto d'onore nella storia della nostra Accademia.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 1° novembre 1925.

- AGAMENNONE G. — Animali e terremoti. (Estr. dalla rivista « La Meteorologia pratica » di Montecassino. Anno VI, n. 3, 1925). Subiaco, 1925, 8°, pp. 1-4.
- AGAMENNONE G. — Il Barbanera del terremoto. (Estr. dal giornale « l'Elettricità ». Anno XXXIV, vol. IV, n. VI, 1925). Roma, 1925, 8°, pp. 1-3.
- AGAMENNONE G. — Ripartizione oraria dei fenomeni sismici a Minea (Catania). (Estr. dal « Bollettino della Società Sismologica Italiana ». Vol. XXX, fascicoli 3-4, anno 1924-25). Selci, 1925, 8°, pp. 1-7.
- APPELL P. — Notice sur les travaux scientifiques. (Extr. des « Acta mathematica », tome 45, pp. 161-285). Uppsala, 1925, 4°.
- BASSI A. — Opere di Agostino Bassi scelte e pubblicate a cura del Comitato Nazionale per la ristampa. Pavia, 1925, 8°, pp. I-LXVIII, 1-573.
- BATTAGLIA M. — Differenza biologica sperimentale tra i cocchi patogeni e quelli non patogeni nell'uomo. (Estr. da « Pathologica ». N. 396). Genova, 1925, 8°, pp. 1-4.
- BATTAGLIA M. — Metodo per colorare i tripanosomi nei tessuti fissati. (Estr. da « Pathologica ». N. 387). Genova, 1925, 8, s. p.
- BESOZZI A. C. D. — L'acido malonico, l'etere dietilmalonico e i suoi derivati sodici. Milano, 1925, 8°. pp. 1-54.
- BIASUTTI R., DAINELLI G. Q. — I tipi umani. (Spedizione italiana de' Filippi nell' Himalaia, Caracorum, e Turchestàn Cinese, 1913-4, serie II, vol. IX). Firenze, 1925, 4°, pp. I-VII. 1-324.
- BONAGELLI B. — L'ammoniaco dell'antica Cirenaica. (Estr. dal « Bollettino di Informazioni economiche ». Anno 1925, n. 4). Roma, 1925, 8°, pp. 1-23.
- CALLIGARIS F. — Nuove vedute sulla costituzione dell' Universo. Udine, 1925, 8°, pp. 1-71.
- CAMPANILE G. — Ricerche sopra le condizioni di attacco e di sviluppo di Helminthosporium Allii su aglio. (Estr. da « Le Stazioni Sperimentali Agrarie Italiane ». Vol. LVII, 1924, pp. 413-28). Modena, s. d., 8°.
- CAMPBELL L. — A Tentative Classification of Long Period Variables. (Repr. from « Variable Comments ». Vol. I, no. IV, pp. 28-36). S. C. s. d., 8°.
- CARNERA L. — Il nuovo catalogo di stelle fondamentali di Washington e quella delle circumpolari di Berlino. (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei ». Vol. I, serie VI, fascicolo XII, 1925, pp. 707-13). Roma, 1925, 8°.
- CARNERA L. — Sulla determinazione dell'errore di inclinazione negli strumenti meridiani dei passaggi. (Extr. da « Bulletin géodésique »). Paris, 1925, 8°, pp. 1-14.
- CASTELOT F. J. — La Révolution Chimique et la Transmutation des Métaux. Paris, 1925, 8° p., pp. 1-360.
- COCHRAN D. M. — Notes on the Herpetological Collections Made by Dr. W. L. Abbott on the Island of Haiti. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 66, art. 6). Washington, 1924, 8°, pp. 1-15.
- CONTESSINI F. — Sul movimento uniforme dell'acqua nei canali e nelle condotte forzate. (Estr. dagli « Annali dei Lavori pubblici già Giornale del Genio Civile ». Anno 1925, fasc. II). Roma, 1925, 8°, pp. 1-22.
- DALL W. H. — Illustration of Unfigured Types of Shells in the Collection of the United States National Museum.

- (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 66, art. 17). Washington, 1925, 8°, pp. 1-41.
- DE MARCHI G. — La produzione di energia elettrica in Italia nell'anno 1923. (Estr. dagli «Annali dei Lavori Pubblici già Giornale del Genio Civile». Anno LXII, fasc. XII, 1924). Pisa, 1925, 8°, pp. 1-20.
- DE MARCHI G. — Relazione sulle disponibilità ed utilizzazione delle energie del Paese. Organizzazione delle ricerche sul regime dei corsi di acqua e della loro utilizzazione. (Estr. da «l'Elettrotecnica». Vol. XI, n. 33). Pisa, 1924, 8°, pp. 1-18.
- DE MONTESSU DE BALLOU F. — Necrologia per il Prof. G. Agamennone. (Estr. dal «Bollettino della Società Sismologica Italiana». Vol. XXV, fasc. 3-4, 1924-5). Selci, 1925, 8°, pp. 1-4.
- DUZEE (Van) M. C. — A Revision of the North American Species of the Genus *Argyra* Macquarx, Two-Winged Flies of the Family Dolichopodidae. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 66, art. 23). Washington, 1923, 8°, pagine 1-43).
- EDWARDS D. L. — Spectroscopic Parallaxes of B. Type Stars (Third Paper): Second List of 100 Parallaxes. (Repr. from the «Monthly Notices of the Royal Astronomical Society». Vol. LXXXV, pp. 339-444). Edinburgh. s. d., 8°.
- FAYARO G. — Leonardo da Vinci e Girolamo Fabrici d'Acquapendente nella storia delle scienze biologiche. (Estr. dal «Bollettino dell'Istituto Storico Italiano dell'Arte Sanitaria». Anno XXIV, fascicolo IV, 1925). Roma, 1925, 8°, pp. 1-9.
- FEDERICI E. — Contributi alla storia naturale dei Culicidi - I. La suzione degli alimenti nei Culicidi e l'ipotesi di una diretta trasmissibilità dell'infezione malarica. (Estr. dal «Redia». Vol. XVI, pp. 51-68). Firenze, 1925, 8°.
- FERRARIS A. — Macchine idrauliche futuristiche secondo il punto di vista di un artista. Alessandria, 1925, 8°, pp. 1-20.
- GRANDI G. — Contributi alla conoscenza degli imenotteri melliferi e predatori - II. Documenti etologici e morfologici sul Crabro (*Entomognathus brevis*.) v. d. Lind Crabronide predatore di Alticidi. (Estr. dal «Redia». Vol. XVI, pp. 69-78). Firenze, 1925, 8°.
- GRASSI G. B. — Necrologia di Battista Grassi per C. Dobell (Repr. from «Nature». 18 July, 1925). Edinburgh, 1925, 8°, pp. 1-4.
- HAY P. O. — A Further and Detailed Description of the Type of *Elephas Roosevelti* Hay and Descriptions of Three Referred Specimens. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 66, art. 34). Washington, 1925, 8°, pp. 1-6.
- HAY P. O. — On Remains of *Mastodon* Founa in Texas, *Anancus Brazosius* and *Gomphotherium Cimarionis*. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 66, art. 35). Washington, 1923, 8°, pagine 1-15.
- HYMAN O. W. — Studies on the Larvae of Orabs of the Family Xanthidae. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 67, art. 3). Washington, 1925, 8°, pp. 1-22.
- IMBEAUX E. — Projet de mise en valeur des chutes à créer entre la Méditerranée et la mer Morte: électrification de la Palestine, irrigation et canal de navigation intérieure. (Extr. des «Comptes-rendus des séances de l'Académie des Sciences», T. 181, 1925). Paris, 1925, 4°, pp. 1-5.
- INALDI G. — I principi della meccanica secondo i risultati dell'esperienza. (Estr. dal Giornale «l'Elettricità» N. 11, 1925). Pistoia, 1925, 8°, pp. 1-12.
- INALDI G. — Sulle trasformazioni dei vapori saturi. (Estr. da «Il vapore». Anno III, n. 3). Roma, 1925, 8°, pp. 1-5.
- IUDAY C. — *Senecella Calanoides* a Recently Described Fresh-Water Copepod. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 66, art. 4). Washington, 1925, 8°, pagine 1-6.
- KELLOGG R. — On the Occurrence of Remains of Fossil Porpoises of the Genus *Eurchinodelphis* in North America.

- (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 66, art. 26). Washington, 1923, 8°, pp. 1-40.
- LECAT M. — Sur l'addition des déterminants. (Extr. des « Annales de la Société Scientifique de Bruxelles ». T. XLIV. I partie, pp. 10-7). Louvain, 1924, 8°.
- LECAT M. — Notes diverses sur les déterminants. (Extr. des « Annales de la Société Scientifique de Bruxelles ». T. XLIV, 1924-5, pp. 129-46). Paris, 1925, 8°.
- LECAT M. — Effet, sur un déterminant, de son altération dans un domaine quelconque. (Extr. des « Annales de la Société Scientifique de Bruxelles ». T. XLIV, pp. 143-51). Louvain, 1925, 8°.
- LEONE S. — La lotta contro il tracoma e la profilassi visiva in provincia di Girgenti, 1925. Siracusa, 1925, 4°, pp. 1-24.
- LEONE S. — Profilassi visiva e del tracoma in provincia di Messina. — Organizzazione dei servizi. 1924-25. (I Relazione). Siracusa, 1925, 4°, pp. 1-28.
- LOCKYER M. A. — The Spectrum of Persei (Type Bope). (Repr. from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. LXXXV, no. 7, pp. 580-607). S. 1., 1925, 8°.
- MAC ATEE L. W., MALLOCH J. R. — Revision of Bugs of the Family Cryptostemmatidae in the Collection of the United States National Museum. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 67, art. 13). Washington, 1925, 8°, pp. 1-42.
- MAJIMA R. — Untersuchungen über den Japanlack. Tokyos, 1924, 8°, pp. 1-X, 1-154.
- MANSFIELD W. C. — Miocene Gastropods and Scaphopods from Trinidad, British West Indies. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 66, art. 22). Washington, 1925, 8°, pp. 1-65.
- MASCART J. — Sur la masse de l'atmosphère. S. d. to., 8°, pp. 1-6.
- MASON W. P. — A Revision of the Insects of the Alpid Genus Amphorophora. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 67, art. 20). Washington, 1925, 8°, pp. 1-92.
- MELIS A. — Una nuova specie di « Lasioptera » dell'olivo (*Lasioptera brevicornis* Melis sp. n.) (Estr. dal « Redia ». Volume XVI, pp. 41-3). Firenze, 1925, 8°.
- MERRILL G. P. — Notes on the Meteoric Stone of Colby, Wisconsin. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 62, art. 2). Washington, 1925, 8°, pp. 1-3.
- MERRILL G. P. — A New Meteoric Stone from Baldwyn, Mississippi. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 67, art. 6). Washington, 1925, 8°, pp. 1-2.
- MIELI A. — Pagine di storia della chimica. Roma, 1922, 8°, pp. 1-xxii, 1-254.
- MIELI A. — Gli scienziati italiani nell'inizio del medioevo ai nostri giorni. Vol. I, parte II. Roma, 1923, 4°, pp. 235-464.
- MIELI A. — Manuale di storia della scienza. Antichità. Roma, 1925, 8°, pp. 1-xxx, 1-567.
- MONDELLO U. — Ligniti xiloidi toscane. Livorno, 1925, 8°, pp. 1-49.
- MUESEBECK W. F. — A Revision of the Parasitic Wasps of the Genus Microbracon occurring in America North of Mexico. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 67, art. 8). Washington, 1925, 8°, pp. 1-84.
- NAGAOKA H., SUGURA Y. — Distribution of Electric Field in Metal Arcs and the Stark Effect observed in Arcs of Silver, Copper, Magnesium, Chromium, Nickel, Cobalt, Iron and Ten Other Metals. (Repr. from the « Japanese Journal of Physics ». Vol. 3, n. 13, 1924, pp. 139-42). s. l., 1924, 8°.
- NOTMAN H. — A Review of the Beetle Family Pseudomorphidae, and a Suggestion for a Rearrangement of the Adephaga, with Descriptions of a New genus and New species. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 67, Art. 14). Washington, 1925, 8°, pp. 1-34.
- NOTMAN H. — A Synoptic Review of the Tribe Osoricini from the Western Hemisphere. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 67, art. 11). Washington, 1925, 8°, pp. 1-26.

- ONIO G. — Anatomia e fisiologia dell'occhio nella serie animale. Milano, 1925, 8°, pp. I-XII, 1-714.
- PACCAGNELLA E. — Nuovi principi didattici per lo studio del pianoforte, teoria e composizione musicale. Monza, 1925, 8°, pp. 1-14.
- PEARL R. — The Interrelations of the Biometrie and experimental methods of acquiring knowledge: with special reference to the problem of the duration of life. (Extr. da «Metron». Revue Internationale de Statistique. Vol. II, n. 4, 1923). Ferrara, 1923, 8°, pp. 1-25.
- PEARL R. — Biologia generale. (Repr. from «Science». Vol. LX, 1924). S. l., 1924, 8°, pp. 1-3.
- PEARL R. — Note on Dr. John Drowulee's Paper on age Vitality. (Repr. from the «American Naturalist». Vol. LVIII, 1924, pp. 564-6). S. l., 1925, 8°.
- PEARL R. — Preliminary Account of an Investigation of Factors Influencing Longevity. (Repr. from the «Journal of the American Medical Association». Vol. 82, 1924). Chicago, 1924, 8°, pp. 1-20.
- PEARL R. — Starvation Life Curves. (Repr. from «Nature», 1924). Edinburgh, 1924, 8°, pp. 1-3.
- PEARL R. — The Curve of Population Growth. (Repr. from «Proceedings of the American Philosophical Society». Vol. LXIII, no. 1, 1924, pp. 10-7). S. l., 1924, 8°.
- PEARL R. — The Influence of Alcohol on Duration of Life. (Repr. from the «Proceedings of the National Academy of Sciences». Vol. X, n. VI, pp. 231-7). S. l., 1924, 8°.
- PEARL R. — The racial effect of alcohol. (Repr. from the «Eugenica Review», 1924). London, 1924, 8°, pp. 1-22.
- PEARL R. — The Racial Origin of Almshouse Paupers in the United States. (Repr. from Science, Vol. LX, No. 1557). S. l., 1924, 8°, pp. 1-5.
- PEARL R., PARKER S. L. — Experimental Studies on the Duration of Life. - IX. New Life Tables for *Drosophila*. (Repr. from the «American Naturalist», volume LVIII, 1924, pp. 71-82). S. l., 1924, 8°.
- PEARL R., PARKER S. L. — Experimental Studies of the Duration of Life. X. the Duration of Life of *Drosophila Melanogaster* in the complete Absence of Food. (Repr. from the «American Naturalist». Vol. LVIII, 1924, pp. 193-218). S. l.; 1924, 8°.
- PEARL R., REED L. J. — The Probable Error of certain Constants of the Population Growth Curve. (Repr. from the «American Journal of Hygiene». Vol. IV, n. 3, pp. 237-40, 1924). S. l., 1924, 8°.
- PÉLISSIER R. — Per il cinquantenario della Scuola d'ingegneria di Roma. Notizie storiche e biografiche raccolte da R. Péliissier. Roma, s. d., 8°, pp. 1-142.
- PISTOLESI E. — Il problema dell'elica intubata e le sue applicazioni. (Estr. dagli «Atti dell'Associazione Italiana di Aerotecnica». Anno IV, n. 4, 1924). Pisa, 1924, 8°, pp. 1-29.
- PISTOLESI E. — Influsso di un vento laterale sul funzionamento delle eliche. (Estr. da «l'Aerotecnica». Anno V, n. II, 1925). Pisa, 1925, 8°, pp. 1-16.
- Radium (Le). — Célébration du vingt-cinquième anniversaire de sa découverte. (1898-1923). Paris, s. d., 8°, pp. 1-85.
- REY PASTOR A. — Informe acerca de los fenomenos sísmicos ocurridos en la región de Pastrana (Guadalajara). Madrid, 1925, 8°, pp. 1-48.
- RIETTI F. — Le organizzazioni anticancerose con speciale considerazione degli Istituti per lo studio e per la cura del cancro all'estero. Firenze, 1925, 8°, pp. 1-18.
- RIDERA V. — Battaglie per il grano. Aquila, 1925, 8°, pp. 1-182.
- ROCCATI A. — La miniera di Pirite di «Sache» nel comune di Challant-St.-Victor (Valle d'Aosta). Torino, 1925, 8°, pp. 1-23.
- ROSS C. S., SHANNON E. V. — The Origin, Occurrence, Composition and Physical Properties of the Mineral Iddingsite. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 67, articolo 7). Washington, 1925, 8°, pp. 1-19.
- RUIZ M. N. — Nueva Teoria Cósmica y Aplicación a las Ciencias Naturales. 1925, 8°, pp. 1-253.

- RAVASTANO L. — Sulle cause aggravanti il mal secco negli agrumi del versante orientale della Sicilia. Acireale, 1925, 8°, pp. 1-7.
- SCHWARTZ B. — Parasitic Nematodes from Tonkin, Inda-China, including a New Species of Axaridia. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 66, art. 1). Washington, 1925, 8°, pp. 1-9.
- SESINI O. — Contributo allo studio sperimentale dell'equilibrio elastico per mezzo della doppia rifrazione accidentale. Pisa, 1924, 8°, pp. 1-13.
- SHANNON E. V. — Mineralogy and Petrography of Triassic Limestone Conglomerate Metamorphosed by Intrusive Diabase at Leesturg, Virginia. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 66, art. 28). Washington, 1925, 8°, pp. 1-31.
- SIBILIA C. — Alcune Laboulbeniaceae parassite di Acari. (Estr. dal «Redia». Vol. XVI, pp. 79-88). Firenze, 1925, 8°.
- SPRINGER F. — The Genus *Pentacrinus* in Alaska. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Volume 67, art. 5). Washington, 1925, 8°, pp. 1-7.
- STEJNEGER L. — Chinese Amphibians and Reptiles in the United States. National Museum. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 66, art. 25). Washington, 1925, 8°, pp. 1-115.
- TEODORO G. — Osservazioni sul *Pyrrhocoris apterus* L. con particolare riguardo alla flagellosi. (Estr. dal «Redia». Vol. XVI, pp. 45-50). Firenze, 1925, 8°.
- TESSIERI D. — La Relatividad General ante la Prueba Suprema. Buenos Aires, 1925, 8°, pp. 1-29.
- TIMPANARO S. — Sul passaggio dei grossi ioni attraverso la rete di Faraday. (Estr. dai «Rendiconti del Reale Istituto di Scienze e Lettere». Vol. LVII, fasc. XI-XV, 1925). Milano, 1925, 8°, pp. 1-7.
- TURATI E. — In memoria di Renato Perlini e di Enrico Ragusa. Milano, 1925, 8°, pp. 1-11.
- VIGLINO C. — Dell'essenza e dei limiti del diritto coniugale in ordine all'unione sessuale. (Estr. dalla «Rassegna di Studi sessuali e di Eugenia». Anno V, n. 3, 1925, pp. 81-96. Roma, 1925, 8°).
- WHITEBREAD Ch. — The Indian Medical Exhibit of the Division of Medicine in the United States National Museum. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 67, articolo 10). Washington, 1925, 8°, pp. 1-26.
- WILSON E. B., LUYTEN W. — The Frequency Distribution of some measured Parallaxes and the Parallaxes themselves. (Repr. from the «Proceedings of the National Academy of Sciences». Volume 11, no. 5, 1925, pp. 270-4). S. I., 1925, 8°.

G. C.

INDICE DEL VOLUME II, SERIE VI. — RENDICONTI

1925

INDICE PER AUTORI

A

- AMANTEA G. e MARTINO G. — « Ricerche sulla secrezione spermatica. — XVII. Digiuno e attività del testicolo del colombo ». 511.
- AMADORI M. — « Prodotti di condensazione tra glucosio e p-fenetidina ». 337.
- ARMELLINI G. — « Sopra una presumibile oscillazione del diametro solare, secondo le ricerche eseguite nel R. Osservatorio del Campidoglio ». 293
- ID. — « Sopra la teoria delle ombre volanti nelle eclissi solari ». 371.
- ARTOM C. — « Le correlazioni obbligatorie del vero tetraploidismo ». 355.

B

- BARGELLINI G. — « β -fenil-cumarine ». 32.
- ID. — « α - β -difetil-cumarine ». 178.
- ID. — « α -fenil- β -metil-cumarine ». 261.
- BARGELLINI G. e LEONE P. — « Glucosidi dei calconi ». 35.
- BELLUIGI A. — « Sulla teoria delle Onde Sismiche del Somigliana ». 490.
- BERGAMI G. — « Influenza dei trefoni embrionali sulla cicatrizzazione delle ferite ». 140.
- BILLOWS E. — « Sui cristallini di zolfo che accompagnano l'anglesite e la galena di Monteponi ». 563.

- BLASCHKE W. — « Sistemi ciclici di curve sopra una superficie ». 399.
- BOMPIANI E. — « Costruzione di invarianti proiettivo-differenziali di una superficie ». 466.
- BRASI E. — Vedi SCAGLIARINI G.
- BRUNELLI G. e REMOTTI E. — « Il significato fisiologico-etologico dei caratteri sessuali secondari nelle Gambusie ». 359.
- BRUNETTI R. — « Assorbimento continuo lungo una serie ottica e struttura della discontinuità d'assorbimento ad alta frequenza ». 252.
- ID. — « Effetto del legame chimico sull'energia dei livelli intraatomici ». 323.
- ID. — « Sulla grandezza relativa di atomi e ioni ». 410.
- BRUNI G. e FERRARI A. — « Soluzioni solide fra composti di elementi a valenza diversa. Cloruro di litio e cloruro di magnesio anidri ». 457.

C

- CALDONAZZO B. — « Sui moti di un liquido che lasciano inalterata la distribuzione locale delle pressioni ». 16.
- CAMPANILE G. — « Contribuzione allo studio della sistematica del gen. "Cuscuta" (Sezione "Chlistogrammica" Englm) » 212.
- CANTONE M. — « Nuovo metodo di studio sui risultati delle esperienze ». 530.

CAROBBI G. — Vedi ZAMBONINI F.
CARPANESE T. — «L'epidoto del Monte Rosso di Verra (gruppo del Monte Rosa)». 276, 349.

CASTELNUOVO (Segretario) — Presenta le pubblicazioni giunte in dono. 362.

Id. — Presenta, perchè siano sottoposte ad esame, le Memorie di Ayò, «Chimico-Fisica-Matematica» e di Giuliani «Elettrolisi-Terapia». 561.

CENTANNI E. — Vedi TIZZONI G.

CHECCHIA-RISPOLI G. — «Sugli Echinidi cenozoici della Cirenica raccolti dall'ing. Camillo Crema». 210.

Id. — «Sulla diffusione verticale delle "Orbitoides s. str."». 274.

CHINI M. — «Ancora sulla determinazione delle geodetiche di talune superficie». 91.

Id. — «Sulla determinazione delle traiettorie isogonali di un sistema di linee in talune superficie». 231.

Id. — «Sulle linee piane di cui è data, in coordinate polari, la lunghezza dell'arco in funzione dell'anomalia dell'estremo». 306.

CISOTTI U. — «Proprietà delle funzioni di variabile complessa su di una superficie qualunque». 81.

CLEMENTI A. — «Sulla pressione osmotica dell'emolinfa e dei tessuti di *Helix* A. durante il letargo». 284.

CORBINO O. M. — «Potere termoelettrico e coefficiente di Hall.». 526.

CRUDELI U. — «Metodo di risoluzione di un problema fondamentale nella teoria del moto lento stazionario dei liquidi viscosi». 247.

D

D'ANCONA U. — «Dell'influenza di soluzioni saline sulla resistenza al digiuno delle giovani anguille». 443.

DE ANGELIS G. — Vedi TIZZONI G.

DE ANGELIS M. — «Alcune nuove osservazioni sulla dachiardite». 133.

DE CARO L. — «Sulle variazioni della resistenza elettrica dei muscoli». 515.

DE FAZI R. — «Sintesi in chimica organica con l'energia raggiante. — I. Sulla fotosintesi dell'acido α -fenil- β -difенил-lattico». 266.

E

EVANS G. C. — «Il potenziale semplice, ed il problema di Neumann» 312.

F

FANTAPPIÈ L. — «Risoluzione di una classe di equazioni integrali di 1^a specie a limiti costanti». 97.

FERMI E. e RASETTI F. — «Ancora sull'effetto di un campo magnetico alternato sopra la polarizzazione della luce di risonanza». 117.

FERNANDES L. — «Dell'isomorfismo fra Uranio tetravalente e Zirconio». 182.

FERRARI A. — «La struttura cristallina del biossido di piombo esaminata coi raggi X». 186.

Id. — Vedi BRUNI G.

FINZI B. — «Considerazioni su i moti irrotazionali di lamine, liquide». 236.

Id. — «Moti liquidi laminari potenziali su sviluppabili». 407.

FRANCHI S. — «Di alcuni quesiti geologici nelle Alpi franco-italiane». 383.

G

GARELLI F. — «Contributo alla crioscopia di soluzioni di gas in solventi diversi». 120.

GENNARO V. — «Micacisti a piemontite nelle valli di Lanzo (Alpi Piemontesi)». 508.

GIUA M. — «L'influenza dei sostituenti sulla formazione, e sulla stabilità in alcuni composti ciclici». 343.

GRANDORI R. — «Studi sulla blastocinesi degli insetti». 449.

H

HERRERA L. A. — «Figure illustrative in aggiunta alle diverse comunicazioni». 158.

HERRERA L. A. — Initazioni di cellule in divisione e della germinazione nelle spore col fluosilicato di calcio », 387.

J

JUCCI C. — « Sul comportamento ereditario del tipo di sviluppo larvale negli incroci tra bachi da seta a tre e a quattro mute », 66.

ID. — « La terza generazione di incroci tra bachi da seta a tre e a quattro mute. Il "numero delle mute" non è dunque un carattere unitario mendeliano? » 136.

L

LAZZARINO O. — « Sulle condizioni di esistenza del teorema di reciprocità del Volterra », 103.

LEONE P. — Vedi BARGELLINI G.

LEVI G. — « Accrescimento autonomo per movimento ameboide di frammenti di neuriti separati dal centro trofico », 160.

LEVI G. R. — « Le varietà di ossido di torio e loro azione catalitica nella disidratazione dell'alcool », 419.

ID. — Vedi ZAMBONINI F.

LEVI G. R. e NATTA G. — « Sulla struttura cristallina della perowskite », 39.

LEVI M. — « La eccitabilità della retina in rapporto con la durata dello stimolo », 74.

LEVI-CIVITA T. — « Moti gravitazionali in una dimensione », 366.

LUBOMIR TCHACALOFF. — « Sur une propriété générale des équations différentielles (un théorème de M. Ernesto Pascal) », 13.

M

MAGGINI M. — « Orbita del sistema binario O2535 dedotta da misure interferometriche », 315.

MAMMANA G. — « Sopra un nuovo metodo di studio delle equazioni differenziali lineari », 164.

MARTINO G. — Vedi AMANTEA G.

MARZETTI B. — « Intorno ad una deviazione della legge di Poiseuille », 169.

MATTIROLO (Relatore) — Anche a nome del Socio PIROTTA, riferisce favorevolmente per la inserzione nei volumi accademici sulla Memoria: « Laobulbeniali osservati nelle collezioni del R. Museo Zoologico di Torino » della Dott. Silvia Colla, 361.

MAZURKIEWICZ S. — « Sur les fonctions, qui satisfont à une condition di Lipschitz généralisée », 108.

N

NATTA G. — « Struttura cristallina degli idrati di cadmio e di nichel », 495.

ID. — Vedi LEVI G. R.

O

ONORATO E. — « Sulla epsomite della miniera Nord-Ovest inferiore di Idrja », 204.

P

PADOVANI C. — Vedi TERNI A.

PASQUINI P. — « La genesi del pettine "Pecten", nello sviluppo dell'occhio degli uccelli », 61.

PEROTTI R. — « Ancora sui bacilli radicali della "Diploaxis erucoides" », 46.

PERRIER C. — « Metodo per la determinazione degli indici principali di rifrazione delle sostanze birifrangenti col piatto di Fedorow », 22.

PERSICO E. — « Esperienze sull'ampiezza delle oscillazioni prodotte da una lampada a tre elettrodi », 20.

PICCARDI G. — Vedi ROLLA L.

PIERONI A. — « Su alcuni derivati della Pteridina », 125.

PIROTTA — Vedi MATTIROLO.

PIRÓVANO A. — « Intorno ad alcune osservazioni sulle "mutazioni elettriche" e sul processo di "jonolisi" nei gameti », 217.

- POGGI R. — «Sopra alcuni derivati del toluolo». 423.
- PONTREMOLI A. — «Sull'orientamento in un campo elettrico o magnetico costante nella ipotesi della anisotropia molecolare». 328.
- ID. — «Una esperienza caratteristica nella nella birifrangenza elettrica o magnetica». 416.
- PRINCIPI P. — «Osservazioni sulla geologia dell'alta e media valle del Savio». 432.

R

- RAIMONDI E. — «Effetto dinamico di una corrente che fluisce tra una lastra ed una parete piana indefinita». 241.
- RASETTI F. — Vedi FERMI E.
- REMOTTI E. — «Sul metabolismo embrionale dei Teleostei. — Gli aminoacidi derivati dalla degradazione della capsula e loro rapporto con l'embrione». 68.
- RIVERA V. — «Guarigione di alcuni cancri vegetali con la cura dei raggi X». 142.
- ROLLA L. e PICCARDI G. — «Sulla statica chimica dei fenomeni elettronici». 29, 128, 173, 334.
- RONCHI V. — «Misure di stelle doppie con un interferometro a reticolo». 257.
- ID. — «L'interferometro oculare». 319.
- RUSSO A. — «Sopra una sostanza siderofila, emessa dal micronucleo dei Gameti impuri, derivati dalla 2^a divisione dei Gametogeni impuri, in "Cryptolichum echini", e sulla sua destinazione». 3.
- ID. — «La curva di sviluppo di un coleottero xilofago: il "Chaetoptelius vestitus" (Muls Rey) Fuchs». 286.
- ID. — «La 1^a Coniugazione accessoria tra Gameti impuri in "Cryptochilum echini" Maupas». 533.
- SABBATINI A. — «Sulle equazioni integrali quadratiche a limiti variabili». 111.
- SACCARDI P. — «Sopra la natura del melanogeno». 346.
- SANDONNINI C. — «Azioni di presenza del carbone». 427.
- SANSONE G. — «Sulle equazioni indeterminate delle unità di norma negativa nei corpi quadratici reali». 479.
- ID. — «Il caso $D = 2p$ con p primo». 548.
- SAVELLI G. — «Di un effetto collaterale e di un rapido metodo di studio della "jonolisi" del polline». 53.
- SCAETTA H. — «Hermafroditismo parziale e partenocarpia in "Phoenix dactylifera L."». 568.
- SCAGLIARINI G. e BRASI E. — «Composti di addizione fra alogenuri dello stagno e del titanio con basi organiche». 269.
- SCAGLIARINI G. e TARTARINI G. — «Prodotti di ossidazione di solfiti complessi del cobalto trivalente». 191.
- SEGRE B. — «Intorno ad una proprietà dei determinanti simmetrici del 6° ordine». 539.
- ID. — «I complessi quadratici di rette S_4 ». 476.
- SEVERI F. — «Sulle curve di livello costante degli integrali di Picard». 521.
- SEVERINI C. — «Sulla convergenza delle serie di funzioni ortogonali». 470, 542.
- SHALEM N. — «Sopra una nuova fauna cenomaniiana della Palestina». 505.
- SIGNORINI A. — «Un teorema di esistenza ed unicità nella statica dei materiali poco resistenti a trazione». 401.
- ID. — «Sulla pressoflessione delle mura-ture». 484.
- STOLFI A. — «Il comportamento del piombo contenente Ra G. nella formazione dell'aldeide formica secondo Thunberg». 195.

S

- SABBATANI L. — «Azione farmacologica del ferro coi sali doppi e complessi». 383.
- SABBATINI A. — «Sull'unicità della soluzione delle equazioni integrali a limiti variabili». 8.

T

- TARTARINI G. — Vedi SCAGLIARINI G.
- TERNI A. e PADOVANI C. — «Azione dell'ipofosfito sodico sul cloruro stannico». 501.

TIERI L. — « Determinazione della costante di Avogadro per mezzo di soluzioni birifrangenti di ferro dializzato ». 331.

TIZZONI G., CENTANNI E. e DE ANGELIS G. — « Intorno alle modificazioni determinate dal radio sulla poltiglia dell'adeno-carcinoma del topolino ed alla sua trasformazione in vaccino curativo ». 393.

TONELLI L. — « Sulla convergenza delle serie di Fourier ». 85, 145.

TORELLI B. — « Il valore degli Eterocromosomi ». 439.

V

VERCELLI F. — « Teoria della propagazione dell'energia raggiante nell'acqua ». 198.

VOLTERRA (Presidente) — Commemora i Soci defunti VIOLA, RICCI-CURBASTRO, MASSART, KLEIN, SCHWEINFURTH, DE PETRA, SCHUPFER e HOMOLLE. 561.

Id. — Richiama l'attenzione dei Soci sul prezioso materiale del Museo Copernicano, collocato nelle aule dell'Accademia. 562.

Id. — Dà notizia di vari Congressi scientifici tenutisi durante le ferie accademiche. 562.

Id. — Presenta due pieghi suggellati inviati dai sigg. Minetti S. e dott. Pais A. 562.

VOLTERRA (Presidente). — Commemora con elevate e commosse parole il Socio Nazionale F. D' OVIDIO. 573.

W

WATAGHIN G. — « Sulla dipendenza della velocità della luce dal movimento della sorgente ». 554.

Z

ZAMBONINI F. e CAGLIOTI V. — « Solfati di neodimio e tallio talloso ». 153.

ZAMBONINI F. e CAROBBI G. — « I solfati doppi di metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. — III. Solfati doppi di lantanio e di sodio ». 300.

Id. — « IV. Solfati doppi di neodimio e sodio ». 374.

Id. — « Deduzioni dall'analisi röntgenografica dei molibdati di La, Ce, Nd, Sm. Cristalli misti di molibdato di cerio e di calcio ». 462.

ZAMBONINI F. e LEVI G. R. — « Ricerche sull'isomorfismo dei molibdati delle terre rare con quelli di calcio, dello stronzio, del bario e del piombo ». 149, 225, 303, 377.

INDICE PER MATERIE

A

Astrofisica. — « Misure di stelle doppie con un interferometro a reticolo ». V. RONCHI. 257.

— « L'interferometro oculare ». Id. 319.

Astronomia. — « Sopra una presumibile oscillazione del diametro solare, secondo le ricerche eseguite nel R. Osservatorio del Campidoglio ». G. ARMELLINI. 293.

— « Sopra la teoria delle ombre volanti nelle eclissi solari ». Id. 371.

— « Orbita del sistema binario OΣ535 dedotta da misure interferometriche ». M. MAGGINI. 315.

B

Batteriologia agraria. — « Ancora sui bacilli radicali della "Diplotaxis erucoides" ». R. PEROTTI. 46.

Biologia. — « Sopra una sostanza siderofila, emessa dal micronucleo dei Gameti impuri, derivati dalla 2ª divisione dei Gametogeni impuri, in "Cryptotilicum echini", e sulla sua destinazione ». A. RUSSO. 3.

— « Sul comportamento ereditario del tipo di sviluppo larvale negli incroci tra bachi da seta a tre e a quattro mute ». C. JUCCI. 66.

— « Sul Metabolismo embrionale dei Teleostei. — Gli aminoacidi derivati dalla degradazione della capsula e loro rapporto con l'embrione ». E. REMOTTI. 68.

Biologia. — « La terza generazione di incroci tra bachi da seta a tre e a quattro mute. Il "numero delle mute" non è dunque un carattere unitario mendeliano? » C. JUCCI. 136.

— « Figure illustrative in aggiunta alle diverse comunicazioni ». L. A. HERRERA. 158.

— « Accrescimento autonomo per movimento ameboide di frammenti di neuriti separati dal centro trofico ». G. LEVI. 160.

— « La curva di sviluppo di un coleottero xilofago: "il Chaetoptelius vestitus" (Muls Røy) Fuchs ». G. RUSSO. 286.

— « Imitazioni di cellule in divisione e della germinazione nelle spore col fluosilicato di calcio ». H. HERRERA. 387.

— « Il valore degli Eterocromosomi ». B. TORELLI. 439.

— « La 1ª Coniugazione accessoria tra Gameti impuri in "Cryptotilicum echini" Maupas ». A. RUSSO. 533.

Botanica. — « Contribuzione allo studio della sistematica del gen. "Cuscuta" (Sezione "Chlistogrammica" Englm) ». G. CAMPANILE. 212.

Bullettino bibliografico. — 222, 575.

C

Chimica. — « β-fenil-cumarine ». G. BARGELLINI. 32.

— « Glucosidi dei calconi ». G. BARGELLINI e P. LEONE. 35.

— « Contributo alla crioscopia di soluzioni di gas in solventi diversi ». F. GARELLI. 120.

Chimica. — « Su alcuni derivati della Piridina ». A. PIERONI. 125.

— « Ricerche sull'isomorfismo dei molibdati dei metalli delle terre rare con quelli di calcio, dello stronzio, del bario e del piombo ». F. ZAMBONINI e G. R. LEVI. 149, 225, 303, 377.

— « Solfati di neodimio e tallio talloso ». F. ZAMBONINI e V. CAGLIOTI. 153.

— « α - β -difetil-cumarine ». G. BARGELLINI. 178.

— « Dell'isomorfismo fra Uranio tetravalente e Zirconio ». L. FERNANDES. 182.

— « La struttura cristallina del biossido di piombo esaminata coi raggi X ». A. FERRARI. 186.

— « Prodotti di ossidazione di solfiti complessi del cobalto trivalente ». G. SCAGLIARINI e G. TARTARINI. 191.

— « Il comportamento del piombo contenente RaG nella formazione dell'aldeide formica secondo Thunberg ». A. STOLFI. 195.

— « α -fenil- β -metil-cumarine ». G. BARGELLINI. 261.

— « Composti di addizione fra alogenuri dello stagno e del titanio con basi organiche ». G. SCAGLIARINI e E. BRASI. 269.

— « I solfati doppi di metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. — III. Solfati doppi di lantanio e di sodio ». F. ZAMBONINI e G. CAROBBI. 300.

— Id. « IV. Solfati doppi di neodimio e sodio ». Id. 374.

— Id. « V. Deduzioni dall'analisi röntgenografica dei molibdati di La, Ce, Nd, Sm. Cristalli misti di molibdato di cerio e di calcio ». Id. 462.

— « Prodotti di condensazione tra glucosio e p-fenetidina ». M. AMADORI. 337.

— « L'influenza dei sostituenti sulla formazione e sulla stabilità in alcuni composti ciclici ». M. GIUA. 343.

— « Sopra alcuni derivati del toluolo ». R. POGGI. 423.

— « Azioni di presenza del carbone ». C. SANDONINI. 427.

Chimica. — « Azione dell'ipofosfito sodico sul cloruro stannico ». A. TERNI e C. PADOVANI. 501.

Chimica biologica. — « Sopra la natura del melanogeno ». P. SACCARDI. 346.

Chimica farmacologica. — « Azione farmacologica del ferro coi sali doppi e complessi ». L. SABBATANI. 383.

Chimica-Fisica. — « Sulla statica chimica dei fenomeni elettronici ». L. ROLLA e G. PICCARDI. 29, 128, 173, 334.

— « Soluzioni solide fra composti di elementi a valenza diversa. Cloruro di litio e cloruro di magnesio anidri ». G. BRUNI e A. FERRARI. 457.

— « Struttura cristallina degli idrati di cadmio e di nichel ». G. NATTA. 495.

Chimica organica. — « Sintesi in chimica organica con l'energia raggiante. I. Sulla fotosintesi dell'acido α -fenil- β -difetil-lattico ». R. DE FAZI. 266.

Commissioni (Relazioni di). — 361, 561.

Comunicazioni varie. — 562.

Cristallografia. — « Sulla struttura cristallina della perowskite ». G. R. LEVI e G. NATTA. 39.

— « La varietà di ossido di torio e loro azione catalitica nella disidratazione dell'alcool ». G. R. LEVI. 419.

E

Embriologia. — « La genesi del pettine "Pecten", nello sviluppo dell'occhio degli uccelli ». P. PASQUINI. 61.

F

Fisica. — « Esperienze sull'ampiezza delle oscillazioni prodotte da una lampada a tre elettrodi ». E. PERSICO. 20.

— « Ancora sull'effetto di un campo magnetico alternato sopra la polarizzazione della luce di risonanza ». E. FERMI e F. RASETTI. 117.

— « Intorno ad una deviazione della legge di Poiseuille ». B. MARZETTI. 169.

Fisica. — « Assorbimento continuo lungo una serie ottica e struttura della discontinuità d'assorbimento ad alta frequenza ». R. BRUNETTI 252.

— « Effetto del legame chimico sull'energia dei livelli intraatomici ». ID. 323.

— « Sull'orientamento in un campo elettrico o magnetico costante nella ipotesi della anisotropia molecolare ». A. PONTREMOLI 328.

— « Determinazione della costante di Avogadro per mezzo di soluzioni birifrangenti di ferro dializzato ». L. TIERI 331.

— « Sulla grandezza relativa di atomi e ioni ». R. BRUNETTI 410.

— « Una esperienza caratteristica nella birifrangenza elettrica o magnetica ». A. PONTREMOLI 416.

— « Potere termoelettrico e coefficiente di Hall ». O. M. CORRINO 526.

— « Nuovo metodo di studio sui risultati delle esperienze ». M. CANTONE 530.

— « Sulla dipendenza della velocità della luce dal movimento della sorgente ». WATAGHIN 554.

Fisica matematica. — « Sulle condizioni di esistenza del teorema di reciprocità del Volterra ». O. LAZZARINO 103.

— « Metodo di risoluzione di un problema fondamentale nella teoria del moto lento stazionario dei liquidi viscosi ». U. CRUDELL 247.

Fisica terrestre. — « Teoria della propagazione dell'energia raggiante nell'acqua ». F. VERCELLI 198.

Fisiologia. — « La eccitabilità della retina in rapporto con la durata dello stimolo ». M. LEVI 74.

— « Influenza dei tretoni emozionali sulla cicatrizzazione delle ferite ». G. BERGAMI 140.

— « Sulla pressione osmotica dell'emolinfa e dei tessuti di *Helix A.* durante il letargo ». A. CLEMENTI 284.

— « Il significato fisiologico-etologico dei caratteri sessuali secondari nelle *Gambusie* ». G. BRUNELLI ed E. REMOTTI 559.

Fisiologia. — « Dell'influenza di soluzioni saline sulla resistenza al digiuno delle giovani anguille ». U. D'ANCONA 443.

— « Studi sulla blastocinesi degli insetti ». R. GRANDORI 449.

— « Ricerche sulla secrezione spermatica. — XVII. Digiuno e attività del testicolo del colombo ». G. AMANTEA e G. MARTINO 511.

— « Sulle variazioni della resistenza elettrica dei muscoli ». L. DE CARO 515.

G

Genetica. — « Di un effetto collaterale e di un rapido metodo di studio della "jonolisi" del polline ». R. SAVELLI 53.

— « Intorno ad alcune osservazioni sulle "mutazioni elettriche" e sul processo di "jonolisi" nei gameti ». A. PIROVANO 217.

— « Ermafroditismo parziale e partenocarpia in "*Phoenix dactylifera L.*" ». H. SCAETTA 568.

Geologia. — « Di alcuni quesiti geologici nelle Alpi franco-italiane ». S. FRANCHI 383.

— « Osservazioni sulla geologia dell'alta e media valle del Savio ». P. PRINCIPI 432.

— « Sopra una nuova fauna cenomaniana della Palestina ». N. SHALEM 505.

Geometria. — « Sistemi ciclici di curve sopra una superficie ». W. BLASCHKE 399.

I

Idromeccanica. — « Considerazioni sui moti irrotazionali di lamine liquide ». B. FINZI 236.

— « Effetto dinamico di una corrente che fluisce tra una lastra ed una parete piana indefinita ». E. RAIMONDI 241.

— « Moti liquidi laminari potenziali su sviluppabili ». B. FINZI 407.

L

Libri (presentazione di). — 362.

M

- Matematica.** — «Sull'unicità della soluzione delle equazioni integrali a limiti variabili». A. SABBATINI. 8.
- «Sur une propriété générale des équations différentielles (un théorème de M. Ernesto Pascal)». TCHACALOFF LUBOMIR. 13.
- «Proprietà delle funzioni di variabile complessa su di una superficie qualunque». U. CISOTTI. 81.
- «Sulla convergenza delle serie di Fourier». L. TONELLI. 85, 145.
- «Ancora sulla determinazione delle geodetiche di talune superficie». M. CHINI. 91.
- «Risoluzione di una classe di equazioni integrali di 1ª specie a limiti costanti». L. FANTAPPIÈ. 97.
- «Sur les fonctions, qui satisfont à une condition de Lipschitz généralisée». S. MAZURKIEWICZ. 108.
- «Sulle equazioni integrali quadratiche a limiti variabili». A. SABBATINI. 111.
- «Sopra un nuovo metodo di studio delle equazioni differenziali lineari». G. MAMMANA. 164.
- «Sulla determinazione delle traiettorie isogonali di un sistema di linee in talune superficie». M. CHINI. 231.
- «Sulle linee piane di cui è data, in coordinate polari, la lunghezza dell'arco in funzione dell'anomalia dell'estremo». Id. 306.
- «Il potenziale semplice, ed il problema di Neumann». G. C. EVANS. 312.
- «Costruzione di invarianti proiettivo-differenziali di una superficie». E. BOMPIANI. 466.
- «Sulla convergenza delle serie di funzioni ortogonali». C. SEVERINI. 470, 542.
- «I complessi quadratici di rette S_4 ». B. SEGRE. 476.
- «Sulle equazioni indeterminate delle unità di norma negativa nei corpi quadratici reali». G. SANSONE. 479.
- Id. «Il caso $D = 2p$ con p primo». Id. 548.

Matematica. — «Sulle curve di livello costante degli integrali di Picard». F. SEVERI. 521.

— «Intorno ad una proprietà dei determinanti simmetrici del 6º ordine». B. SEGRE. 539.

Meccanica. — «Sui moti di un liquido che lasciano inalterata la distribuzione locale delle pressioni». B. CALDONAZZO. 16.

— «Moti gravitazionali in una dimensione». T. LEVI-CIVITA. 366.

— «Un teorema di esistenza ed unicità nella statica dei materiali poco resistenti a trazione». A. SIGNORINI. 401.

— «Sulla pressoflessione delle murature». Id. 484.

Mineralogia. — «Alcune nuove osservazioni sulla dachiardite». M. DE ANGELIS. 133.

— «Sulla epsomite della miniera Nord-Ovest inferiore di Idria». E. ONORATO. 204.

— «L'epidoto del Monte Rosso di Verra (gruppo del Monte Rosa)». T. CARPANESE. 276, 349.

— «Micacisti a piemontite nelle valli di Lanzo (Alpi Piemontesi)». V. GENNARO. 508.

— «Sui cristallini di zolfo che accompagnano l'anglesite e la galena di Monteponi». E. BILLOWS. 563.

N

Necrologie. — Annuncio della morte del Socio straniero F. KLEIN. 78.

— Annuncio della morte dei Soci nazionali VIOLA, RICCI-CURBASTRO, DE PETRA, SCHUPFER e HOMOLLE e dei Soci stranieri MASSART, KLEIN e SCHWEINFURTH. 361-2.

— Commemorazione del Socio nazionale F. D' OVIDIO. 573.

O

Ottica cristallografica. — «Metodo per la determinazione degli indici principali di rifrazione delle sostanze birifrangenti col piatto di Fedorow». C. PERRIER. 22.

P

Paleontologia. — « Sugli Echinidi cenozoici della Cirenaica raccolti dall'ing. Camillo Crema ». G. RISPOLI-CHECCHIA. 210.

— « Sulla diffusione verticale delle "Orbitoides s. str." », ID. 274.

Patologia. — « Intorno alle modificazioni determinate dal radio sulla poltiglia dell'adeno-carcinoma del topolino ed alla sua trasformazione in vaccino curativo ». G. TIZZONI, E. CENTANNI e G. DE ANGELIS. 393.

Patologia vegetale. — « Guarigione di alcuni cancri vegetali con la cura dei raggi X ». V. RIVERA. 142.

S

Sismologia. — « Sulla teoria delle Onde Sismiche del Somigliana ». A. BELLUIGI. 490.

T

Teoria dei numeri. — Vedi **Matematica**.

Z

Zoologia. — « Le correlazioni obbligatorie del vero tetraploidismo ». C. ARTOM. 355.



3 8198 304 935 859

UNIVERSITY OF ILLINOIS AT CHICAGO

